MATEMATYKA STOSOWANA I METODY NUMERYCZNE

Wybrane z wykładów – część 2

1. CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

Metody całkowania numerycznego:

–wzory Newtona–Cotesa

$x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h = \text{const}$

bazują na interpolacji wielomianowej

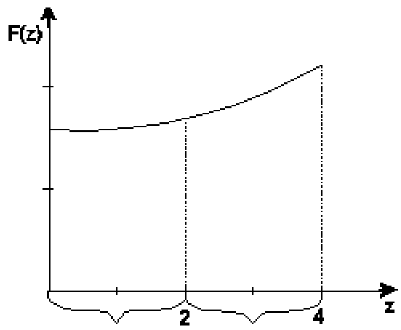
–kwadratura Gaussa

optymalnie dobrane x_i (najlepsza dokładność)

bazuje na wielomianach ortogonalnych

całki osobliwe

Składanie wzorów



$$\int_0^4 \ldots dz = \int_0^2 \ldots dz + \int_2^4 \ldots dz$$

wzór prostokątów $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f_i$

wzór trapezów $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{1}{2}(f_0 + f_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right]$

$f_0 = f(a)$, $f_n = f(b)$

wzór Simpsona $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + f_{2n} + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} + 4\sum_{i=0}^{n-1} f_{2i+1}\right]$

$f_0 = f(a)$, $f_{2n} = f(b)$, $h = x_{i+1} - x_i$

- We wzorze Simpson'a liczba węzłów n powinna być nieparzysta

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \qquad \text{wzór 1/3}$$

- Jeżeli ten warunek nie jest spełniony, dla pierwszych lub ostatnich 4-ch węzłów stosowany jest wzór Simpson'a tzw. 3/8

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \qquad \text{wzór 3/8}$$

oraz klasyczny wzór 1/3 dla pozostałych przedziałów

Kwadratury Gaussa

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

W kwadraturach Gaussa węzły x_i oraz wagi w_i są dobierany w taki sposób, by dokładnie obliczyć całkę funkcji stopnia 2n-1 lub niższego

$$I = \int_a^b F(z)dz$$

Przejście pomiędzy przedziałem [a, b] a przedziałem [-1, 1] (zmiana zmiennych całkowania)

$$x = \frac{2z-a-b}{b-a} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{b-a}{2}\,x + \frac{a+b}{2}$$

$$\int_a^b F(z)\,dz \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Dwupunktowa kwadratura $\quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad w_{1,2} = 1$

Trzypunktowa kwadratura $\quad x_{1,2,3} = -\sqrt{\frac{3}{5}},\ 0,\ \sqrt{\frac{3}{5}} \qquad w_{1,2,3} = \frac{5}{9},\ \frac{8}{9},\ \frac{5}{9}$

Przykład:

Obliczyć całkę stosując dwupunktową i trzypunktową kwadraturę Gaussa:

$$I = \int_0^{1/2} \sqrt{1+z}\,dz = \frac{2}{3}(1+z)^{3/2}\Big|_0^{1/2} = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \text{-}1\right] = 0.5580782$$

Przejście pomiędzy przedziałami

$$z = \frac{0.5-0}{2}x + \frac{0+0.5}{2} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$I = \frac{0.5-0}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1.25+0.25x}\,dx \quad \rightarrow \quad f(x) = \sqrt{1.25+0.25x}$$

$$\tilde{I} = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n} w_i\sqrt{1.25+0.25x_i}, \qquad n = 2, 3$$

- Wzór dwupunktowy (n = 2):

$$\tilde{I} = \frac{1}{4}\sqrt{1.25-0.25\cdot 1/\sqrt{3}} + \frac{1}{4}\sqrt{1.25+0.25\cdot 1/\sqrt{3}} = 0.55808$$

$$\frac{I-\tilde{I}}{I} = \left|\frac{0.5580782\text{-}0.5580814}{0.5580782}\right| = 5.734\times10^{-6} \approx 0.0006\%$$

- Wzór trzypunktowy (n = 3):

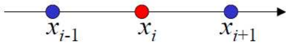
$$\tilde{I} = \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{9}\sqrt{1.25-0.25\cdot\sqrt{3/5}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{9}\sqrt{1.25+0.25\cdot\sqrt{3/5}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{9}\sqrt{1.25-0.25\cdot 0} = 0.558078$$

$$\frac{I-\tilde{I}}{I} = \left|\frac{0.5580782\text{-}0.5580782}{0.5580782}\right| = 0 \qquad \frac{I-\tilde{I}}{I} = 3.14\times10^{-8}$$

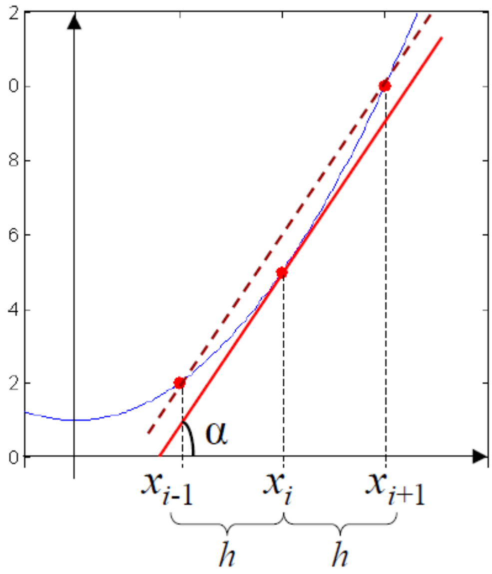
2. Różniczkowanie numeryczne

Pierwsza pochodna:

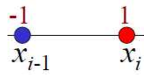
$$f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad \text{– wzór centralny}$$



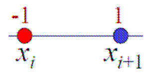
gwiazda różnicowa



$$f_i' \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad \text{– wzór wstecz}$$



$$f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad \text{– wzór wprzód}$$



Druga pochodna

$$f_i'' \approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$$

<u>Wyprowadzenie z rozwinięcia w szereg Taylora:</u>

$$f_{i+1} = f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \frac{h^3}{6} f_i''' + \ldots$$

Pierwsza pochodna

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \frac{h^3}{6} f_i''' + \ldots$$

$-$

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' - \frac{h^3}{6} f_i''' + \ldots$$

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf_i' + \underbrace{\frac{2h^3}{6} f_i''' + \ldots}_{\text{błąd}} \quad \Longrightarrow \quad f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

Druga pochodna

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \frac{h^3}{6} f_i''' + \ldots$$

$+$

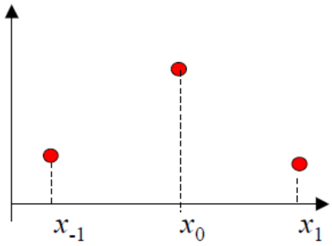
$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' - \frac{h^3}{6} f_i''' + \ldots$$

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2 f_i'' + O(h^4) \quad \Longrightarrow \quad f_i'' \approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$$

Wyprowadzenie z interpolacji Lagranga:

$$\tilde{f} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_{-1} - x_0)(x_{-1} - x_1)} f_{-1} + \frac{(x - x_{-1})(x - x_1)}{(x_0 - x_{-1})(x_0 - x_1)} f_0 + \frac{(x - x_{-1})(x - x_0)}{(x_1 - x_{-1})(x_1 - x_0)} f_1$$

$$x_1 - x_0 = h, \qquad x_{-1} - x_0 = -h$$



$$\tilde{f} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2} f_{-1} + \frac{(x - x_{-1})(x - x_1)}{-h^2} f_0 + \frac{(x - x_{-1})(x - x_0)}{2h^2} f_1$$

$$\tilde{f}' = \frac{f_{-1}}{2h^2}(x - x_1 + x - x_0) - \frac{f_0}{h^2}(x - x_1 + x - x_{-1}) + \frac{f_1}{2h^2}(x - x_0 + x - x_{-1})$$

$$x = x_0$$

$$\tilde{f}'' = \frac{f_{-1}}{2h^2} \cdot 2 - \frac{f_0}{h^2} \cdot 2 + \frac{f_1}{2h^2} \cdot 2$$

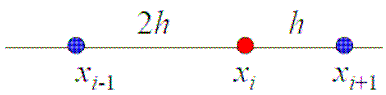
$$\boxed{f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}} \qquad \boxed{f_i'' \approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}}$$

Metoda współczynników nieoznaczonych

Przykład

Dla danej gwiazdy wyprowadzić operator różnicowy w postaci

$$f'(x_i) = \alpha f_{i-1} + \beta f_i + \gamma f_{i+1}$$



Znaleźć

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \quad \text{przy} \quad x_{i+1} = x_i + h \quad x_{i-1} = x_i - 2h$$

- Rozwijamy w szereg Taylora

$$\begin{array}{llll} f_{i-1} = f(x_i - 2h) & = & f_i - 2hf_i' + \frac{4}{2}h^2 f_i'' - \frac{8}{6}h^3 f_i''' + \cdots & |\alpha \\ f_i \quad = & = & f_i & |\beta \\ f_{i+1} = f(x_i + h) & = & f_i + hf_i' + \frac{1}{2}h^2 f_i'' + \frac{1}{6}h^3 f_i''' + \cdots & |\gamma \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} f & \alpha + \beta + \gamma \\ f' & -2h\alpha + h\gamma \\ f'' & 2h^2\alpha + \frac{h^2}{2}\gamma \\ f''' & \frac{-4}{3}h^3\alpha + \frac{h^3}{6}\gamma \end{array}$$

$$0f_i + 1f_i' + 0f_i'' + \ldots = f_i \overbrace{(\alpha + \beta + \gamma)}^{=0} + f_i' \overbrace{(-2h\alpha + h\gamma)}^{=1} +$$

$$+ f_i'' h^2 \overbrace{(2\alpha + 1/2\gamma)}^{=0} + f_i''' \frac{1}{6} h^3 \overbrace{(-8\alpha + \gamma)}^{=R} + \cdots$$

$$0f_i + 1f_i' + 0f_i'' + \ldots = f_i\overbrace{(\alpha+\beta+\gamma)}^{=0} + f_i'\overbrace{(-2h\alpha+h\gamma)}^{=1} +$$

$$+ f_i'' h^2 \overbrace{(2\alpha + 1/2\gamma)}^{=0} + f_i''' \frac{1}{6}h^3\overbrace{(-8\alpha+\gamma)}^{=R} + \cdots$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ -2h\alpha + h\gamma = 1 \\ 2\alpha + 1/2\gamma = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{6h} \\ \beta = -\dfrac{3}{6h} \\ \gamma = \dfrac{4}{6h} \end{cases} \qquad f_i' \approx \frac{1}{h}\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \end{bmatrix}$$

$$f'(x_i) = \frac{4f_{i+1} - 3f_i - f_{i-1}}{6h} + \frac{h^3}{6}f_i''' + \cdots \equiv \frac{4f_{i+1} - 3f_i - f_{i-1}}{6h} + O\left(h^2\right)$$

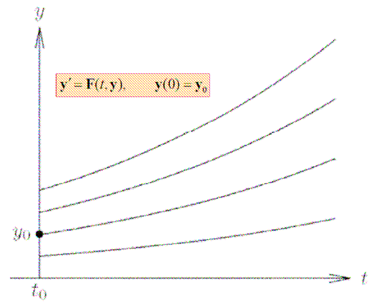
3. ZAGADNIENIA POCZĄTKOWE

Twierdzenie Picarda:

- Jeżeli
  - $f(x, y)$ – ciągła w obszarze $a \le x \le b$, $-\infty < y < \infty$;
  - $\exists$ $L>0$: $|f(x, y1) - f(x, y2)| < L|y1 - y2|$ $\forall (x, y1), (x, y2)$

    (spełnia warunek Lipszitza)
- $\exists!$ rozwiązanie $y(x)$ zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$



Każdy problem początkowy można zapisać w postaci:

$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$, $\qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$

$\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $\qquad \mathbf{F} = \{y_2, y_3, \ldots, y_n, f(x, \mathbf{y})\}$

Równania wyższych rzędów sprowadza się do równania rzędu pierwszego

Przykład

Problem początkowy 2-go rzędu

$Ay'' + By' + C = 0$, $\qquad y(0) = y_0$, $\qquad y'(0) = v_0$

Dwa problemy początkowe 1-go rzędu

- $y' = z \qquad y(0) = y_0$,
- $Az' + Bz + C = 0$, $\qquad z(0) = v_0$

Metoda Eulera

$y_{n+1} = y_n + hf_n$

Metoda Runge-Kutty

wzór II rzędu

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$K_2 = hf(x_n, y_n + K_1)\,, \qquad \text{lub w postaci} \qquad K_2 = h\,f\,(x_n + h,\; y_n + K_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

wzór IV rzędu

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$K_2 = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}K_1)$$

$$K_3 = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}K_2)$$

$$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Metoda jest jawna (explicit, otwarta) jeżeli przy obliczeniu y_{n+1} wykorzystujemy poprzednie f_n

Niejawna (implicit, zamknięta) – przy wykorzystaniu f_{n+1}

Metoda jednokrokowa – zależy od jednego f_n

wielokrokowa – od wielu f_n, f_{n-1}...

Przykład

$$\frac{dy}{dt} = -y^2 \qquad y(0) = 1$$

R-K II:

$$K_1 = 0.1\cdot\left(-1^2\right) = -0.1$$

$$y_1^0 = y_0 + K_1 = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$K_2 = 0.1\cdot\left(-0.9^2\right) = -0.081$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2}(-0.1 - 0.081) = 0.9095$$

Rozwiązanie dokładne:

$$y_1 = 1/(1+0.1) = 0.9090909$$

R-K IV:

$$K_1 = 0.1\cdot\left(-1^2\right) = -0.1$$

$$y_1^0 = y_0 + 0.5K_1 = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$K_2 = 0.1\cdot\left(-0.95^2\right) = -0.09$$

$$y_1^1 = y_0 + 0.5K_2 = 0.955$$

$$K_3 = 0.1\cdot\left(-0.955^2\right) = -0.091$$

$$y_1^2 = y_0 + K_3 = 0.909$$

$$K_4 = 0.1\cdot\left(-0.909^2\right) = -0.083$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) = 0.9090912$$

Metody wielokrokowe

Wzory *Adamsa – Bashfortha* (jawne, otwarte, explicit)

trzykrokowy: $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left[23 f_n - 16 f_{n-1} + 5 f_{n-2}\right]$$

Współczynniki wzorów explicit (*1/*h*)

n \ k	0	1	2	3
0	1	-	-	-
1	3/2	- 1/2	-	-
2	23/12	-16/12	5/12	-
3	55/24	-59/24	37/24	-9/24

Wzory *Adamsa – Moultona* (niejawne, zamknięte, implicit)

trzykrokowy: $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left(5 f_{n+1} + 8 f_n - f_{n-1}\right)$$

Współczynniki wzorów implicit (*1/*h*)

n \ k	0	1	2	3
0	1	-	-	-
1	1/2	1/2	-	-
2	5/12	8/12	-1/12	-
3	9/24	19/24	-5/24	1/24

Metoda predyktor-korektor

Algorytm iteracyjny:

- Wartości startowe $y_1,\ y_2 \ldots\ y_m$ znajdujemy metodą jednokrokową (Eulera, *Runge-Kutta*)
- Wstępnie szacujemy $y_{m+1}{}^0$ metodą wielokrokową *otwartą* (explicit) m-go rzędu
- Obliczamy $f_{m+1}{}^0 = f(x_{m+1}, y_{m+1}{}^0)$, następnie stosując metodę wielokrokową *zamkniętą* (implicit) m-go rzędu znajdujemy $y_{m+1}{}^1$
- Powtarzamy iteracje metodą zamkniętą aż do osiągnięcia żądanej dokładności $\left|y_{m+1}^k - y_{m+1}^{k-1}\right| / \left|y_{m+1}^k\right| < \varepsilon \qquad y_{m+1}{}^k \approx y_{m+1}$

Wzory Adamsa predyktor – korektor

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$

Rząd wzoru	Predyktor Δy_n	Korektor Δy_n
2	$\frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$	$\frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$
3	$\frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$	$\frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$
4	$\frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$	$\frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$

Przykład

$$\frac{dy}{dt} = -y^2 \qquad y(0) = 1$$

Rozwiązanie przybliżone: Rozwiązanie przybliżone:

$$y_{n+1} = y_n + h\, f_n$$

Krok $h = 0.1$	Krok $h = 0.05$
$y_1 = 1 + 0.1\ (-1^2) = 0.9$	$y_2 = 1 + 0.1\ (-1^2) = 0.905$
$y_2 = 0.9 + 0.1\ (-0.9^2) = 0.819$	$y_4 = 0.9 + 0.1\ (-0.9^2) = 0.827$
....	....
$y_{10} = 0.4627810$	$y_{20} = 0.4911049$

Błąd:
$$\frac{0.4911049 - 0.4627810}{0.4911049} = 0.057674$$

4. Podstawy Metody Różnic Skończonych

MRS jest ogólną metodą analizy numerycznej, którą stosujemy do rozwiązania problemów brzegowych.

Procedura postępowania w MRS:

1. Sformułowanie problemu brzegowego
2. Dyskretyzacja obszaru
3. Optymalny dobór *gwiazd* różnicowych
4. Generacja wzorów (operatorów) różnicowych
5. Generacja *równań różnicowych*
6. Dyskretyzacja różnicowa *warunków brzegowych*
7. Rozwiązanie *układu równań* różnicowych
8. Postprocessing

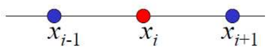
Sformułowanie problemu brzegowego

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad \text{lub} \quad \begin{matrix} y'(a) = \alpha, \\ y'(b) = \beta \end{matrix}$$

Dyskretyzacja obszaru:

generacja siatki (zbioru węzłów);

Optymalny dobór *gwiazd* różnicowych

np. trzywęzłowa gwiazda 

Wzory (operatory) różnicowe

dla 3-ch węzłów $\quad f_i' \approx \dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \qquad f_i'' \approx \dfrac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$

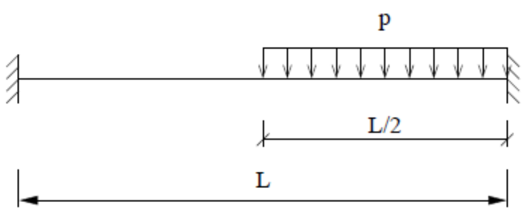
dla 5-ciu węzłów

$$f' \;=\; [\,1\;\; -8\;\; 0\;\; 8\;\; -1\,]\; / \;(12h)\; * \boldsymbol{f}$$
$$f'' \;=\; [-1\;\; 16\;\; -30\;\; 16\;\; -1\,]\; / \;(12h^2)\; * \boldsymbol{f}$$
$$f''' \;=\; [-1\;\; 2\;\; 0\;\; -2\;\; 1\,]\; / \;(2h^3)\; * \boldsymbol{f}$$
$$f^{IV} \;=\; [\,1\;\; -4\;\; 6\;\; -4\;\; 1\,]\; / \;h^4\; * \boldsymbol{f}$$

Przykład

Znaleźć ugięcia w belki jednoprzęsłowej

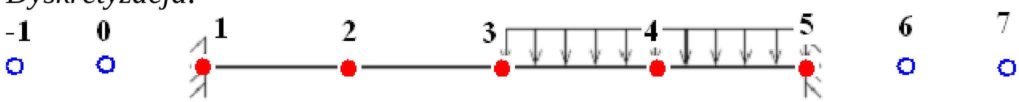
$EI \dfrac{d^4 w}{dx^4} = p$ z odpowiednimi warunkami brzegowymi dla $p \in C^0(0, L)$ i $EI = const$



$EI = 1, \qquad p = 10$

warunki brzegowe: $u(0)=0$; $u'(0)=0$; $u(\mathrm{L})=0$; $u'(\mathrm{L})=0$;

Dyskretyzacja:



5 węzłów podstawowych belki oraz po 2 węzły fikcyjne z każdej strony (ponieważ w war. brzegowych występują pochodne i chcemy zastosować 5-cio węzłowe wzory różnicowe)

Potrzebne w danym zadaniu *5-cio węzłowe wzory różnicowe* (dla pierwszej i czwartej pochodnych)

$$y^{IV}{}_i = \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{h^4}$$

$$y_i' = \frac{y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2}}{12h}$$

Zapisujemy równania w *każdym węźle belki* (kollokacja):

1 węzeł (x=0)

1 war.brz. $u_1 = 0$

2 war.brz. $u_1' = \dfrac{u_{-1} - 8u_0 + 8u_2 - u_3}{12h} = 0$

równ.główne $u^{IV}{}_1 = \dfrac{u_{-1} - 4u_0 + 6u_1 - 4u_2 + u_3}{h^4} = 0 \quad (p = 0 \quad w \quad węzle 1)$

2 węzeł (równ.główne)

$$u^{IV}{}_2 = \frac{u_0 - 4u_1 + 6u_2 - 4u_3 + u_4}{h^4} = 0$$

3 węzeł (równ.główne)

$$u^{IV}{}_3 = \frac{u_1 - 4u_2 + 6u_3 - 4u_4 + u_5}{h^4} = 5 \quad (p = 10/2 \quad w\ węzle 3\ na\ granicy\ obciążenia)$$

4 węzeł (równ.główne)

$$u^{IV}{}_4 = \frac{u_2 - 4u_3 + 6u_4 - 4u_5 + u_6}{h^4} = 10$$

5 węzeł (x=L)

równ.główne $u^{IV}{}_5 = \dfrac{u_3 - 4u_4 + 6u_5 - 4u_6 + u_7}{h^4} = 10$

3 war.brz. $u_5 = 0$

4 war.brz. $u_5' = \dfrac{u_3 - 8u_4 + 8u_6 - u_7}{12h} = 0$

Rozwiązujemy uzyskany układ równań

$$\begin{array}{c} \\ \cdots/12h \\ \cdots/h^4 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -8 & 0 & 8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} u_{-1} \\ u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$