

MATEMATYKA STOSOWANA I METODY NUMERYCZNE

Wybrane z wykładów

1. MACIERZE, WEKTORY

Macierz symetryczna

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

$\mathbf{A}^T + \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ – macierze symetryczne

Macierz antysymetryczna

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$$

$\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ – macierz antysymetryczna

$\mathbf{A} = 1/2 (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + 1/2 (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$ – symetryczna i antysymetryczna części macierzy

Macierz ortogonalna

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I} \quad \text{czyli} \quad \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$$

Przykładem macierzy ortogonalnej jest macierz obrotu

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\varphi) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

Wektory ortogonalne: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

Równoważne oznaczenia iloczynu skalarnego: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\cdot, \cdot) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Iloczyn wektorowy

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin(\varphi)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

Wektory równoległe: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$

Obrót wektora

Zmiana współrzędnych wektora przy obrocie bazy

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

lub $\mathbf{x}' = \mathbf{Q}\mathbf{x}$, gdzie \mathbf{Q} – macierz obrotu, $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$

Normy wektora

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad p = 2 \quad \text{norma Euklidesa}$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i| \quad p = \infty \quad \text{norma maksimum}$$

Normy macierzy

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^N |a_{ij}| \quad \text{pierwsza,} \quad \text{lub} \quad \|\mathbf{A}\|_1 = \frac{1}{N} \max_j \sum_{i=1}^N |a_{ij}| \quad \text{średnia wartość}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{Euklidesa,} \quad \text{lub} \quad \|\mathbf{A}\|_2 = \left[\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{średnia wartość}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \quad \text{nieskończona,} \quad \text{lub} \quad \|\mathbf{A}\|_\infty = \frac{1}{N} \max_i \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \quad \text{średnia wartość}$$

$$\|\mathbf{A}\|_{1,\infty} = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

Przykład:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left[\frac{1}{3^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2) \right]^{\frac{1}{2}} = 5.627314$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \frac{1}{3} \max \begin{cases} 1+2+3 \\ 4+5+6 \\ 7+8+9 \end{cases} = \frac{1}{3} \max \begin{cases} 6 \\ 15 \\ 24 \end{cases} = 8$$

2. PODSTAWY RACHUNKU TENSOROWEGO I ANALIZY PÓL

2.1. Pole skalarne i wektorowe

Polem skalarnym nazywamy funkcję, która każdemu punktowi pewnego obszaru przyporządkowuje pewien skalar, natomiast w polu wektorowym – wektor.

Gradientem pola skalarnego $f(x, y, z)$ jest wektor oznaczany symbolem $\text{grad } f$:

$$\text{grad } f = (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z)$$

$$\text{grad } f \equiv \nabla f$$

$$\text{operator Laplace'a: } \nabla^2 f = \Delta f$$

Dywergencja pola wektorowego

Polem dywergencji lub dywergencją pola wektorowego \mathbf{F} nazywamy pole skalarne:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = (\partial F_1 / \partial x_1) + (\partial F_2 / \partial x_2) + (\partial F_3 / \partial x_3)$$

$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$ – iloczyn skalarny

Rotacja pola wektorowego.

Rotacją pola wektorowego \mathbf{F} (różniczkowalnego) oznaczaną $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ ($\operatorname{curl} \mathbf{F}$) nazywamy pole pseudowektorowe:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial / \partial x_1 & \partial / \partial x_2 & \partial / \partial x_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$\omega = 1/2 \operatorname{rot} \mathbf{v}$ – prędkość kątowna punktu ciała sztywnego jest równa połowie rotacji prędkości liniowej

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$$

$$\operatorname{curl} \operatorname{grad} f = \mathbf{0}$$

grad: skalar \rightarrow wektor (wektor \rightarrow tensor)

div: wektor \rightarrow skalar (tensor \rightarrow wektor)

curl: wektor \rightarrow wektor

$\nabla \mathbf{u} = du_i / dx_j$ wektor przemieszczeń; część symetryczna – tensor odkształcenia (wektor \rightarrow tensor)

$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j})$ wektor równań równowagi (tensor \rightarrow wektor)

2.2. Podstawy rachunku tensorowego

Tensor rzędu 0: 3^0 – skalar

Tensor rzędu 1: 3^1 – wektor (rzut na kierunek),

Tensor rzędu 2: 3^2 – macierz (dowolnemu kierunkowi przyporządkowuje wektor)

Tensor 2 rzędu – odwzorowanie liniowe wektora w wektor.

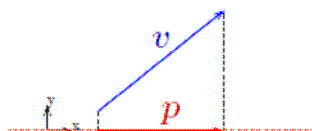
$$\tau(\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2) = \alpha \tau(\mathbf{v}_1) + \beta \tau(\mathbf{v}_2) \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$$

Przykład:

Rzutowanie wektora na oś X

Odwzorowanie $\tau(\mathbf{v}) = \mathbf{p}$

Reprezentacja macierzowa $\mathbf{v} = \mathbf{T} \mathbf{p}$ \mathbf{T} – tensor



$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

Kolumny – współrzędne wektora na płaszczyznach układu

Zmiana tensora przy obrocie bazy (zmiana układu współrzędnych)

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T \quad \mathbf{Q} \text{ – macierz obrotu}$$

Trzy niezmienniki tensora 2 rzędu \mathbf{T}

$$\mathbf{I}_1 = \text{tr } \mathbf{T} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}$$

$$\mathbf{I}_2 = 1/2(\text{tr } (\mathbf{T}^2) - \text{tr } (\mathbf{T})^2) = \begin{vmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{13} \\ t_{31} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{I}_3 = \det \mathbf{T}$$

3. OBLICZANIE WARTOŚCI I WEKTORÓW WŁASNYCH MACIERZY

Definicja

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} \text{ macierz } n \times n, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad \mathbf{Ax} \parallel \mathbf{x}$$

$$\rightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad - \text{równanie charakterystyczne}$$

gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – wartości własne, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ – wektory własne (np. kierunki główne tensora naprężenia)

Zbiór wartości własnych oznaczamy $sp(\mathbf{A})$ i nazywamy widmem (spektrum) macierzy \mathbf{A} , a liczbę $\max \lambda_i / -$ jej promieniem spektralnym.

- wartości i wektory własne macierzy *symetrycznej* są rzeczywiste;
- wartości i wektory własne macierzy *symetrycznej i dodatnio określonej* są dodatnie
- $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_n = \det(\mathbf{A}); \quad \lambda_1 + \lambda_2 \dots + \lambda_n = \text{tr}(\mathbf{A})$
- $sp(\mathbf{A}^T) = sp(\mathbf{A}),$
- $sp(\mathbf{S}^{-1} \mathbf{AS}) = sp(\mathbf{A}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{AS}$ podobieństwo macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B}
- jeśli $sp(\mathbf{A}) = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$, to:
 - ~ $sp(\mathbf{A}^{-1}) = \{ 1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n \}$
 - ~ $sp(\mathbf{A}^k) = \{ \lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k \}$
 - ~ $sp(\mathbf{A} - d\mathbf{I}) = \{ \lambda_1 - d, \dots, \lambda_n - d \}$

3.1. Twierdzenie Gerszgorina

$$Sp(\mathbf{A}) \in \text{Ball}(a_{ii}, R_i), \quad \text{lub}$$

$$\lambda_{\min} > \min_i (a_{ii} - R_i), \quad \lambda_{\max} < \max_i (a_{ii} + R_i), \quad R_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}|$$

Przykład:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{11} = -2 \\ a_{22} = 4 \\ a_{33} = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} R_1 = 1 + 3 = 4 \\ R_2 = |-1| + 2 = 3 \\ R_3 = 3 + |-2| = 5 \end{array}$$

$$\lambda_{\min} > \min \begin{cases} -2 & - & 4 \\ 4 & - & 3 \\ 3 & - & 5 \end{cases} = -6 \qquad \lambda_{\max} < \max \begin{cases} -2 & + & 4 \\ 4 & + & 3 \\ 3 & + & 5 \end{cases} = 8$$

Iloraz Rayleigha

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \Lambda = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Ax}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$$

$$\lambda_{\min} \leq \Lambda \leq \lambda_{\max} \quad \text{dla dowolnego } \mathbf{x} \in \Omega$$

3.2. Metoda potęgowa (dominująca wartość własna – $\max(|\lambda_{\max}|, |\lambda_{\min}|)$)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{Ax}_k = \dots = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$$

Algorytm

- | | | |
|----|-----------------------|---|
| 0. | Przyjmujemy | \mathbf{x}_0 |
| 1. | Normalizacja | $\mathbf{v}_k = \frac{\mathbf{x}_k}{\left(\mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k\right)^{\frac{1}{2}}}$ |
| 2. | Krok metody potęgowej | $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{Av}_k$ |
| 3. | Iloraz Rayleigha | $\Lambda_{k+1} = \frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{Av}_k}{\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k} = \mathbf{v}_k^T \mathbf{Av}_k = \mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_{k+1}$ |
| 4. | Estymacja błęd | $\varepsilon_{k+1} = \left \frac{\Lambda_{k+1} - \Lambda_k}{\Lambda_{k+1}} \right $, lub $\varepsilon_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}_k $ |
| 5. | Przerwanie obliczeń | $\varepsilon_{k+1} < 0.00001$? jeśli TAK – krok 1, jeśli NIE – krok 6 |
| 6. | Wyniki | $\lambda_{\max} \approx \Lambda_{k+1}$, $\mathbf{x}_{\max} \approx \mathbf{x}_{k+1}$ |

Metoda odwrotna – znajduje najmniejszą co do modułu wartość własną

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{x}, \quad \text{gdzie } \mathbf{A} \text{ nieosobliwa macierz}$$

3.3. Przesunięcie widma

Jeśli $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ i d – dowolny skalar, to $(\mathbf{A} - d\mathbf{I})\mathbf{x} = (\lambda - d)\mathbf{x}$, czyli wartości własne przesuniętej macierzy będą przesuniętymi wartościami macierzy \mathbf{A}

Metoda potęgowa jest zbieżna zawsze do wartości własnej najbardziej odległej od przesunięcia.

Metoda odwrotna jest zbieżna zawsze do wartości własnej najbliższej przesunięciu.

4. ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH

Metody służące do rozwiązywania układu równań $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ można podzielić na:

metody dokładne (bezpośrednie)

Gauss – Jordan ($\det \mathbf{A} \neq 0$)

Cholesky ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$) (Choleskiego-Banachiewicza)

metody iteracyjne (przybliżone)

Jacobi

Gauss-Seidel

specjalne

frontal solution

gradientów sprzężonych

4.1. Metoda eliminacji Gaussa

(I) **eliminacja wprzód** (doprowadzanie do macierzy górno-trójkątnej)

(II) **podstawianie wstecz** (znajdowanie kolejnych niewiadomych x)

Przykład

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}:\mathbf{b}] \rightarrow [\mathbf{I}:\mathbf{x}]$$

(I)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \frac{5}{6} \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{33}{14} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \frac{5}{7} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\text{zamiana} \\ \text{wierszy 3 i 4}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{33}{14} \end{array} \right]$$

(II)

$$x_4 = 33/70; \quad \rightarrow \quad x_3 = -4/35; \quad \rightarrow \quad x_2 = 8/35; \quad \rightarrow \quad x_1 = -13/70.$$

Ogólny algorytm

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

gdzie

$$\mathbf{A}_{n \times n} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad i$$

I Krok wprzód

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)} \quad \text{gdzie} \quad m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, \quad b_i^{(0)} = b_i$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik} b_k^{(k-1)} \quad k = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = k+1, \dots, n; \quad i = k+1, \dots, n$$

II Krok wstecz

$$x_i = \left[b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} x_j \right] \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}} \quad i = n-1, \dots, 2, 1$$

Obliczanie macierzy odwrotnych $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$

Stosując eliminacje Gaussa do układu

$\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ – poszczególne kolumny \mathbf{I} (macierz jednostkowa) dają poszczególne kolumny \mathbf{X}

4.2. Metody iteracyjne.

Metoda jest zbieżna gdy macierz \mathbf{A} jest dodatnio określona (warunek wystarczający) tj. gdy \mathbf{A} jest diagonalnie dominująca

Algorytmy

Metoda Jacobi'ego

$$x_i^{(n)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(n-1)} + b_i \right]$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$

Metoda Gaussa – Seidela

$$x_i^{(n)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(n)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(n-1)} + b_i \right]$$

Przykład

Jacobi	Gauss-Seidel
Macierz $\mathbf{A} =$	Wektor prawej strony $\mathbf{b} =$
8 1 2 3	28
1 6 1 -1	12
2 1 18 2	66
3 -1 2 40	167
wektor startowy $\mathbf{x} =$ 1 1 1 1	wektor startowy $\mathbf{x} =$ 1 1 1 1
numer iteracji = 1	numer iteracji = 1
$\mathbf{x} =$ 2.7500 1.8333 3.3889 4.0750	$\mathbf{x} =$ 2.7500 1.5417 3.1644 3.8491
błąd bezwzględny i względny = 4.3496 0.6964	błąd bezwzględny i względny = 4.0196 0.6817
numer iteracji = 2	numer iteracji = 2
$\mathbf{x} =$ 0.8955 1.6560 2.8065 3.8451	$\mathbf{x} =$ 1.0728 1.9353 3.0123 3.9923
błąd bezwzględny i względny = 1.9654 0.3839	błąd bezwzględny i względny = 1.7354 0.3173
numer iteracji = 3	numer iteracji = 3
$\mathbf{x} =$ 1.1495 2.0239 3.0479 4.0089	$\mathbf{x} =$ 1.0079 1.9954 3.0002 3.9993

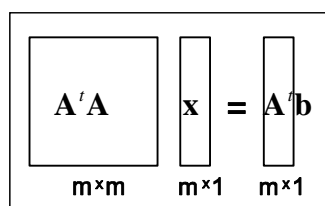
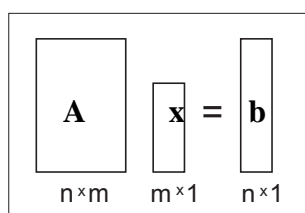
błąd bezwzględny i względny = 0.5338 0.0962 <hr/> numer iteracji = 4 $x = 0.9817 \ 1.9686 \ 2.9811 \ 3.9870$ błąd bezwzględny i względny = 0.1901 0.0349 <hr/> numer iteracji = 5 $x = 1.0135 \ 2.0040 \ 3.0052 \ 4.0015$ błąd bezwzględny i względny = 0.0554 0.0101 <hr/> numer iteracji = 9 błąd bezwzględny i względny = $0.5944 * 1.0e-03 \ 0.1085 * 1.0e-03$	błąd bezwzględny i względny = 0.0895 0.0163 <hr/> numer iteracji = 4 $x = 1.0008 \ 1.9997 \ 3.0000 \ 3.9999$ błąd bezwzględny i względny = 0.0084 0.0015 <hr/> numer iteracji = 5 $x = 1.0001 \ 2.0000 \ 3.0000 \ 4.0000$ błąd bezwzględny i względny = $0.7827 * 1.0e-03 \ 0.1429 * 1.0e-03$
--	--

4.3. Nadokreślony układ równań

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow B = (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^t (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$$

Residuum $\rightarrow \min$

$$\frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}^t (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{0} \rightarrow \boxed{\mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^t \mathbf{b}}$$



Przykład:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^t \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6/7 \\ 9/7 \end{bmatrix}$$

5. ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ I UKŁADÓW RÓWNAŃ NIELINIOWYCH

5.1. Równania nieliniowe

Metoda iteracji prostej

Twierdzenie zbieżności

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L(|x_1 - x_2|), \quad 0 < L < 1 \quad x_1, x_2 \in [a, b];$$

Metoda Newtona

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Metoda siecznych

$$x_n \approx x_{n-1} - f_{n-1} \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f_{n-1} - f_{n-2}}$$

Regula falsi

$$x_{n-2}, f_{n-2} \rightarrow x_0, f_0 \quad x_n = x_{n-1} - \frac{f_{n-1}}{f_{n-1} - f_0} (x_{n-1} - x_0) \quad f(x_0)f(x_1) < 0$$

Bisekcji

$$f(x_0)f(x_1) < 0 \quad x_2 = (x_0 + x_1)/2$$

5.2. Układy równań nieliniowych

Metoda Newtona – Raphsona

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} - \frac{\mathbf{F}_{n-1}}{\mathbf{J}_{n-1}}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} - \text{Jakobian}$$

Układ równań szybciej się oblicza bez odwracania macierzy

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} + \Delta \mathbf{x}_{n-1}, \quad \mathbf{J}_{n-1} \Delta \mathbf{x}_{n-1} = -\mathbf{F}_{n-1} \quad \mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n$$

Przykład:
$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = y^2 - 2x \\ f_2(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 - 8 \end{cases} \rightarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 2y \\ 2x & 2y \end{bmatrix} - \text{Jakobian}$$

6. BŁĄD I STABILNOŚĆ OBLICZEŃ

Etapy modelowania związane z błędami

- Obiekt rzeczywisty
- Model matematyczny
- Model numeryczny
- Obliczenia

Klasyfikacja błędów

Rozwiązywany problem $\mathbf{F} \mathbf{x} = \mathbf{b}$

$\|\mathbf{x}\|$ - norma;

1. Błąd bezwzględny (absolutny)

$$\varepsilon = |\tilde{x} - x| \quad x - \text{wartość dokładna}, \quad \tilde{x} - \text{wartość przybliżona}$$

2. Błąd względny

$$\delta = \left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right|$$

Zbieżność $\delta_n = \frac{x_n - x}{x} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$

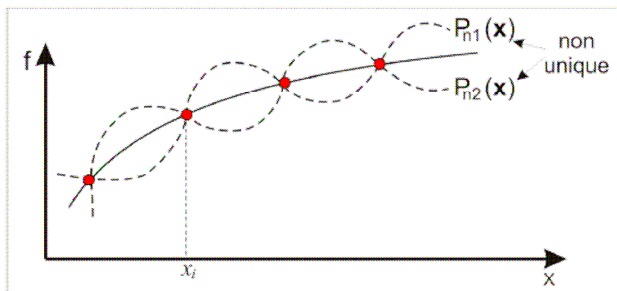
3. Błąd residualny (residuum)

$$\mathbf{R} = |\mathbf{F}(\tilde{x}) - \mathbf{b}|; \quad \text{lub} \quad \text{względny } \mathbf{R} = |\mathbf{F}(\tilde{x}) - \mathbf{b}| / |\mathbf{b}|;$$

- Dobrze i źle sformułowane zadanie
- Uwarunkowanie, wskaźnik uwarunkowania
- Stabilność i brak stabilności

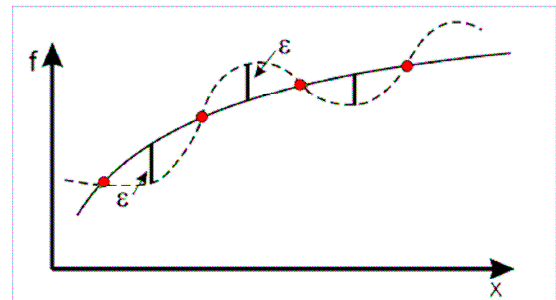
$$\text{cond } \mathbf{F} = \left| \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right|$$

7. INTERPOLACJA I APROKSYMACJA



$$\varepsilon(\mathbf{x}_i) = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

Interpolacja



$$\min_{\mathbf{a}} \|\varepsilon\| \rightarrow \mathbf{a}$$

Aproksymacja

$$f(\mathbf{x}) \approx g(\mathbf{x}) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_m \varphi_m(x) = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi} \equiv P_n(\mathbf{x})$$

gdzie:

$\mathbf{a} = \{a_1 \dots a_n\}$ - niewiadome współczynniki aproksymacji

$\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1(\mathbf{x}) \dots \varphi_n(\mathbf{x})\}$ - funkcje bazowe

$\mathbf{x} = \{x^{(1)} \dots x^{(m)}\}$ - węzły aproksymacji

$\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - P_n(\mathbf{x})$ - błąd aproksymacji

7.1. Interpolacja

$$P_n(x_i) = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Dla bazy jednomianowej $(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$

$$f(x_i) = P_{n-1}(x_i) = [\varphi_1(x_i) \dots \varphi_n(x_i)] \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = a_1 + a_2 x_i + \dots + a_n x_i^{n-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \Phi \mathbf{a} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} = \Phi^{-1} \mathbf{F}$$

Φ – macierz Vandermonde'a

$$\det \Phi \neq 0$$

Interpolacja Lagrange'a

$$f(x_i) = P_n(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

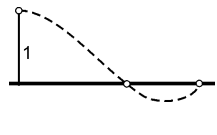
$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n L_j^{(n)}(x) f_j$$

$L_j^{(n)}$ – bazowe wielomiany Lagrange'a

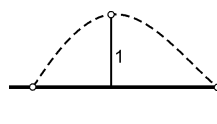
$$L_i^{(n)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$L_j^{(n)}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = i, \quad j = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{if } j \neq i, \quad i = 0, 1, \dots, n \end{cases}$$

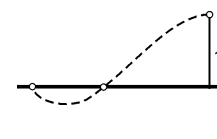
Dla $n = 2$ wielomiany Lagrange'a



$$L_0^{(2)}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$



$$L_1^{(2)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$



$$L_2^{(2)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

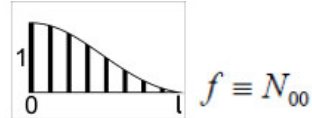
7.2. Interpolacja Hermite'a

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n f_j h_j(x) + \sum_{j=0}^n f'_j g_j(x)$$

$$h_j(x) = L_j^{(n)2}(x) \left[1 - 2(x - x_j) L_j^{(n)'}(x_j) \right] \quad g_j(x) = (x - x_j) L_j^{(n)2}(x)$$

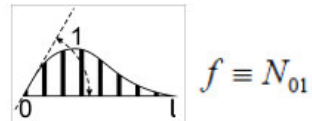
a) $f'(0) = f'(l) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f(l) = 0$

$$N_{00} = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \left(l + 2\frac{x}{l}\right)$$



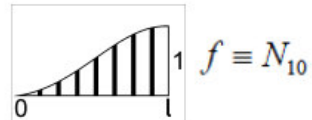
b) $f'(0) = 1, \quad f'(l) = 0, \quad f(0) = f(l) = 0$

$$N_{01} = x \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$$



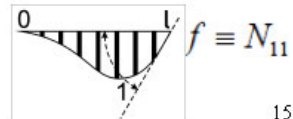
c) $f'(0) = f'(l) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(l) = 1$

$$N_{10} = \left(\frac{x}{l}\right)^2 \left(3 - 2\frac{x}{l}\right)$$



d) $f'(0) = 0, \quad f'(l) = 1, \quad f(0) = f(l) = 0$

$$N_{11} = (x - l) \left(\frac{x}{l}\right)^2$$



15

7.3. Najlepsza aproksymacja

$$f(\mathbf{x}) \approx P_n(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv f - P_n$$

Poszukiwane są współczynniki \mathbf{a} dla których $\min_{\mathbf{a}} \|\boldsymbol{\varepsilon}\| = \min_{\mathbf{a}} \|f - P_n\|$

Przykład

Znaleźć najlepszą liniową aproksymację dla funkcji danej w postaci zbioru punktów: $\{(1, 0), (2, 2), (3, 1), (4, 3)\}$

1 sposób

Nadokreślony układ równań $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{f}$

$$\text{macierz } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{wektor } \mathbf{f} = [0 \quad 2 \quad 1 \quad 3]$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{f} = [6 \quad 19]$$

Rozwiązujemy układ równań 2x2

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) * \mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{f} \quad \mathbf{C} = [-0.5, 0.8] \text{ - współczynniki aproksymacji}$$

Rozwiązanie $P(x) = -0.5 + 0.8x$

2 sposób

$$P(x) = a_0 + a_1x$$

$$I \equiv \|\varepsilon\|_2^2 = \sum_{i=0}^3 (f_i - P(x_i))^2 = (0 - a_0 - a_1)^2 + (2 - a_0 - 2a_1)^2 + (1 - a_0 - 3a_1)^2 + (3 - a_0 - 4a_1)^2$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = 2[-1(0 - a_0 - a_1) - (2 - a_0 - 2a_1) - a_0(1 - a_0 - 3a_1) - a_0(3 - a_0 - 4a_1)] = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 2[-1(0 - a_0 - a_1) - 2(2 - a_0 - 2a_1) - 3(1 - a_0 - 3a_1) - 4(3 - a_0 - 4a_1)] = 0 \rightarrow a_0 = -0.5; \quad a_1 = 0.8$$

Rozwiązanie $P(x) = -0.5 + 0.8x$