MES jako metoda Galerkina na przykładzie osiowej deformacji pręta

Wykład 1 z MKwIL, kierunek *Budownictwo*

Jerzy Pamin

e-mail: Jerzy.Pamin@pk.edu.pl

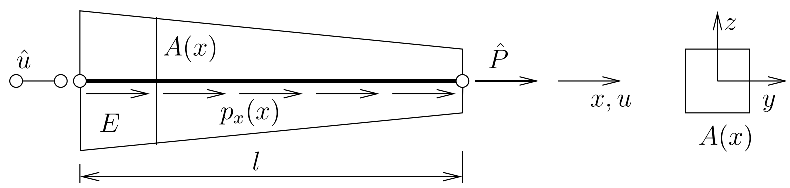
Katedra Technologii Informatycznych w Inżynierii

Politechnika Krakowska

Podziękowania dla W. Cecota

Model fizyczny 1D - pręt o zmiennym przekroju

Pręt z obciążeniem rozłożonym – problem brzegowy



Założenia: mat. Hooke'a, lin. równ. kinemat., siły tylko wzdłuż x

(1) Równowaga $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} \equiv N' = -p_x$

(2) Kinematyka $\epsilon_0 = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \equiv u'$

(3) Fizyka $N = EA\epsilon_0$

Podstawiając (3)→(2):

(4) Siła-przem. $N = EAu'$

Podstawiając (4)→(1):

Model lokalny: $\boxed{(EAu')' = -p_x}$

Dwa warunki brzegowe: podstawowe albo podstawowy i naturalny

Dla $x = 0$: $u(0) = \hat{u}_0$ albo $EA(0)u'(0) = \hat{P}_0$

Dla $x = l$: $u(l) = \hat{u}_l$ albo $EA(l)u'(l) = \hat{P}_l$

W.b. może być jednorodny lub niejednorodny

Np. $\boxed{u(0) = \hat{u} \quad \text{i} \quad EA(l)u'(l) = \hat{P}}$

Metoda residuów ważonych

W MES punktem wyjścia jest model globalny. Zasada prac wirtualnych lub minimum całkowitej energii potencjalnej generują modele globalne. Jeśli znany jest model lokalny, można zastosować tzw. metodę residuów ważonych.

Równoważny model globalny

Zapisujemy równanie różniczkowe jako warunek zerowania residuum

$$R(x) = (EAu')' + p_x = 0$$

Poszukujemy rozwiązania przybliżonego $\tilde{u}$ dla którego

$$R(x) = (EA\tilde{u}')' + p_x \neq 0$$

W metodzie residuów ważonych żądamy, aby

$$\int_0^l w(x)R(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \forall w \neq 0$$

Warunki brzegowe muszą być spełnione

Metoda residuów ważonych

Słabe (globalne) sformułowanie

Podstawiamy za residuum

$$\int_0^l w\,(EAu')'\mathrm{d}x + \int_0^l w\,p_x\mathrm{d}x = 0 \quad \forall w$$

Całkujemy przez części aby obniżyć wymagania odnośnie ciągłości

$$-\int_0^l w'\,EAu'\mathrm{d}x + [w\,EAu']_0^l + \int_0^l w\,p_x\mathrm{d}x = 0 \quad \forall w$$

Naturalny w.b. jest wprowadzany do członu brzegowego, zakładamy, że funkcja wagowa spełnia jednorodny podstawowy w.b. $w(0) = 0$

$$\int_0^l w'\,EAu'\mathrm{d}x = \int_0^l w\,p_x\mathrm{d}x + w(l)\hat{P}$$

Podstawowy warunek brzegowy należy spełnić
Dopuszczalna jest aproksymacja funkcją o ciągłości C^0
Macierz sztywności jest symetryczna

Metoda residuów ważonych

Zasada prac wirtualnych

Słaba forma równania MRW

$$\int_0^l w' \, EAu' \mathrm{d}x = \int_0^l w \, p_x \mathrm{d}x + [w \, EAu']_0^l \quad \forall w$$

Funkcja wagowa jest interpretowana jako wariacja przemieszczenia podłużnego δu

$$\int_0^l \delta u' \, EAu' \mathrm{d}x = \int_0^l \delta u \, p_x \mathrm{d}x + [\delta u \, EAu']_0^l \quad \forall \delta u$$

Przepisujemy w postaci zasady prac wirtualnych

$$\int_0^l \delta\epsilon_0 \, N \mathrm{d}x = \int_0^l \delta u \, p_x \mathrm{d}x + [\delta u \, N]_0^l \, , \quad \delta W_{\mathrm{int}} = \delta W_{\mathrm{ext}} \quad \forall \delta u$$

Przemieszczenie wirtualne δu spełnia jednorodne podstawowe warunki brzegowe (jest kinematycznie dopuszczalne).

Rozwiązanie przybliżone

Metoda Bubnowa-Galerkina

Słabe sformułowanie problemu brzegowego

$$\int_0^l w' \, EAu' \mathrm{d}x = [w \, EAu']_0^l + \int_0^l w \, p_x \mathrm{d}x \quad \forall w \quad \text{plus podst. w.b.}$$

Załóżmy aproksymację globalną $\tilde{u}$ w postaci

$$\tilde{u} = \hat{u} + \sum_{i=1}^{n} \phi_i d_i = \hat{u} + \phi \mathbf{d}$$

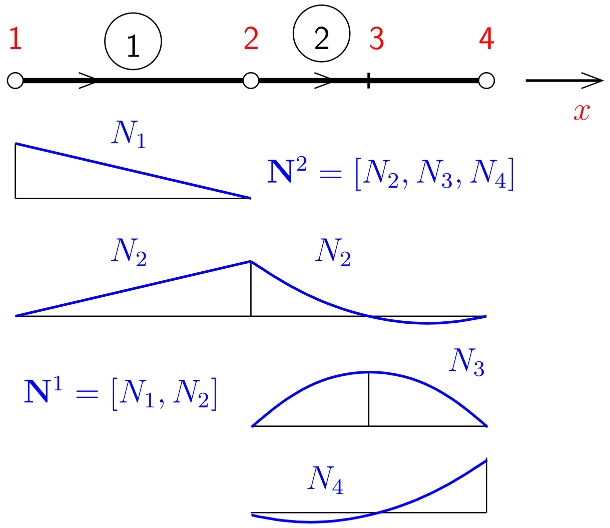
$$\phi = [\phi_1, \ldots, \phi_n] \, , \mathbf{d} = \{d_1, \ldots d_n\}$$

$\phi_i, i = 1 \ldots n$ – (znane, liniowo niezależne) funkcje bazowe, spełniające jednorodne podstawowe w.b., d_i – (nieznane) współczynniki
Uwaga: $\hat{u}$ odpowiada za spełnienie niejednorodnych podstawowych w.b.
Metoda Galerkina: podstawiamy aproksymację do równania całkowego, funkcje bazowe ϕ_i są używane jako funkcje wagowe w n kolejnych równaniach.
Otrzymujemy układ n równań algebraicznych o n niewiadomych d_i

$$\boxed{\mathbf{Kd} = \mathbf{f}}$$

Metoda elementów skończonych

Aproksymacja prostymi funkcjami w podprzedziałach



Aproksymacja w elemencie $\quad u^e = \mathbf{N}^e\mathbf{d}^e\,, \qquad \mathbf{N}'^e = \mathbf{B}^e$

Aproksymacja globalna (sklejana) $\quad u = \mathbf{N}\mathbf{d}\,, \qquad \mathbf{N}' = \mathbf{B}$

Uwaga: (niejednorodne) podstawowe warunki brzegowe uwzględniane w układzie równań po agregacji elementów

Algorytm MES

Dyskretyzacja, agregacja, rozwiązanie, postprocessing

Interpolacja w elemencie

$$\int_0^{l^e} \mathbf{B}^{e\mathrm{T}} EA\mathbf{B}^e \mathrm{d}x^e \; \mathbf{d}^e = \int_0^{l^e} \mathbf{N}^{e\mathrm{T}} p_x \mathrm{d}x^e \quad \rightarrow \quad \mathbf{K}^e\mathbf{d}^e = \mathbf{f}^e$$

Plus agregacja macierzy elementowych i obciążenia brzegowe

Równoważnie aproksymacja globalna

$$\int_0^{l} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} EA\mathbf{B} \mathrm{d}x \; \mathbf{d} = \int_0^{l} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} p_x \mathrm{d}x + \mathbf{N}(l)\hat{P} \quad \rightarrow \quad \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}$$

Uwzględnienie podstawowych warunków brzegowych (np. $d_1 = \hat{u}$)

$$\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{f}} \rightarrow \hat{\mathbf{d}} \rightarrow \mathbf{d}$$

Powrót do elementu

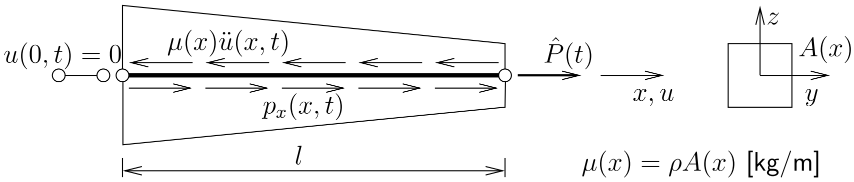
$$\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{d}^e \rightarrow u^e = \mathbf{N}^e\mathbf{d}^e\,, u'^e = \mathbf{B}^e\mathbf{d}^e \rightarrow N = EAu'^e$$

Uwaga: konflikt oznaczeń N siła podłużna, N_i funkcja kształtu

MKwIL, Budownictwo II st.

Model fizyczny 1D - pręt o zmiennym przekroju

Drgania podłużne pręta – problem początkowo-brzegowy



Założenia: pominięto siły tłumienia, jednorodny kin. w.b. $u(0) = 0$

Poszukiwana funkcja drgań $u(x,t)$, $t \in [0, \tau]$

Prędkość $v(x,t) = \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, przyspieszenie $a(x,t) = \ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Sformułowanie mocne (lokalne)

Równanie równowagi dynamicznej: $\rho A \ddot{u} - (EAu')' = p_x \quad x \in (0, l)$

Warunki brzegowe:	Warunki początkowe:
$u(0,t) = 0$	$u(x,0) = 0$
$EA(l)u'(l,t) = \hat{P}(t)$	$\dot{u}(x,0) = 0$

Sformułowanie słabe (globalne)

$$\int_0^l w\, \rho A \ddot{u}\, \mathrm{d}x + \int_0^l w'\, EA\, u' \mathrm{d}x = \int_0^l w\, p_x\, \mathrm{d}x + w(l)\hat{P} \quad \forall w\,, \forall t \in [0, \tau]$$

Drgania podłużne pręta

Cząstki materii drgają w kierunku propagacji fali podłużnej.

Trzy typy problemów dynamicznych:

1. Drgania własne (harmoniczne)
2. Drgania wymuszone (np. periodyczne)
3. Propagacja fali (podłużnej)

Rozwiązanie analityczne problemu drgań własnych (zał. $A = 1$):

$$\begin{array}{lll} \rho \ddot{u} - E u'' = 0 & \forall x \in (0,l), \forall t \in [0,\tau] & \text{(równanie struny)} \\ u(0,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] & \\ u'(l,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] & \end{array}$$

Separacja zmiennych:

$$u(x,t) = U(x)V(t)$$

Dwa równania różniczkowe zwyczajne:

$$\begin{array}{ll} \ddot{V} + \omega_n^2 V = 0 & \omega_n\text{– częstość kołowa} \\ U'' + k_n^2 U = 0 & k_n\text{– liczba falowa} \end{array}$$

Rozwiązanie ogólne ma formę:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right] \left[(C_n \cos(k_n x) + D_n \sin(k_n x)\right]$$

Drgania podłużne pręta

Rozwiązanie analityczne problemu drgań własnych (c.d.)

Parametry fali:

$$k = \frac{\omega}{c}\,, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}\,, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = cT\,, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

f - częstotliwość [Hz], T - okres [s], λ - długość fali [m], c - prędkość fali [m/s]

Złożenie fal harmonicznych:

$$k_n = \frac{\omega_n}{c}\,, \quad \omega_n = 2\pi f_n\,, \quad \omega_n T_n = 2\pi\,, \quad k_n\lambda_n = 2\pi\,, \quad \frac{\lambda_n}{T_n} = \frac{\omega_n}{k_n} = c$$

Podstawowy warunek brzegowy $u(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_n = 0$
Naturalny warunek brzegowy

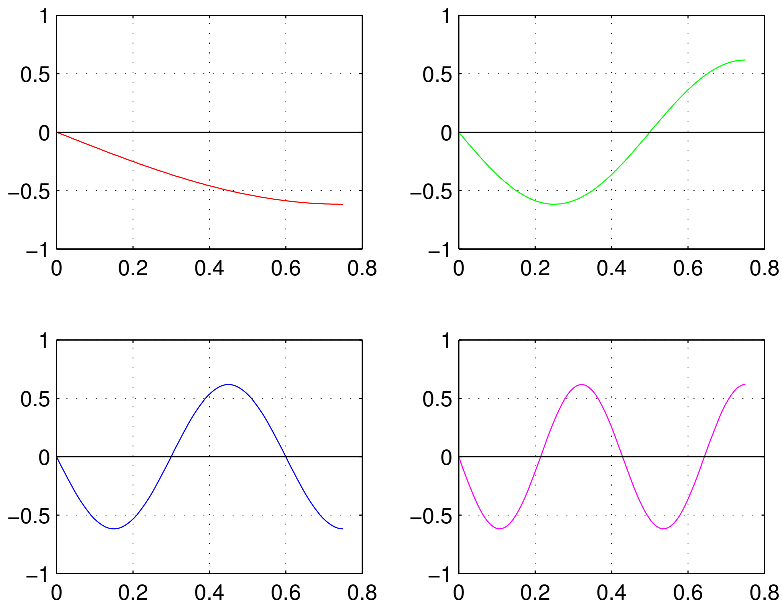
$$u'(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(k_n l) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_n l = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Rozwiązanie: spektrum częstości i formy drgań

$$\omega_n = (2n-1)\frac{\pi}{2l}c, \qquad U_n(x) = D_n \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2l}x\right]$$

Drgania swobodne podłużne pręta

Cztery pierwsze formy drgań



Rozwiązanie przybliżone MES

Aproksymacja globalna (sklejana z wielomianów Lagrange'a)

$$\tilde{u}(x,t) = N_1(x)d_1(t) + N_2(x)d_2(t) + \cdots + N_n(x)d_n(t) = \mathbf{N}(x)\mathbf{d}(t)$$

Po podstawieniu do równania całkowego (forma słaba)

$$\int_0^l \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\,\rho A \mathbf{N}\,\mathrm{d}x\,\ddot{\mathbf{d}} + \int_0^l \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,EA\,\mathbf{B}\mathrm{d}x\,\mathbf{d} = \int_0^l \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\,p_x\,\mathrm{d}x$$

$\mathbf{M} = \int_0^l \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\,\rho A \mathbf{N}\,\mathrm{d}x$ - macierz mas

Układ równań różniczkowych zwyczajnych (pominięte tłumienie)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{f}(t)$$

Uwzględnienie podstawowego warunku brzegowego ($\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{d}}\,, \mathbf{v} = \dot{\mathbf{d}}$)

$$\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{f}}$$

plus warunki poczatkowe $\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_0\,,\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, całkowanie po czasie

Rozwiązanie przybliżone MES

Problem własny

Znajdź wektor $\hat{\mathbf{d}} \neq \mathbf{0}$ taki, że

$$\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad \forall t \in [0,\tau]$$

Podstawiamy rozwiązanie harmoniczne

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{A}\sin(\omega t + \psi)$$

$$(-\omega^2\hat{\mathbf{M}}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{A})\sin(\omega t + \psi) = \mathbf{0} \quad \forall t \in [0,\tau]$$

Problem własny

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{A} = \omega^2\hat{\mathbf{M}}\mathbf{A}$$

Rozwiązanie: spektrum częstości $n << LSSU$ i formy drgań

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$$

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$$

Rozwiązanie przybliżone MES

Drgania podłużne wymuszone pręta

Równanie różniczkowe zwyczajne względem czasu

$$\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{f}}$$

Problem początkowy (całkowanie po czasie w ogólności)

$$\frac{dy}{dt} = f, \; y(t_0) = y_0$$

Dyskretyzacja w czasie - krok czasowy Δt

$$y(t_0 + \triangle t) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0+\triangle t} f \mathrm{d}t$$

Algorytm jawny (MRS) lub niejawny (różne warianty)

Np. metoda Newmarka ($\beta = 0.5, \; \gamma = 1$)

- Dane: $\hat{\mathbf{d}}_0, \; \hat{\mathbf{v}}_0$ dla $t = 0$, przyjęcie Δt
- Aproksymacja przyspieszenia w kolejnej chwili czasu $k+1$
  $\left[\hat{\mathbf{M}} + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\hat{\mathbf{K}}\right]\hat{\mathbf{a}}_{k+1} = \hat{\mathbf{f}}_{k+1} - \hat{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{d}}_k + \Delta t\hat{\mathbf{v}}_k) \; \rightarrow \; \hat{\mathbf{a}}_{k+1}$
- $\hat{\mathbf{d}}_{k+1} = \hat{\mathbf{d}}_k + \Delta t\hat{\mathbf{v}}_k + \frac{1}{2}\Delta t^2\hat{\mathbf{a}}_{k+1}$
- $\hat{\mathbf{v}}_{k+1} = \hat{\mathbf{v}}_k + \Delta t\hat{\mathbf{a}}_{k+1}$