

# MES w zagadnieniach ośrodka ciągłego 2D i 3D


Wykład 2 z MKwLL, kierunek *Budownictwo*

Jerzy Pamin i Piotr Pluciński

Katedra Technologii Informatycznych w Inżynierii  
Politechnika Krakowska

## Podziękowania:

T. Kolendowicz, C. Felippa  
ADINA R&D, Inc. [www.adina.com](http://www.adina.com)  
ALTAIR [www.altair.com](http://www.altair.com)  
ANSYS, Inc. [www.ansys.com](http://www.ansys.com)  
NIST [www.fire.nist.gov](http://www.fire.nist.gov)  
TNO DIANA [www.tnodiana.com](http://www.tnodiana.com)

MKwLL, Budownictwo II st. 

## Mechanika obliczeniowa (*computational mechanics*)

### Skala fizyczna

- ▶ Nanomechanika (fizyka cząstek elementarnych, chemia)
- ▶ Mikromechanika (fizyka kryształów, mikrostruktury)
- ▶ Mechanika kontinuum (założenie o ciągłości pól, homogenizacja, modele fenomenologiczne)
- ▶ Systemy mechaniczne (samoloty, mosty, roboty, silniki, ...)

### Mechanika kontinuum


- ▶ ciała stałe i konstrukcje z nich wykonane
- ▶ płyny (*CFD*)
- ▶ zadania sprzężone (*multiphysics*)

Fire Dynamics Simulator and Smokeview (FDS-SMV)

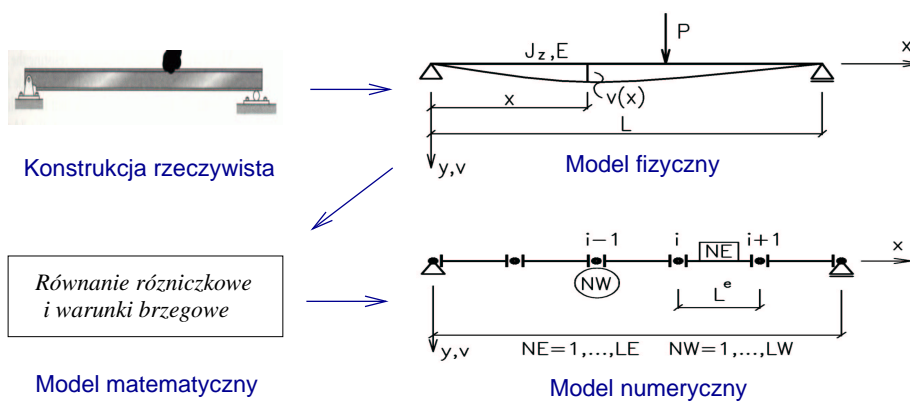
[Symulacja pożaru \(M. Kwapisz\)](#)

COVID-19 Simulation Solutions in Ansys

[Symulacja skutku kaszlu bez maski](#)

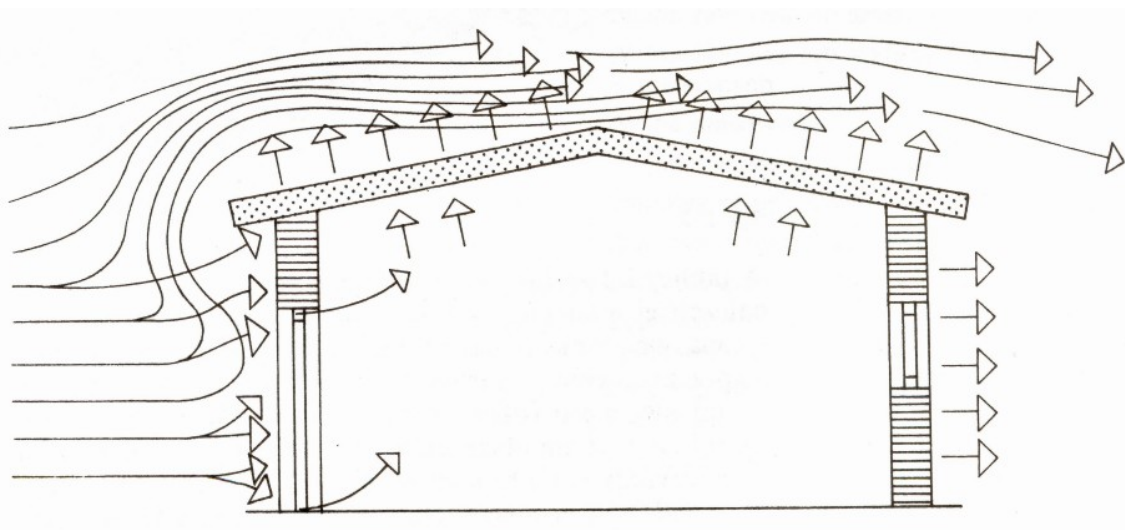
MKwLL, Budownictwo II st. 

## Proces modelowania



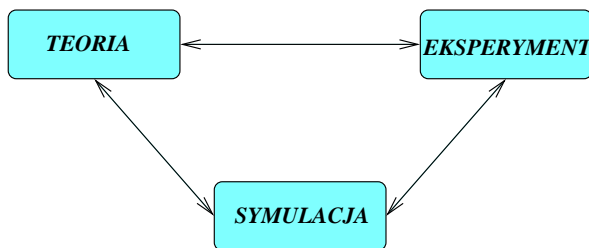
**Cel:** otrzymanie prostego modelu matematycznego, ujmującego najistotniejsze właściwości konstrukcji i jej zachowanie pod działaniem obciążeń, i dostosowanego do narzędzi obliczeniowych.

## Proces modelowania



Zbiór założeń: model konstrukcji, materiału, obciążenia  
 Model fizyczny: reprezentacja istotnych cech  
 Model matematyczny: zbiór równań (algebraicznych, różniczkowych, całkowych) + warunki graniczne (ograniczające)

# Dlaczego symulacje MES

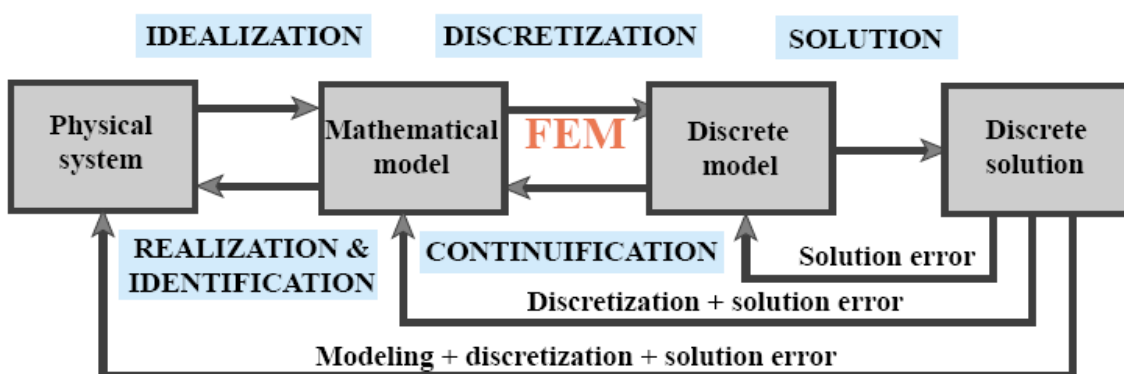


- ▶ Zastępują/wspomagają badania doświadczalne
- ▶ Zastępują/wspomagają metody analityczne
- ▶ **Nie zastępują modelowania**

Uwaga na ograniczenia elementów skończonych

- ▶ Różne rodzaje zjawiska blokady (nadsztywności)
- ▶ Więzy kinematyczne (np. nieściśliwość)
- ▶ Formy deformacji o zerowej energii
- ▶ Problemy źle postawione (np. dla materiału z osłabieniem)

# Błędy w modelowaniu MES

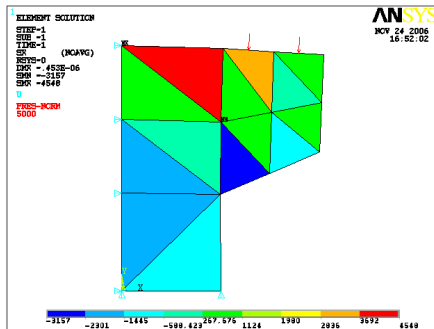


- ▶ Błąd modelowania
- ▶ Błąd dyskretyzacji
- ▶ Błąd rozwiązania

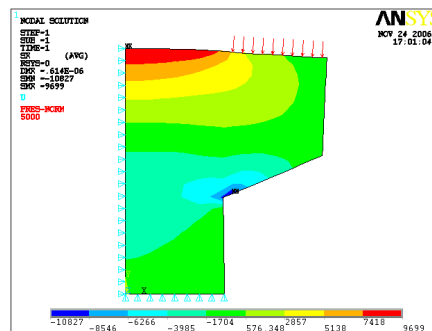
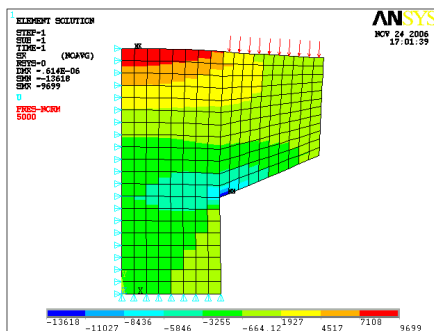
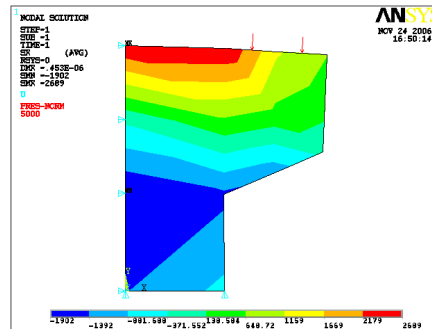
# Nieciągłość pochodnych

Mapy rozkładu  $\sigma_{xx}$

Bez wygładzania



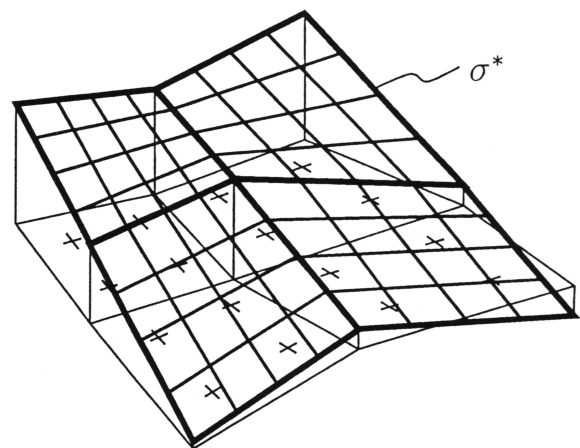
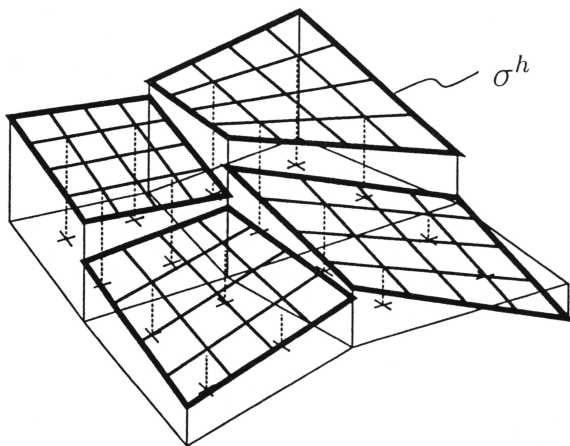
Z wygładzaniem



MKwL, Budownictwo II st.



# Wygładzanie wybranej wielkości



$\sigma^h$  – funkcja otrzymana z rozwiązania MES

$\sigma^*$  – funkcja po wygładzeniu

Różnica pomiędzy tymi dwoma polami jest wskaźnikiem błęd  
dyskretyzacji Zienkiewicza-Zhu

MKwL, Budownictwo II st.



# Modele fizyczne i matematyczne

## Zmiany w czasie:

- ▶ zagadnienia stacjonarne - niezależne od czasu (statyka)
- ▶ zagadnienia niestacjonarne - zależne od czasu (dynamika)

## Uproszczenia na podstawie hipotez:

- ▶ kinematycznych (geometrycznych), np. dominujące wymiary, rodzaj przekroju
- ▶ statycznych/dynamicznych - np. obciążenia wolno- lub szybkozmiennie, obciążenia działające w jednej płaszczyźnie

## Modele matematyczne są:

- ▶ liniowe (małe deformacje i prawo Hooke'a)  
→ obowiązuje zasada superpozycji
- ▶ nieliniowe

# Klasyfikacja modeli i elementów skończonych

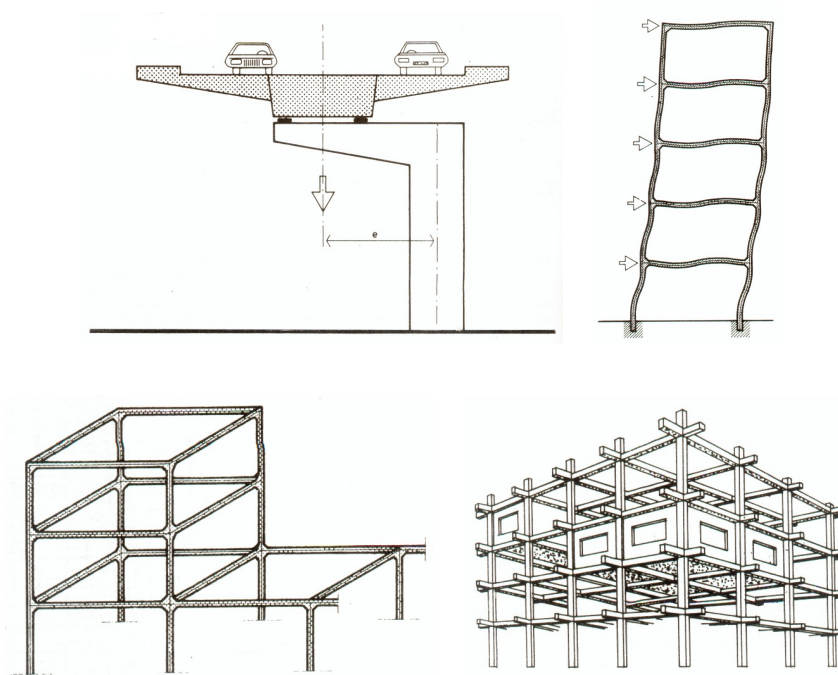
## Obniżenie wymiarowości:

- ▶ ustroje prętowe (geometrycznie jednowymiarowe)
- ▶ ustroje powierzchniowe (dwuwymiarowe)
- ▶ ustroje bryłowe (trójwymiarowe)


## Elementy skończone dla mechaniki:

- ▶ 1D - kratowy (truss)
- ▶ 1.5D - belkowy (beam), ramowy (frame)
- ▶ 2D - PSN (panel, plane stress), PSO (plane strain), symetria osiowa (axial symmetry)
- ▶ 2.5D - płytowy (plate/slab), powłokowy (shell)
- ▶ 3D - bryłowy (volume)

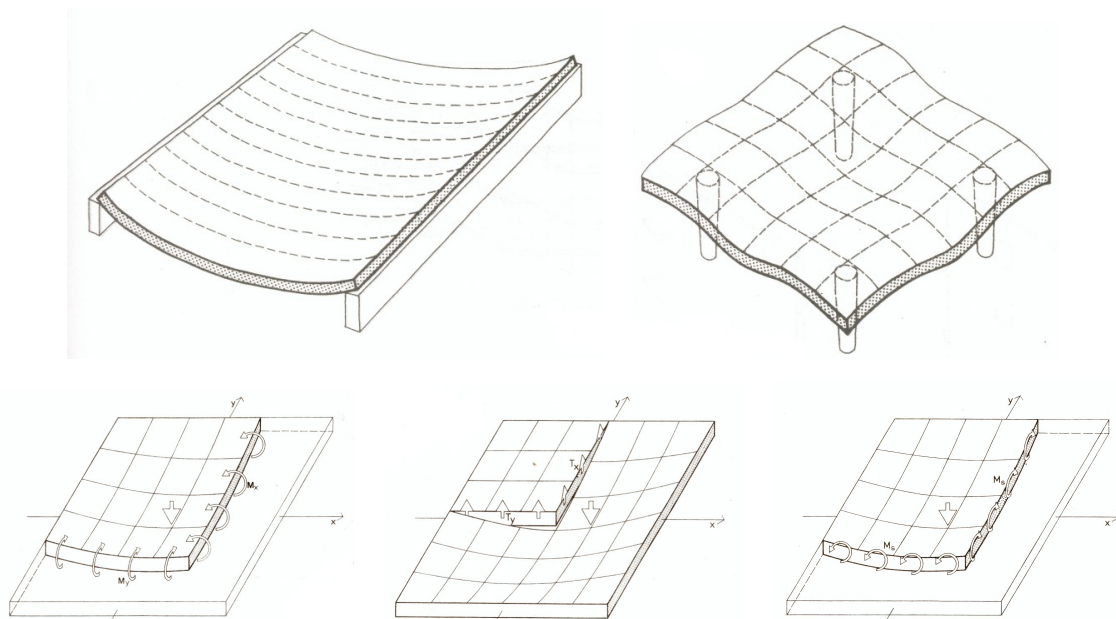
## Ustrój 1.5D - rama



Rysunki zaczerpnięte z podręcznika T. Kolendowicz *Mechanika budowli dla architektów*

MKwLL, Budownictwo II st. 


## Ustrój 2.5D - płyta



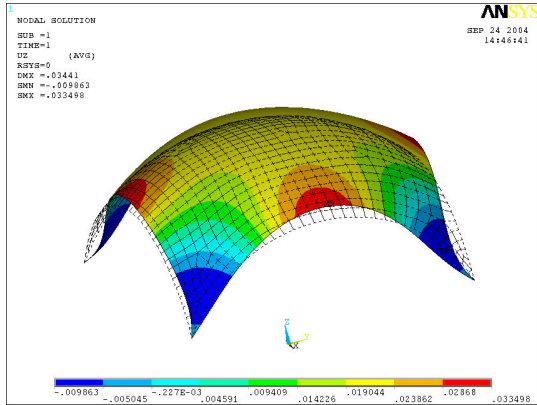
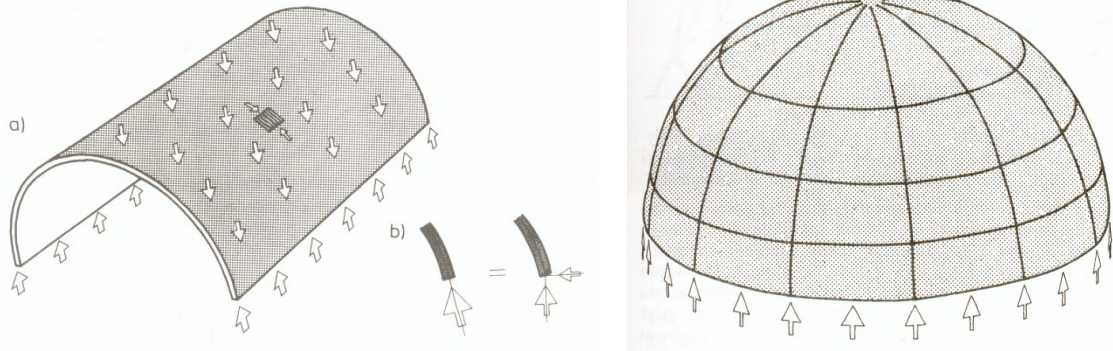
Zginanie

Ścinanie

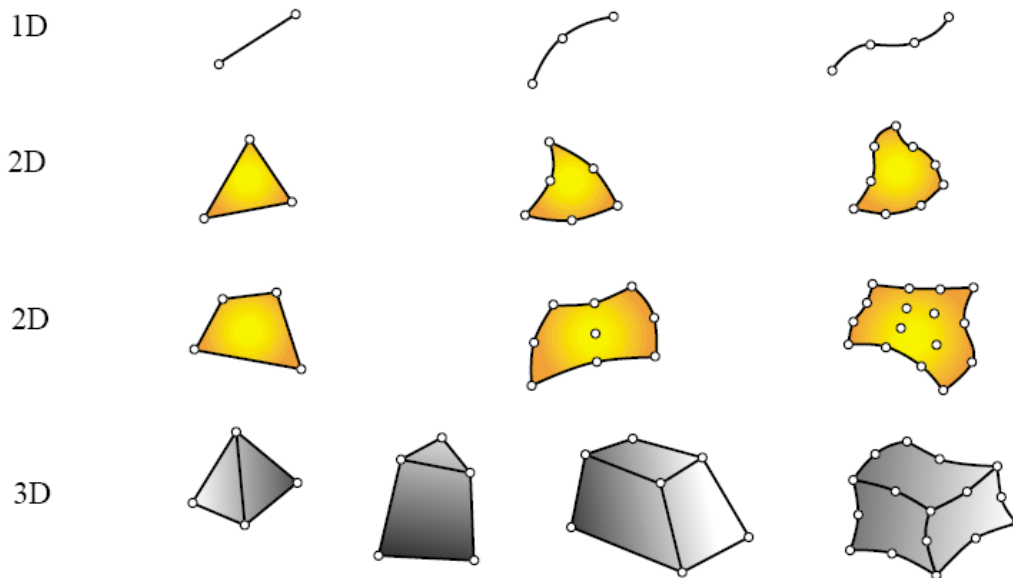
Skręcanie

MKwLL, Budownictwo II st. 

# Ustrój 2.5D - powłoka



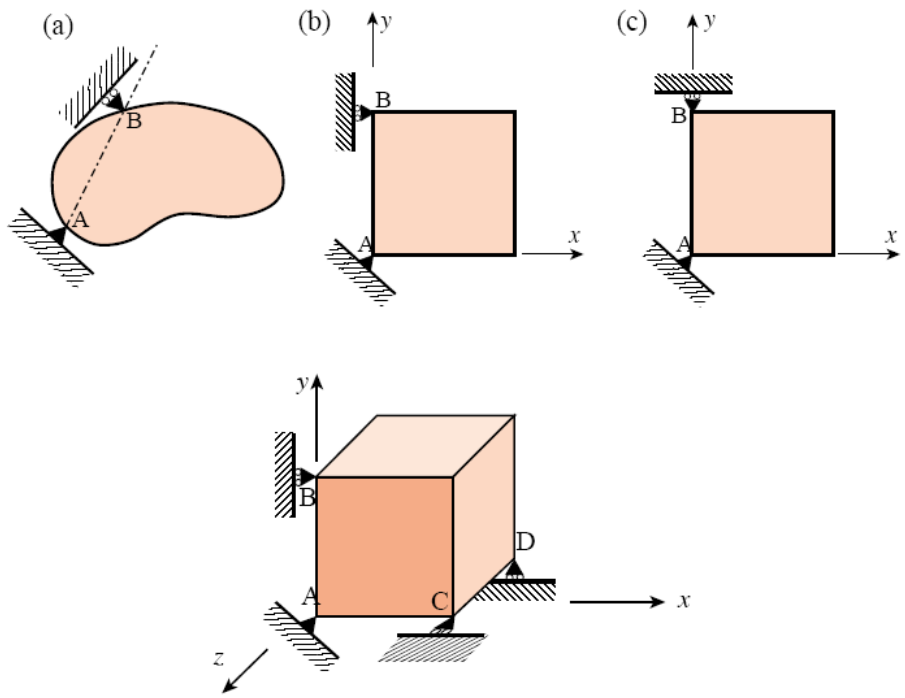
Ugięcia pod działaniem obciążenia równomiernego



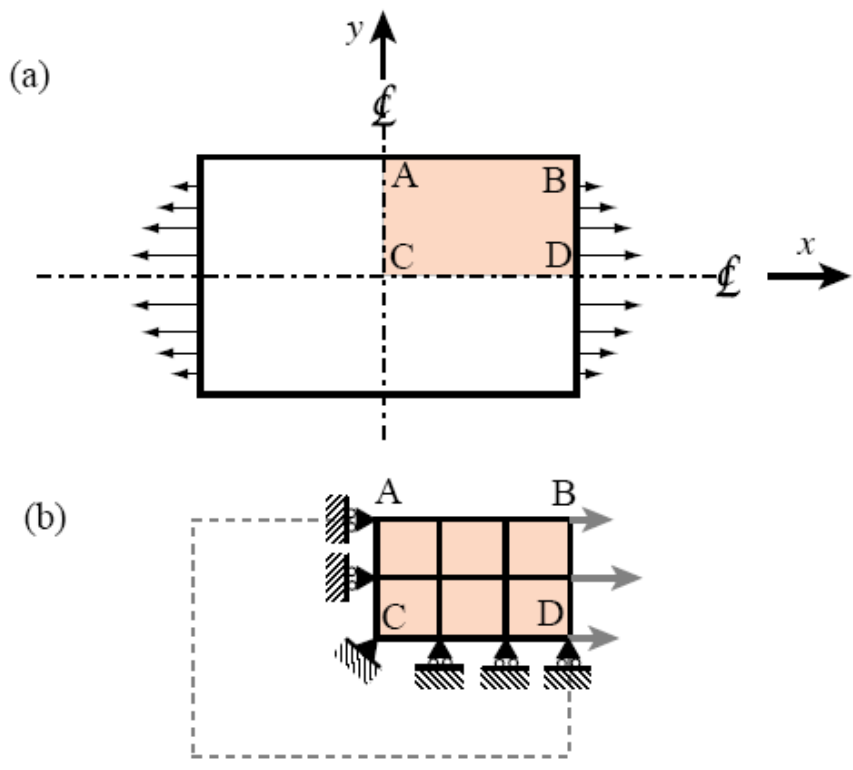
Rysunki zaczerpnięte z podręcznika:  
 C.A. Felippa, *Introduction to Finite Element Methods*, University of Colorado at Boulder.



## Geometryczna niezmienniczość układu

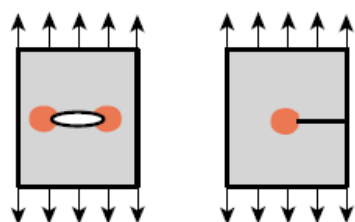


## Wykorzystywanie symetrii zadania



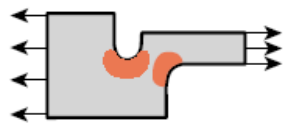


## Gdzie zagęszczać siatkę elementów

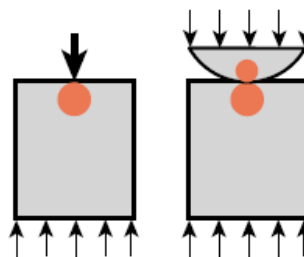


Cutouts

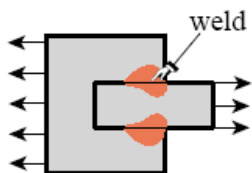
Cracks



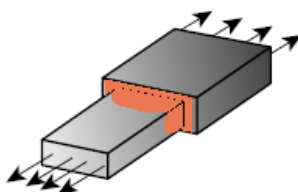
entrant corners



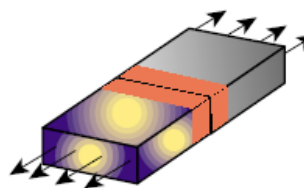
Vicinity of concentrated (point) loads, and sharp contact areas




Load transfer (bonded joints, welds, anchors, reinforcing bars, etc.)



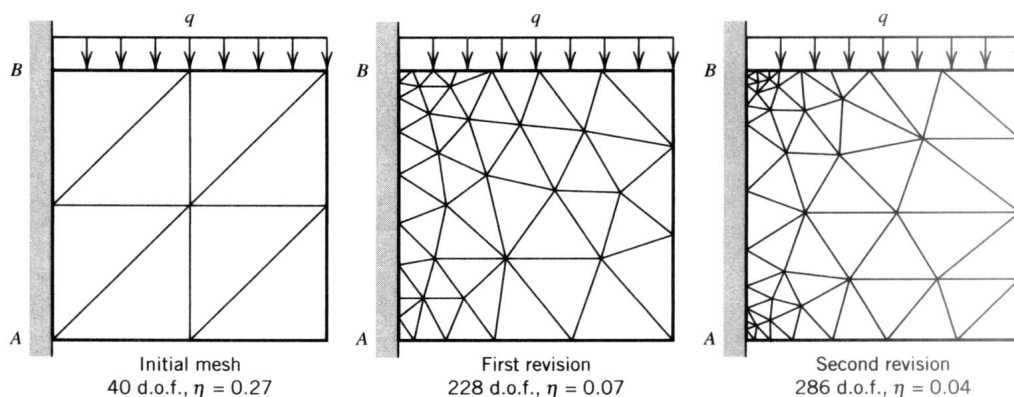
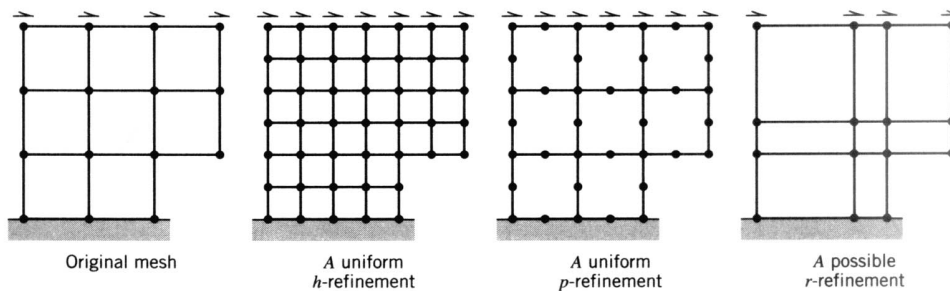
Abrupt thickness changes




Material interfaces

MKwL, Budownictwo II st. 

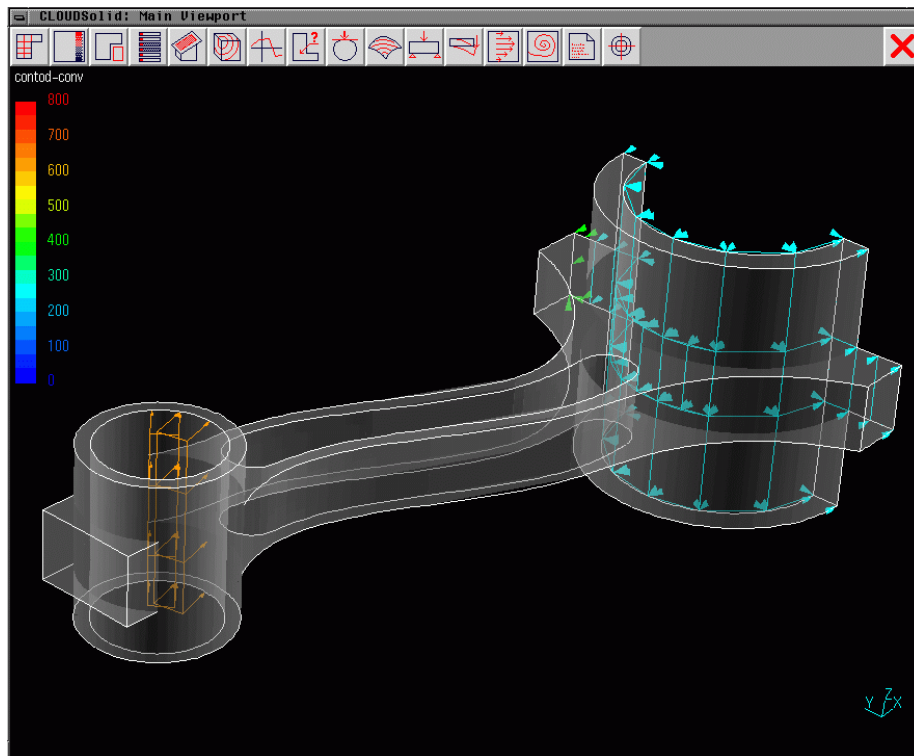
## Warianty poprawy siatki




Rysunki zaczerpnięte z podręcznika: R.D. Cook, *Finite Element Method for Stress Analysis*, J. Wiley & Sons 1995.

MKwL, Budownictwo II st. 

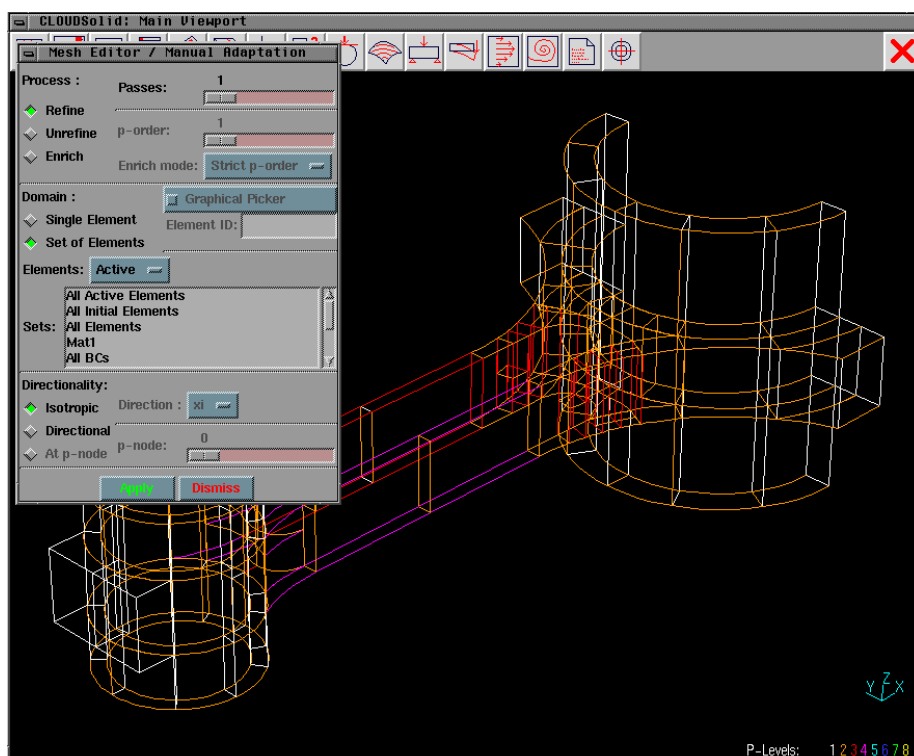
## Adaptacyjne zagęszczenie siatki elementów




Przykład zaczerpnięty ze strony Altair Engineering [www.altair.com](http://www.altair.com)

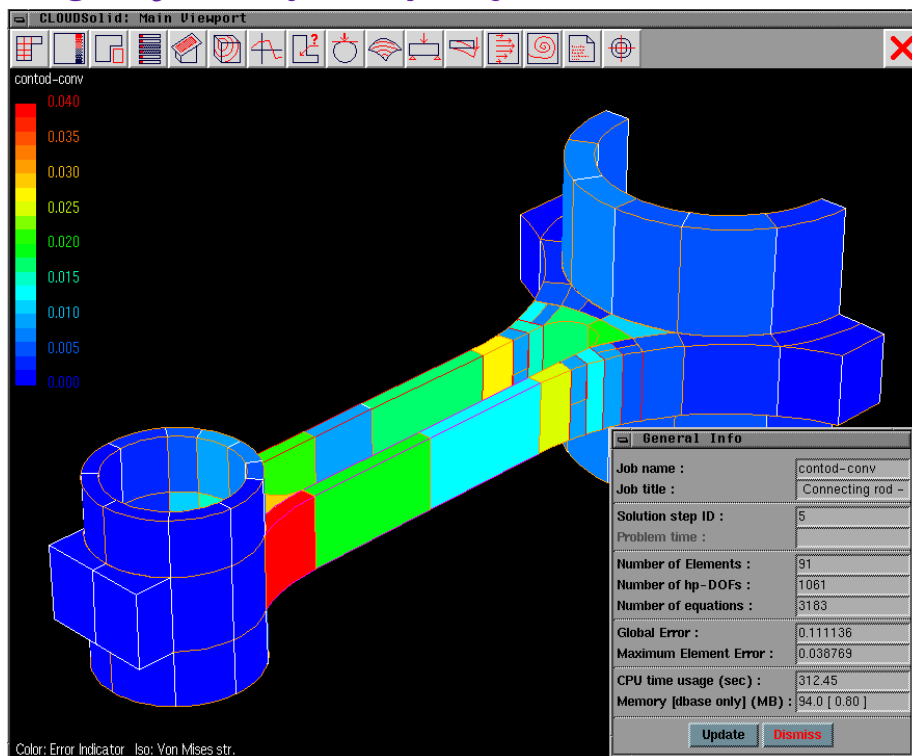
MKwL, Budownictwo II st. 

## Generacja siatki elementów



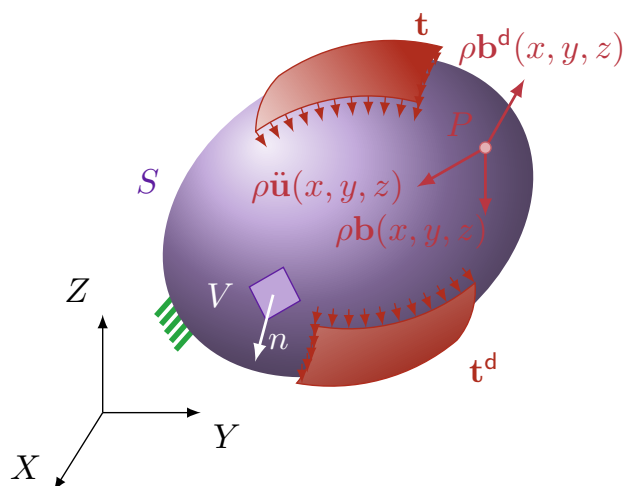
MKwL, Budownictwo II st. 

## Monitoring błędów dyskretyzacji



Adaptacyjne zagęszczenie siatki

## Stan równowagi dynamicznej



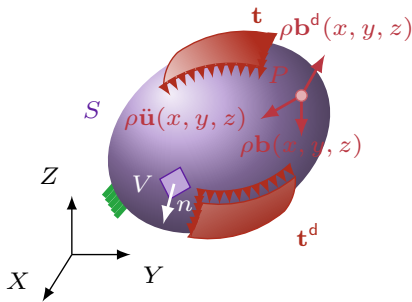
### Siły

- ▶  $\rho \mathbf{b}$  – wektor gęstości sił masowych [ $\text{N}/\text{m}^3$ ]
- ▶  $\rho \mathbf{b}^d$  – wektor gęstości sił masowych tłumienia [ $\text{N}/\text{m}^3$ ]
- ▶  $\rho \ddot{\mathbf{u}}$  – wektor gęstości sił bezwładności [ $\text{N}/\text{m}^3$ ]
- ▶  $\mathbf{t}$  – wektor gęstości sił powierzchniowych [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]
- ▶  $\mathbf{t}^d$  – wektor gęstości sił powierzchniowych tłumienia [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]

- ▶  $(\dot{\quad}) = \frac{\partial}{\partial t}$  – pochodna po czasie  $t$
- ▶  $\mathbf{u}$  – wektor przemieszczenia [m]
- ▶  $\dot{\mathbf{u}}$  – wektor prędkości [m/s]
- ▶  $\ddot{\mathbf{u}}$  – wektor przyspieszenia [ $\text{m}/\text{s}^2$ ]

# Stan równowagi dynamicznej

## Równanie równowagi ciała



$$\int_S (\mathbf{t} - \mathbf{t}^d) dS + \int_V \rho (\mathbf{b} - \mathbf{b}^d - \ddot{\mathbf{u}}) dV = 0$$

## Statyczne warunki brzegowe

$$\mathbf{t} - \mathbf{t}^d = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

gdzie  $\boldsymbol{\sigma}$  – tensor naprężeń

## Wykorzystując twierdzenie Greena–Gaussa–Ostrogradzkiego

$$\int_S \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS = \int_V \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad \text{gdzie } \mathbf{L} \text{ – macierz operatorów różniczkowych}$$

# Równanie równowagi

## Równania Naviera

$$\int_V (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho (\mathbf{b} - \mathbf{b}^d - \ddot{\mathbf{u}})) dV = 0 \iff \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho (\mathbf{b} - \mathbf{b}^d - \ddot{\mathbf{u}}) = 0 \quad \forall P \in V$$

$$\sigma_{ij,j} + \rho (b_i - b_i^d - \ddot{u}_i) = 0$$

Sformułowanie słabe – funkcja wagowa  $w \cong \delta \mathbf{u}$  – kinematycznie dopuszczalna wariacja przemieszczenia (zgodna z kinematycznymi warunkami brzegowymi – zasada prac wirtualnych)

$$\int_V (\delta \mathbf{u})^T (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho (\mathbf{b} - \mathbf{b}^d - \ddot{\mathbf{u}})) dV = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

$$- \int_V (\mathbf{L} \delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_S (\delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS + \int_V (\delta \mathbf{u})^T \rho (\mathbf{b} - \mathbf{b}^d - \ddot{\mathbf{u}}) dV = 0$$

$$\int_V (\mathbf{L} \delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_S (\delta \mathbf{u})^T (\mathbf{t} - \mathbf{t}^d) dS - \int_V (\delta \mathbf{u})^T \rho (\mathbf{b} - \mathbf{b}^d - \ddot{\mathbf{u}}) dV = 0$$

## Równanie równowagi układu zdyskretyzowanego

Równanie równowagi (Aproksymacja MES:  $\mathbf{u}^{eh}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{d}^e(t)$ )

$$\sum_{e=1}^E \left\{ \int_{V^e} (\mathbf{L}^e \delta \mathbf{u}^e)^T \boldsymbol{\sigma}^e dV^e - \int_{S^e} (\delta \mathbf{u}^e)^T (\mathbf{t}^e - \mathbf{t}^{de}) dS^e - \int_{V^e} (\delta \mathbf{u}^e)^T \rho (\mathbf{b}^e - \mathbf{b}^{de} - \ddot{\mathbf{u}}^e) dV^e \right\} = 0$$

$$\sum_{e=1}^E \left\{ \int_{V^e} (\mathbf{L}^e \mathbf{N}^e \delta \mathbf{d}^e)^T \boldsymbol{\sigma}^e dV^e - \int_{S^e} (\mathbf{N}^e \delta \mathbf{d}^e)^T (\mathbf{t}^e - \mathbf{t}^{de}) dS^e - \int_{V^e} (\mathbf{N}^e \delta \mathbf{d}^e)^T \rho (\mathbf{b}^e - \mathbf{b}^{de} - \ddot{\mathbf{u}}^e) dV^e \right\} = 0$$

$$\sum_{e=1}^E (\delta \mathbf{d}^e)^T \left\{ \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \boldsymbol{\sigma}^e dV^e - \int_{S^e} \mathbf{N}^{eT} (\mathbf{t}^e - \mathbf{t}^{de}) dS^e - \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \rho (\mathbf{b}^e - \mathbf{b}^{de} - \ddot{\mathbf{u}}^e) dV^e \right\} = 0$$

Podstawiamy  $\delta \mathbf{d}^e = \mathbf{T}^e \delta \mathbf{d}$ , żądamy spełnienia równania  $\forall \delta \mathbf{d}$

## Równanie równowagi układu zdyskretyzowanego

Równanie równowagi

$$\sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \boldsymbol{\sigma}^e dV^e \right\} + \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \rho \ddot{\mathbf{u}}^e dV^e \right\} +$$

$$+ \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{S^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^{de} dS^e + \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \rho \mathbf{b}^{de} dV^e \right\} =$$

$$= \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{S^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^e dS^e + \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \rho \mathbf{b}^e dV^e \right\}$$

Uwzględnienie związków kinematycznych, fizycznych i tłumienia

liniowy związek kinematyczny:  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$

liniowa sprężystość:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{L}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{L}^e \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e \mathbf{T}^e \mathbf{d}, \quad \ddot{\mathbf{u}}^e = \mathbf{N}^e \ddot{\mathbf{d}}^e = \mathbf{N}^e \mathbf{T}^e \ddot{\mathbf{d}}$$

lepkie tłumienie:

$$\mathbf{t}^{de} = \mu_d \dot{\mathbf{u}}^e = \mu_d \mathbf{N}^e \dot{\mathbf{d}}^e = \mu_d \mathbf{N}^e \mathbf{T}^e \dot{\mathbf{d}}, \quad \rho \mathbf{b}^{de} = \mu_b \dot{\mathbf{u}}^e = \mu_b \mathbf{N}^e \dot{\mathbf{d}}^e = \mu_b \mathbf{N}^e \mathbf{T}^e \dot{\mathbf{d}}$$

# Równanie równowagi układu zdyskretyzowanego

Równanie równowagi – drgania wymuszone z tłumieniem

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e dV^e \right\} \mathbf{T}^e \mathbf{d} + \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{k}^e \\
 & \quad + \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{V^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dV^e \right\} \mathbf{T}^e \ddot{\mathbf{d}} + \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{m}^e \\
 & \quad + \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{S^e} \mu_d \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dS^e + \int_{V^e} \mu_b \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dV^e \right\} \mathbf{T}^e \dot{\mathbf{d}} = \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{c}^e \\
 & \quad = \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{S^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^e dS^e + \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \rho \mathbf{b}^e dV^e \right\} \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{f}^e
 \end{aligned}$$

# Równanie równowagi układu zdyskretyzowanego

Równanie równowagi – drgania wymuszone z tłumieniem

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{T}^e \mathbf{d} + \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \mathbf{m}^e \mathbf{T}^e \ddot{\mathbf{d}} + \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \mathbf{c}^e \mathbf{T}^e \dot{\mathbf{d}} = \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \mathbf{f}^e \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{K}^e \quad \quad \quad \mathbf{M}^e \quad \quad \quad \mathbf{C}^e \quad \quad \quad \mathbf{F}^e \\
 & \quad \quad \quad \sum_{e=1}^E \mathbf{K}^e \mathbf{d} + \sum_{e=1}^E \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{d}} + \sum_{e=1}^E \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{d}} = \sum_{e=1}^E \mathbf{F}^e \\
 & \quad \quad \quad \sum_{e=1}^E \mathbf{K}^e \mathbf{d} + \sum_{e=1}^E \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{d}} + \sum_{e=1}^E \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{d}} = \sum_{e=1}^E \mathbf{F}^e \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{K} \quad \quad \quad \mathbf{M} \quad \quad \quad \mathbf{C} \quad \quad \quad \mathbf{F} \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{Kd} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{F}
 \end{aligned}$$

# Równanie równowagi układu zdyskretyzowanego

Równanie równowagi – drgania wymuszone z tłumieniem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{F}(t)$$

- ▶  $\mathbf{M}$  – macierz mas
- ▶  $\mathbf{C}$  – macierz tłumienia
- ▶  $\mathbf{K}$  – macierz sztywności
- ▶  $\mathbf{F}$  – wektor węzłowych obciążeń zewnętrznych


Równanie równowagi – drgania własne bez tłumienia

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{0}$$

Równanie równowagi – statyka

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F}$$

Przed rozwiązaniem konieczne jest uwzględnienie podstawowych (kinematycznych) warunków brzegowych


MKwL, Budownictwo II st. 

## Drgania własne

Aproksymacja

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{d}^e(t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{d}_A^e \sin(\omega t + \varphi)$$

- ▶  $\mathbf{N}^e$  – macierz funkcji kształtu
- ▶  $\mathbf{d}_A^e$  – wektor amplitud drgań własnych
- ▶  $\omega$  – częstość drgań własnych
- ▶  $\varphi$  – przesunięcie fazowe
- ▶  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$   
gdzie  $f$ ,  $T$  – odpowiednio częstotliwość i okres drgań własnych

MKwL, Budownictwo II st. 



# Drgania własne

Przemieszczenie zależne od czasu

$$\mathbf{d}^e(t) = \mathbf{d}_A^e \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}^e(t) = -\omega^2 \mathbf{d}_A^e \sin(\omega t + \varphi)$$

Po podstawieniu do równania równowagi i agregacji

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d}_A \sin(\omega t + \varphi) = \mathbf{0} \quad \forall t$$

równanie problemu własnego

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d}_A = \mathbf{0}$$

jest spełnione gdy

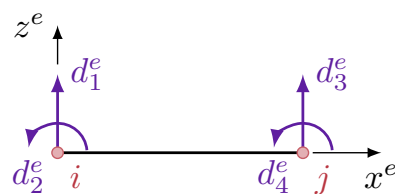
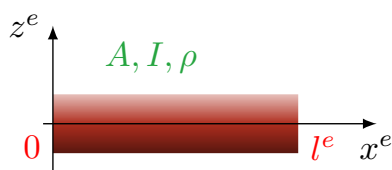
$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \text{ lub } \mathbf{d}_A = \mathbf{0}$$

Wynik: spektrum częstości drgań własnych i odpowiednie formy drgań

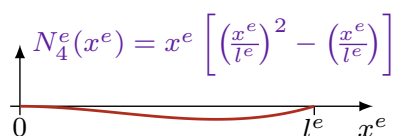
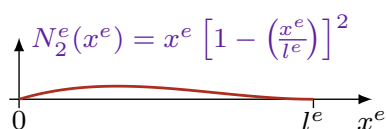
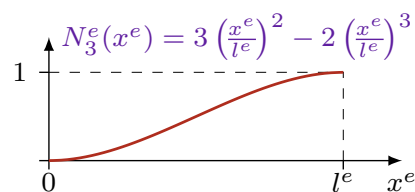
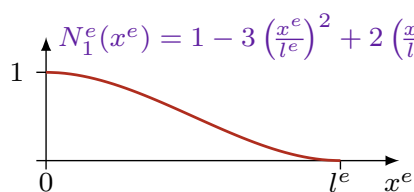
$$(\omega_1, \mathbf{d}_{A1}), (\omega_2, \mathbf{d}_{A2}), \dots$$

# Drgania własne

Element belkowy



Funkcje kształtu  $\mathbf{N}^e = [N_1^e \quad N_2^e \quad N_3^e \quad N_4^e]$



# Drgania własne

## Macierz sztywności – element belkowy

$$\mathbf{k}^e = \int_0^{l^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e dx^e, \quad \mathbf{B}^e = \mathbf{L} \mathbf{N}^e, \quad \mathbf{L} = \left[ -\frac{d^2}{dx^{e2}} \right], \quad \mathbf{D}^e = [E^e I^e]$$

$$\mathbf{k}^e = \frac{E^e I^e}{l^{e3}} \begin{bmatrix} 12 & 6l^e & -12 & 6l^e \\ 6l^e & 4l^{e2} & -6l^e & 2l^{e2} \\ -12 & -6l^e & 12 & -6l^e \\ 6l^e & 2l^{e2} & -6l^e & 4l^{e2} \end{bmatrix}$$

## Macierz mas – element belkowy

$$\mathbf{m}^e = \int_0^{l^e} \rho A^e \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dx^e, \quad \mu^e = \rho A^e - \text{masa na jedn. długości [kg/m]}$$

$$\mathbf{m}^e = \frac{\mu^e l^e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l^e & 54 & -13l^e \\ 22l^e & 4l^{e2} & 13l^e & -3l^{e2} \\ 54 & 13l^e & 156 & -22l^e \\ -13l^e & -3l^{e2} & -22l^e & 4l^{e2} \end{bmatrix}$$

MKwL, Budownictwo II st.

# Przykład

## Drgania gięte wspornika

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d}_A = \mathbf{0}$$

$$\left( \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} d_{A1} \\ d_{A2} \\ d_{A3} \\ d_{A4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d_{A1} = 0, d_{A2} = 0 \Rightarrow \left( \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l \\ -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} d_{A3} \\ d_{A4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l \\ -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 12.48 \\ \lambda_2 = 1211.52 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \omega_1 = \frac{3.53}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \\ \omega_2 = \frac{34.81}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \end{matrix}$$

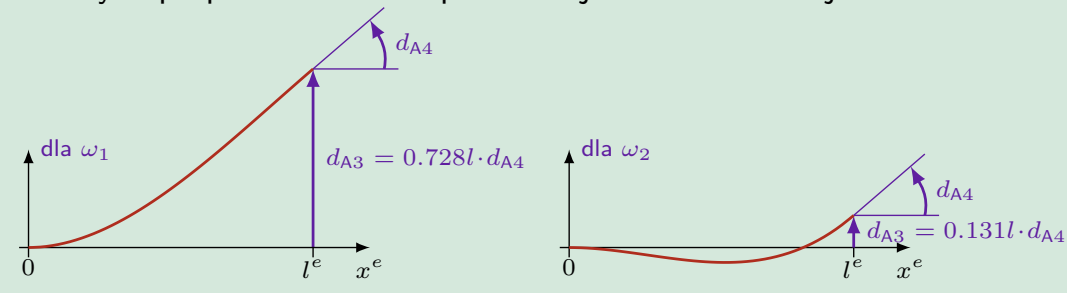

MKwL, Budownictwo II st.


# Przykład

Wspornik

## Postaci drgań własnych

Formy drgań własnych wyznaczone z jednego z dwóch równań liniowo zależnych po podstawieniu odpowiedniej wartości własnej



MKwL, Budownictwo II st. 

## Zaawansowane zagadnienia mechaniki

- ▶ Obciążenia wyjątkowe, np. uderzenie
- ▶ Nielinowości fizyczne, np. uszkodzenie, zarysowanie, odkształcenia plastyczne
- ▶ Nielinowości geometryczne, tzn. duże przemieszczenia, duże odkształcenia
- ▶ Zagadnienie kontaktu (więzów jednostronnych)

ADINA R&D, Inc. [www.adina.com](http://www.adina.com)

Uderzenie głowy w kasku, samochodzu

Przerwana zaporą

ANSYS, Inc. [www.ansys.com](http://www.ansys.com)

Zagadnienie kontaktowe

Zagadnienie dynamiczne

TNO DIANA <http://www.tnodiana.com>

Czteroprzęsłowa płyta po obciążeniu ruchomym

Ewolucja odkształceń plastycznych pod pałem

MKwL, Budownictwo II st. 