

## Kolokwium 1. Zadania przykładowe

1. Rozwiązać nadokreślony układ równań

$$2x + 3y = 6, \quad x = 5/2y, \quad 3x - y = 7$$

metodą najmniejszych kwadratów. Problem i jego rozwiązanie przedstawić graficznie.

2. Dana jest macierz  $\begin{bmatrix} 0 & 12 & 1 \\ 2 & 13 & 12 \\ 41 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ . Obliczyć normy  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  i Euklidesa tej macierzy

oraz wektora, odpowiadającego pierwszej kolumnie macierzy.

3. Obliczyć wyznacznik oraz rozwiązać układ równań  $2x - y = -5$ ,  $-x + 5y = 7$  metodą Gaussa. Wykonać dwa kroki iteracji metodami Jakobiego oraz Gaussa-Seidla, przyjmując jako wektor startowy  $[1,1]$ . Po dwu krokach określić błąd rozwiązania.

4. Podać algorytm iteracyjnego rozwiązania układu równań

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2, \quad 2y = (x-5/2)^2$$

metodą Newtona-Raphsona. Startując z punktu  $(3/4,1)$  wykonać dwa kroki iteracji. Oszacować błąd otrzymanego rozwiązania w normie Euklidesa.

5. Podać schematy iteracyjne rozwiązania równania  $y^5 - 2y^{3/2} = 16$  metodami:

(i) iteracji prostej, (ii) bisekcji, (iii) Newtona, (iv) siecznych, (v) reguła fałsi.

6. Wartości własne macierzy F wynoszą  $\lambda_1=0.2$ ,  $\lambda_2= - 2.5$ ,  $\lambda_3= - 3.3$ ,  $\lambda_4= - 4.6$ . Do której wartości własnej  $\lambda_k$ ,  $k=1,2,3,4$  będą zbieżne metody potęgowa i odwrotna przy przesunięciu widma macierzy F o wartość  $19/4$ ,  $-9/5$ ,  $4/6$ ,  $0$  ?

7. Dla symetrycznej części macierzy z zadania 2 obliczyć niezmienniki i znaleźć wartości własne wykonując trzy kroki iteracji metodą Newtona (jako pierwiastki równania sześciennego).

8. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy  $\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$

– korzystając z definicji problemu własnego

– metodą potęgową i odwrotną. Oszacować błędy takiego rozwiązania po dwóch krokach iteracji. Przyjąć wektor startowy  $\{-1, 1\}$

– dokonać oszacowania widma wartości własnych metodą Gerszgorina.

9. Udowodnić, że rzutowanie wektora na prostą jest tensorem. Podać macierz reprezentującą ten tensor.

10. Wartości własne macierzy  $A$  wynoszą 1, 2, 4, 5. Obliczyć wartości własne macierzy  $C = -2A^3 + 4A^2 + 5A - 3I$ .

11. Zastosować interpolację Lagrange'a wprost i odwrotną do znalezienia wzoru funkcji danej w postaci zbioru punktów:  $(1, -2)$ ;  $(5, 0)$ ;  $(6,2)$ . Sprawdzić czy te interpolanty są funkcjami wzajemnie odwrotnymi.

12. Zastosować metodę najmniejszych kwadratów do znalezienia najlepszej aproksymacji funkcją liniową, kwadratową, a następnie wykładniczą dla danych:  $(1, 1)$   $(2, -1)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(4, 2)$ . Oszacować błąd residualny.

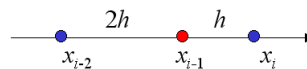
## Kolokwium 2

### Zadania przykładowe

- Zastosować metodę Eulera, Rungego-Kutty II i IV rzędu do aproksymacji rozwiązania zagadnienia  $v t + v' = 0$ ,  $v(0) = 1$  z krokiem  $\Delta t = 0.1$ . Wykonać dwa kroki całkowania. Oszacować błędy otrzymanych wyników.
- Rozwiązać problem początkowy z poprzedniego zadania metodą predyktor-korektor z dokładnością 0.01.
- Obliczyć całkę  $\int_{-1}^0 (3-2x^2)dx$  stosując kwadratury Newtona-Cotesa, dwupunktowy wzór Gaussa i dzieląc obszar całkowania na dwa podprzedziały. Wyznaczyć błąd względny w porównaniu z wartością analityczną.
- Zastosować interpolację Lagrange'a wprost i odwrotną do znalezienia wzoru funkcji danej w postaci zbioru punktów: (1, -2); (5, 0); (6,2). Sprawdzić czy te interpolanty są funkcjami wzajemnie odwrotnymi.
- Zastosować metodę najmniejszych kwadratów do znalezienia najlepszej aproksymacji funkcją liniową, kwadratową, a następnie wykładniczą dla danych: (1, 1) (2, -1), (3, 1), (4, 2). Oszacować błąd residualny.
- Przyjmując  $h = 1$  zapisać w postaci macierzowej i rozwiązać układ równań MRS dla zagadnienia brzegowego:  $y'' + 2y/x = x^2 + 4$ ,  $y(1) = -1$ ,  $y'(4) = 2$ . Wykorzystać 3-węzłowe centralne wzory różnicowe.
- Metodą współczynników nieoznaczonych oraz interpolacji Lagrange'a wyprowadzić wzory różnicowe

$$w'_{i-1} = aw_{i-2} + bw_{i-1} + cw_i$$

$$w''_{i-1} - w'_{i-1} = aw_{i-2} + bw_{i-1} + cw_i$$



- Zastosować wzory z poprzedniego zadania do obliczenia pierwszej i drugiej pochodnej funkcji  $f(x) = x + \cos x$  w punkcie  $x = 2$ . Obliczyć błąd uzyskanych wyników.
- Znaleźć wartości  $y(1)$  i  $y(2)$  metodą różnic skończonych, jeżeli:  $y'' + 2y' + y = -3x - x^2$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(2) = -3$
- Zapisać układ równań algebraicznych MRS po dyskretyzacji 5 węzłami fizycznymi oraz odpowiednimi węzłami fikcyjnymi dla belki jak na rys. Zastosować centralne wzory różnicowe 5-cio węzłowe.  $EI = const$

