

Metody bezsiatkowe i inne metody komputerowe na tle MES

Sławomir Milewski
slawek@L5.pk.edu.pl

Piotr Pluciński
pplucin@L5.pk.edu.pl



POLITECHNIKA KRAKOWSKA im. T. Kościuszki
Wydział Inżynierii Lądowej
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków
tel. 012 628 2546/2929, fax: 012 628 2034, e-mail: L-5@pk.edu.pl
Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej
(L-5)



Wprowadzenie

Metoda Elementów Skończonych MES

- ◆ Ogólna, najbardziej rozpowszechniona, najbardziej rozwinięta
 - ◆ Podstawa większości programów komercyjnych
(Abaqus, Adina, Ansys, Diana, FELT, Feap, Mark, Robot, ...)
 - ◆ Stosowana przy większości zadań inżynierskich mechaniki i fizyki
 - ◆ Rozwinięte klasy i typy elementów skończonych, podstawy matematyczne, opracowanie wyników, metody szacowania błędów
-

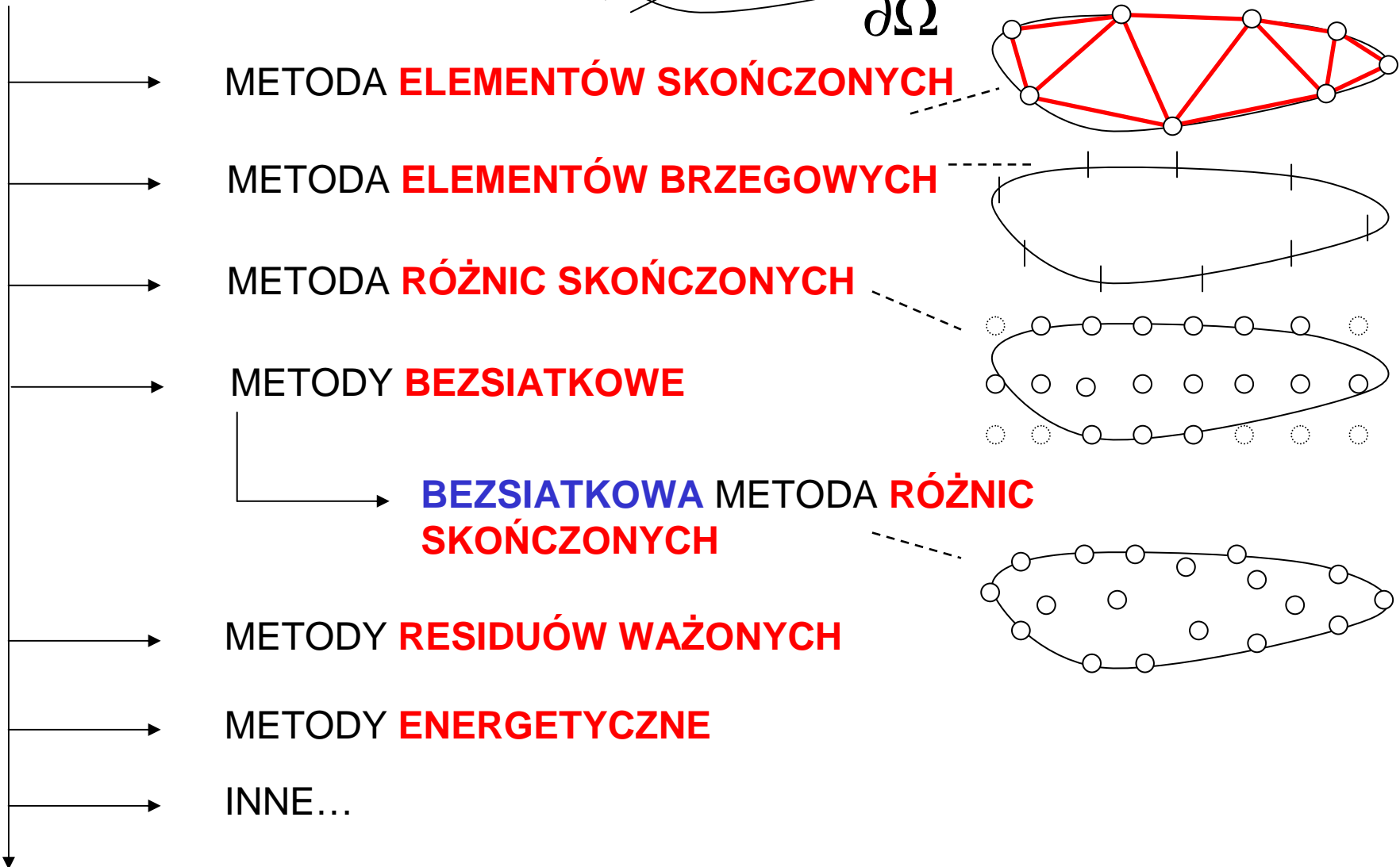
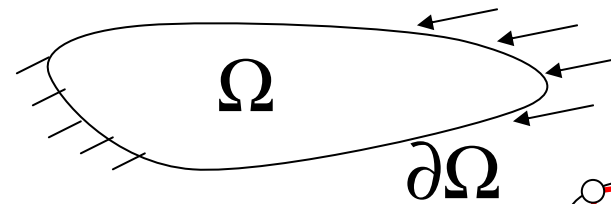
Wprowadzenie

Dlaczego mówimy o **innych metodach komputerowych**?

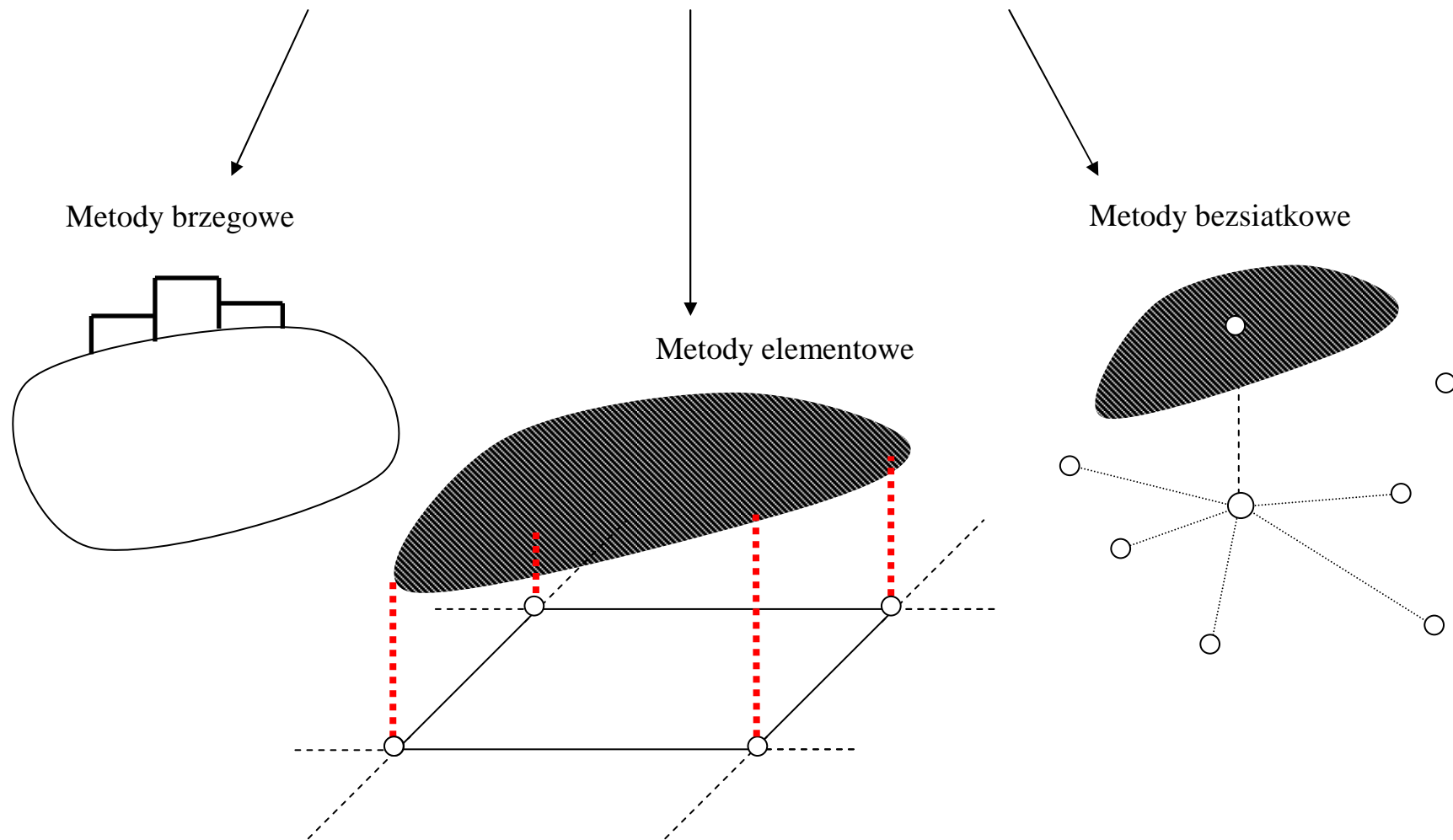
- ◆ Względy **historyczne** (MES nie jest najstarsza...)
 - ◆ Względy **dydaktyczne** (łatwiej rozwiązać zadanie „ręcznie” za pomocą np. metody różnic skończonych)
 - ◆ Względy **praktyczne**
 - Niektóre **zastosowania** (analiza płyt, ruchomy brzeg, szczelina, ...)
 - Dostępne **oprogramowanie** (własne lub komercyjne)
 - **Kombinacje** metod (np. MES + BMRS)
 - Potrzeba **weryfikacji** obliczeń MES inną metodą
 - ◆ **Efektywność** i **szybkość** algorytmu
 - Potrzeba częstej przebudowy siatki (adaptacja)
 - Dokładność rozwiązania i jego pochodnych (nadzbieżność)
 - Końcowe opracowanie wyników (podejście hybrydowe)
 - ◆ Aktualne **trendy w nauce** (metody bezsiatkowe)
-

Kryteria klasyfikacji metod obliczeniowych


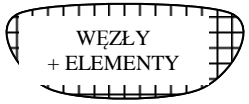



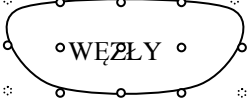



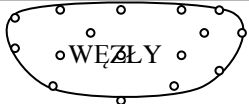
Dyskretyzacja obszaru



Aproksymacja rozwiązania



Klasyfikacja metod komputerowych

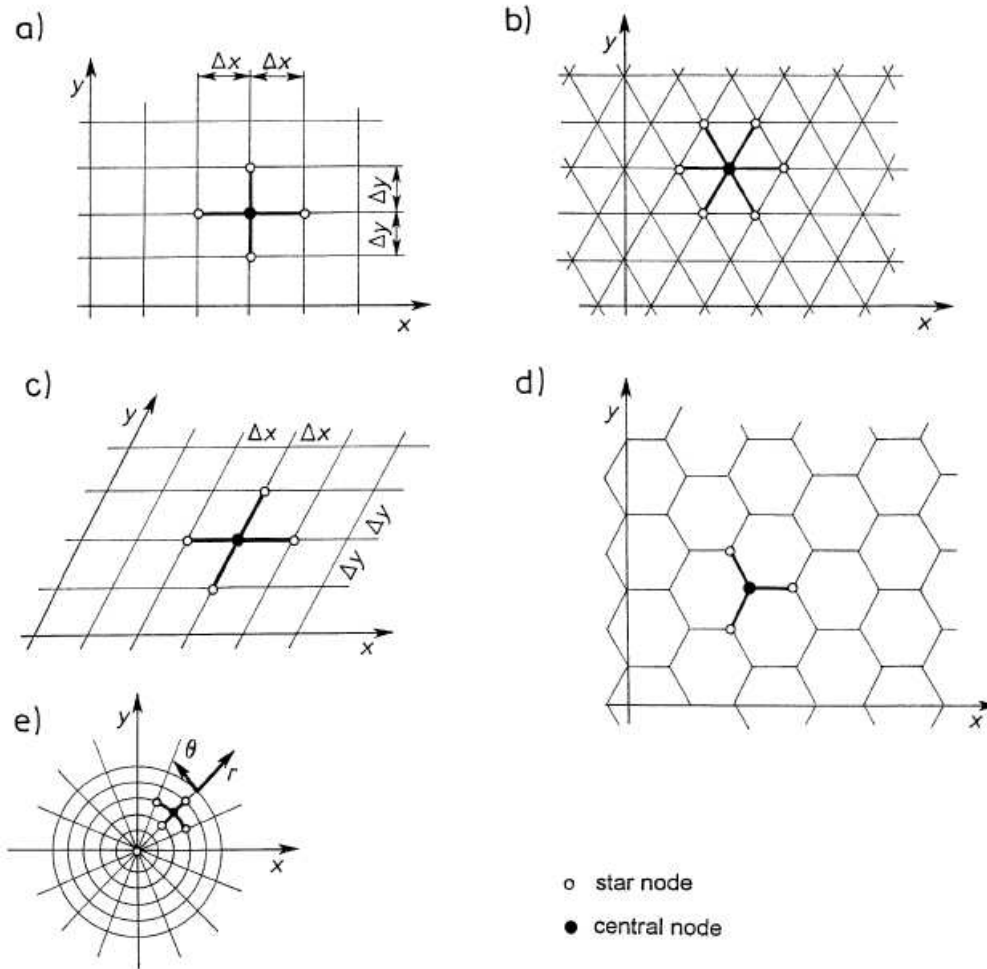
NAZWA METODY	SFOR-MUŁOWANIE	PODSTAWA DYSKRETYZACJI	SPOSÓB DYSKRETYZACJI	SPOSÓB APROKSYMACJI	CAŁKOWANIE NUMERYCZNE	OPRACOWANIE WYNIKÓW
METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH	SŁABE (WARIACYJNE / FUNKCJONAL)			INTERPOLACJA F.KSZTAŁTU W ELEMENCIE	W ELEMENCIE	MES + INNE
METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH	RÓWNANIE CAŁKOWE			INTERPOLACJA BRZEGOWA	NA BRZEGU (CAŁKI WŁAŚCIWE I NIWŁAŚCIWE)	MEB + INNE
METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH	MOCNE (LOKALNE)			WZORY RÓŻNICOWE	NIE JEST POTRZEBNE	APROKSYMACJA
WARIACYJNA MRS	SŁABE (WARIACYJNE)			WZORY RÓŻNICOWE	DOKOŁA LUB POMIĘDZY WĘZŁAMI	APROKSYMACJA
METODY BEZSIATKOWE (BEZSIATKOWA MRS)	MOCNE / SŁABE (WARIACYJNE)			METODA MWLS	RÓŻNE SPOSOBY	MWLS
METODY RESIDUALNE (GALERKIN, NK, KOL.)	SŁABE (WARIACYJNE)	BRAK	BRAK	KOMBINACJA LINIOWA F.BAZOWYCH	ANALITYCZNIE	INTERPOLACJA
METODY ENERGETYCZNE (RITZ)	SŁABE (FUNKCJONAL)	BRAK	BRAK	KOMBINACJA LINIOWA F.BAZOWYCH	ANALITYCZNIE	INTERPOLACJA

Metoda różnic skończonych - wersja lokalna

MRS (lokalna) na tle MES

	MRS lokalna	MES
<i>Sformułowanie problemu brzegowego</i>	<p>Lokalne</p> $\begin{cases} \nabla^2 u = f \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g \end{cases} \quad u = u(P) \quad \begin{cases} P \in \Omega \\ P \in \partial\Omega \end{cases}$	<p>- Wariacyjne $-\int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\partial\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega$</p> <p>- Funkcjonał $I(u) = \int_{\Omega} F\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\Omega$, $\min_{(u)} I(u) = ?$</p>
<i>Generacja siatki</i>	Typ (prostokątna, trójkątna) + moduł h	Specjalne programy - generatory
<i>Aproksymacja</i>	Generacja wzorów różnicowych dla pochodnych z równania	Interpolacja rozwiązania w elemencie za pomocą funkcji kształtu
<i>Generacja równań dyskretnych</i>	Kolokacja	Spełnienie równania wariacyjnego w elemencie
<i>Całkowanie</i>	Brak	Kwadratury Gaussa w elemencie
<i>Warunki brzegowe</i>	Dodatkowe wzory różnicowe brzegowe	Modyfikacja układu równań
<i>Macierz Układu równań</i>	Na ogół niesymetryczna	Symetryczna pasmowa

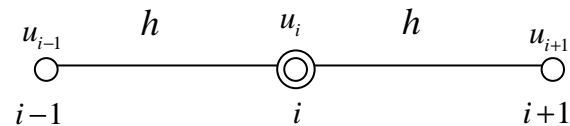
Etapy MRS – generacja siatki



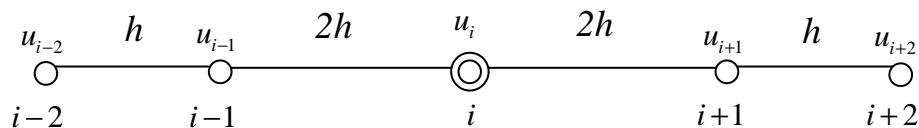
Etapy MRS – generacja wzorów różnicowych

1D:

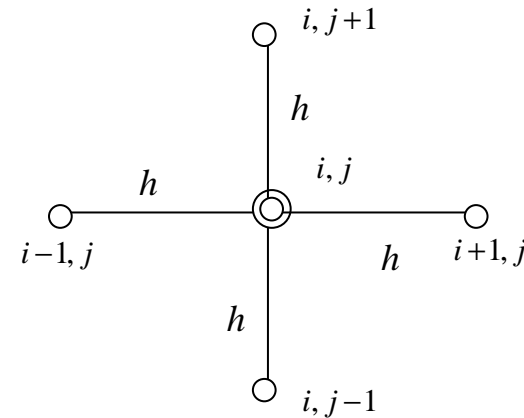
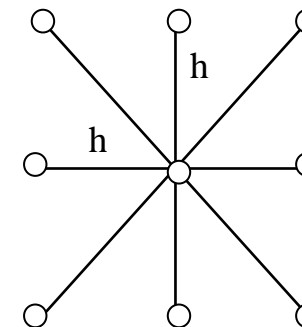
gwiazda trójwęzłowa standardowa



gwiazda pięciowęzłowa



2D:

gwiazda
pięciowęzłowagwiazda
dziewięcio-
węzłowa

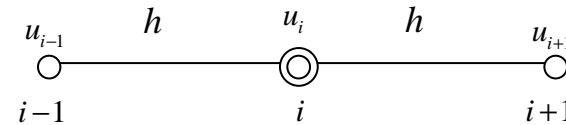
Sposoby generacji wzorów różnicowych:

- Składanie wzorów złożonych ze wzorów prostych:
- Wymuszenie zgodności dla jednomianów
- Interpolacja i różniczkowanie
- Metoda współczynników nieoznaczonych („metoda Taylora”)

Generacja wzorów różnicowych – przykłady obliczeń 1D

- metoda współczynników nieoznaczonych – operator:

$$u''_i \approx au_{i-1} + bu_i + cu_{i+1}$$



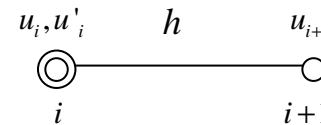
$$\begin{cases} u_{i-1} = u_i - hu'_i + 0.5h^2u''_i + \dots \\ u_i = u_i \\ u_{i+1} = u_i + hu'_i + 0.5h^2u''_i + \dots \end{cases}$$

$$u''_i \approx u_i \underbrace{(a+b+c)}_0 + u'_i \underbrace{(-ah+ch)}_0 + u''_i \underbrace{(0.5h^2a+0.5h^2c)}_1$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{h^2} \\ b = \frac{-2}{h^2} \\ c = \frac{1}{h^2} \end{cases}$$

- metoda współczynników nieoznaczonych – operator:

$$u''_i \approx au_i + bu'_i + cu_{i+1}$$



$$\begin{cases} u_i = u_i \\ u'_i = u'_i \\ u_{i+1} = u_i + hu'_i + 0.5h^2u''_i + \dots \end{cases}$$

$$u''_i \approx u_i \underbrace{(a+c)}_0 + u'_i \underbrace{(b+ch)}_0 + u''_i \underbrace{0.5h^2c}_1$$

$$\begin{cases} a = -\frac{2}{h^2} \\ b = \frac{-2}{h} \\ c = \frac{2}{h^2} \end{cases}$$

- składanie operatorów

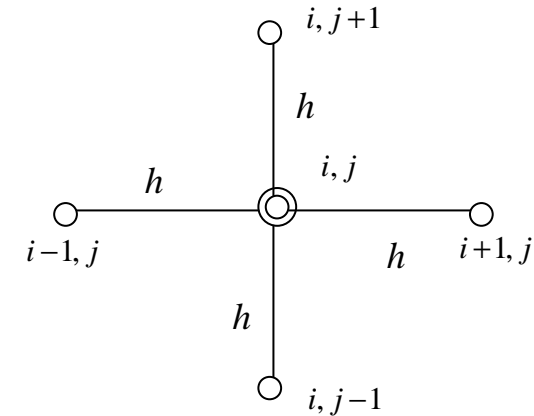
$$u'_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \rightarrow u''_i \approx (u'_i)' = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \rightarrow u'''_i \approx (u''_i)' \dots$$

Generacja wzorów różnicowych – przykłady obliczeń 2D

- metoda współczynników nieoznaczonych – operator:

$$\nabla^2 u_{i,j} = (u''_{xx})_{i,j} + (u''_{yy})_{i,j} \approx au_{i-1,j} + bu_{i,j-1} + cu_{i+1,j} + du_{i,j+1} + eu_{i,j}$$

$$\begin{cases} u_{i-1,j} = u_{i,j} - h(u'_x)_{i,j} + 0.5h^2(u''_{xx})_{i,j} + \dots \\ u_{i,j-1} = u_{i,j} - h(u'_y)_{i,j} + 0.5h^2(u''_{yy})_{i,j} + \dots \\ u_{i+1,j} = u_{i,j} + h(u'_x)_{i,j} + 0.5h^2(u''_{xx})_{i,j} + \dots \\ u_{i,j+1} = u_{i,j} + h(u'_y)_{i,j} + 0.5h^2(u''_{yy})_{i,j} + \dots \\ u_{i,j} = u_{i,j} \end{cases}$$



$$\nabla^2 u_{i,j} = u_{i,j} \underbrace{(a+b+c+d+e)}_0 + (u'_x)_{i,j} \underbrace{(-ha+hc)}_0 + (u'_y)_{i,j} \underbrace{(-hb+hd)}_0 + \dots$$

$$\dots + (u''_{xx})_{i,j} \underbrace{(0.5h^2a+0.5h^2c)}_1 + (u''_{yy})_{i,j} \underbrace{(0.5h^2b+0.5h^2d)}_1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = b = c = d = \frac{1}{h^2} \\ e = -\frac{4}{h^2} \end{cases}$$

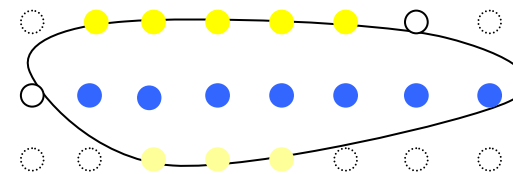
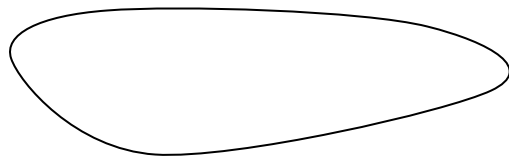
- składanie operatorów

$$(u''_{xx})_{i,j} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}, \quad (u''_{yy})_{i,j} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} \quad \rightarrow$$

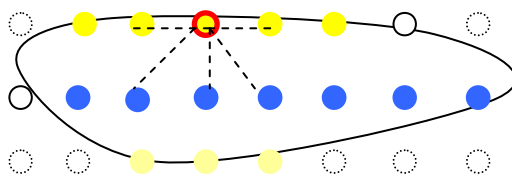
$$\rightarrow \nabla^2 u_{i,j} = (u''_{xx})_{i,j} + (u''_{yy})_{i,j} \approx \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2}$$

Etapy MRS – generacja równań różnicowych

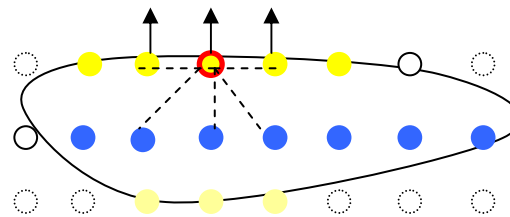
$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \\ \mathcal{G}u = g \end{cases} \quad u = u(P) \quad \begin{cases} P \in \Omega \\ P \in \partial\Omega \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{Kolokacja we węzłach}} \quad \begin{cases} Lu_i = f_i \\ Gu_i = g_i \end{cases} \quad \begin{cases} P_i \in \Omega_i \\ P_j \in \partial\Omega_j \end{cases}$$



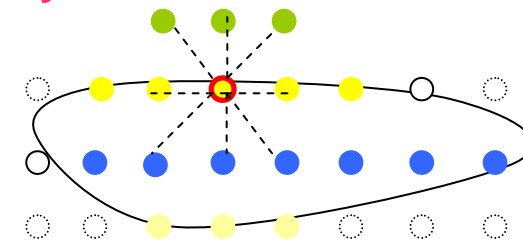
Uwzględnienie warunków brzegowych



Operator budowany tylko na **węzłach wewnętrznych**



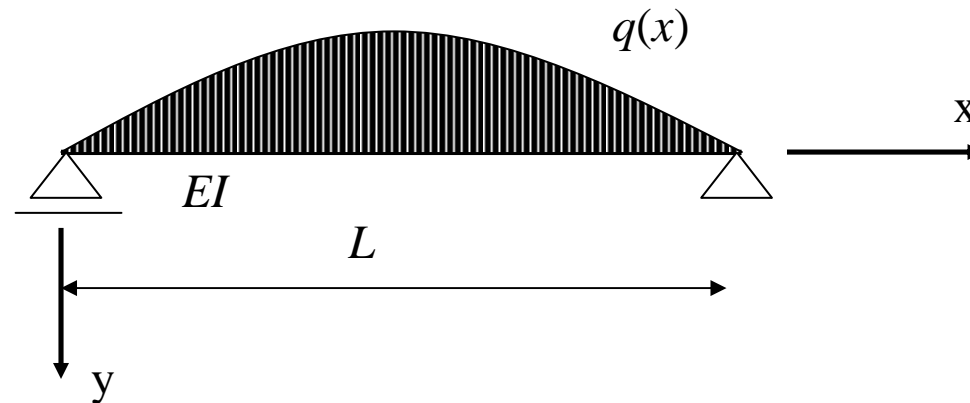
Operator budowany na **węzłach wewnętrznych** - z wykorzystaniem uogólnionych stopni swobody



Operator budowany na **węzłach wewnętrznych** i **zewnętrznych „fikcyjnych” węzłach**

Zginana belka – równanie II rzędu

sformułowanie matematyczne – równanie różniczkowe zwyczajne II rzędu

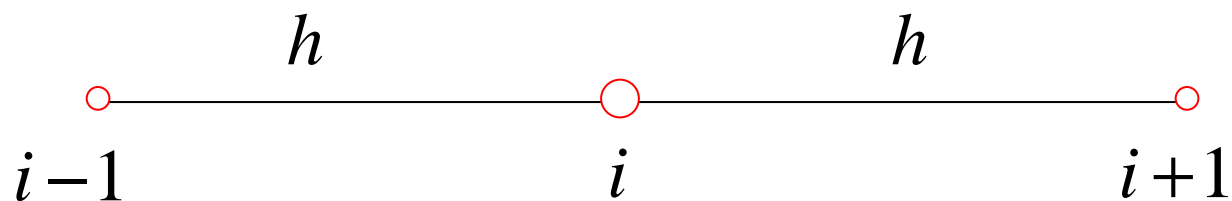


$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x) = -\frac{M(x)}{EI}, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

$$M(x) = \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2 = \frac{1}{2}qx(L-x) \quad \text{dla } q = \text{const.}$$

Problemy brzegowe II rzędu

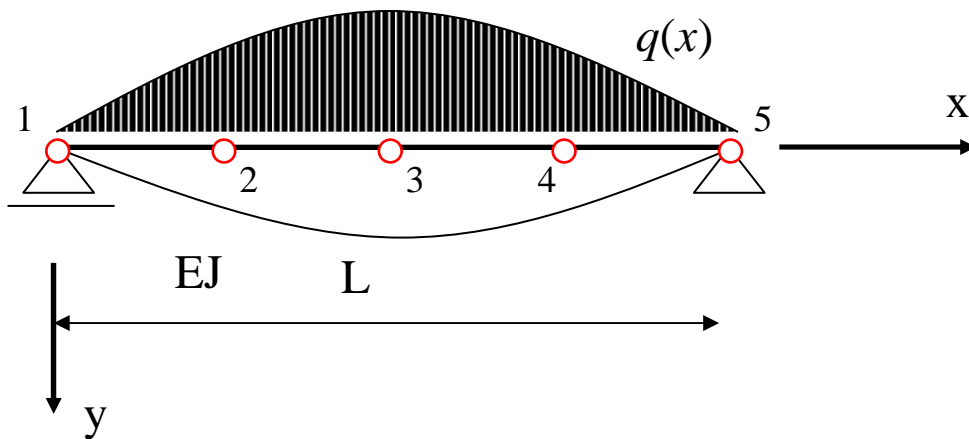
- zamiana pochodnych ścisłych na numeryczne



$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$y''_i \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$$

Przykład: siatka 5-cio węzłowa



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

$$h = \frac{L}{4}$$

zapis **tradycyjny** – do obliczeń **ręcznych**

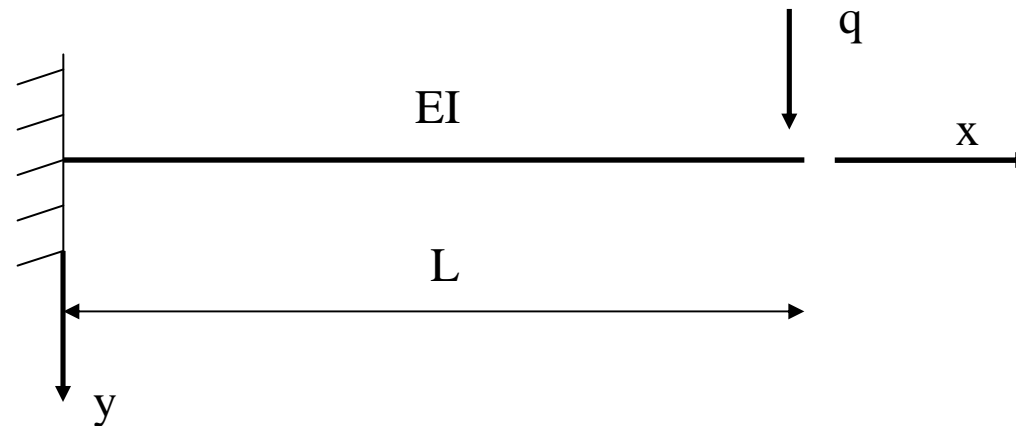
$$\begin{cases} \overbrace{y_1}^0 - 2y_2 + y_3 = f(x_2) \\ y_2 - 2y_3 + y_4 = f(x_3) \\ y_3 - 2y_4 + \overbrace{y_5}^0 = f(x_4) \end{cases} \rightarrow y_2, y_3, y_4$$

zapis **macierzowy** – do obliczeń **komputerowych**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

Zginany wspornik – równanie II rzędu

sformułowanie matematyczne – równanie różniczkowe zwyczajne II rzędu

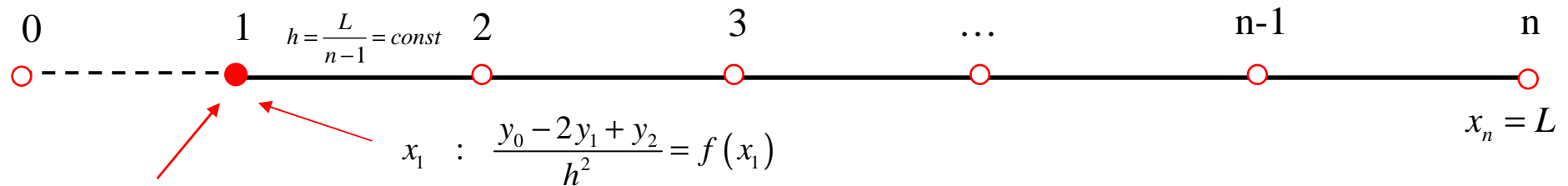


$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x) = -\frac{M(x)}{EI} \quad , \quad y'(0) = 0 \quad , \quad y(0) = 0$$

$$M(x) = -q(L - x)$$

Zginany wspornik – równanie II rzędu

- model obliczeniowy MRS – wariant I – **węzeł fikcyjny**

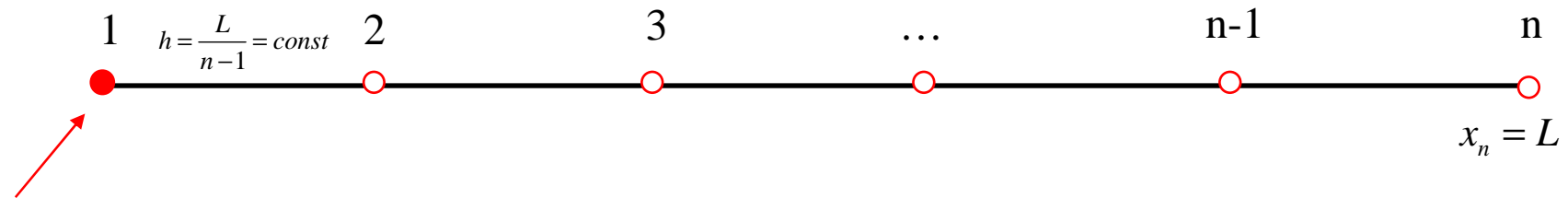


$$\begin{cases} \frac{y_2 - y_0}{2h} = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \rightarrow y_0 = y_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{2}{h^2} & \frac{2}{h^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Zginany wspornik – równanie II rzędu

- model obliczeniowy MRS – wariant II – **ulepszony operator brzegowy**



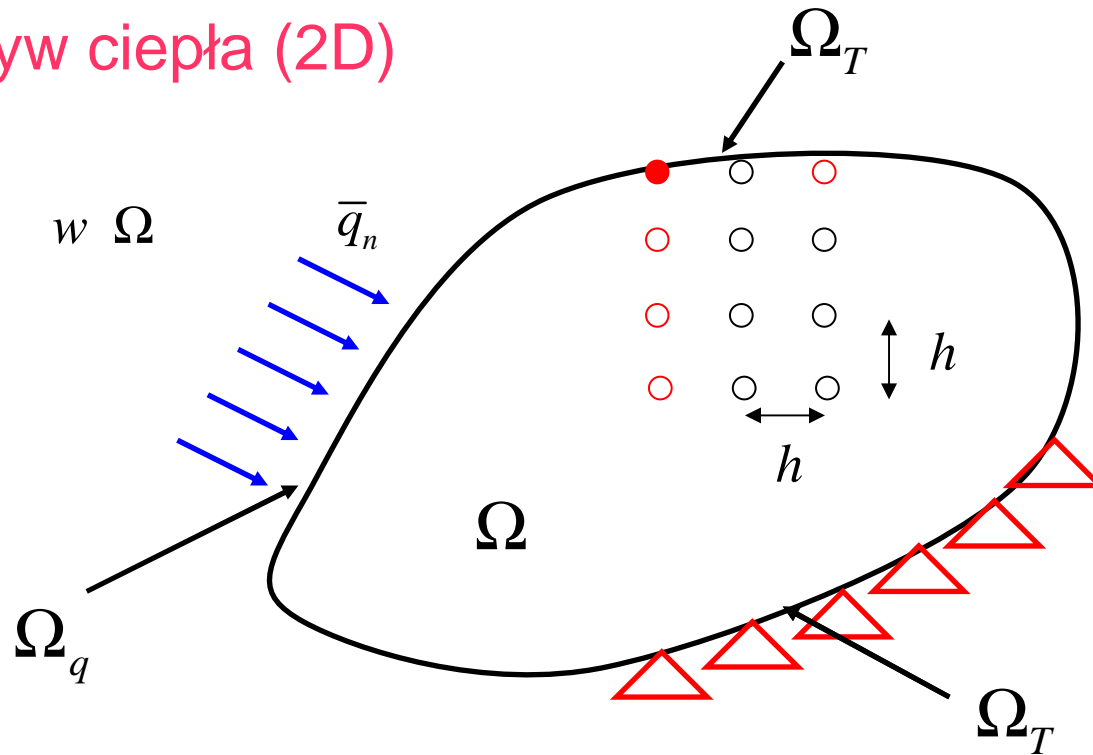
$$\begin{cases} -\frac{2}{h^2} y_1 - \frac{2}{h} y_1' + \frac{2}{h^2} y_2 = f(x_1) \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{2}{h^2} & \frac{2}{h^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

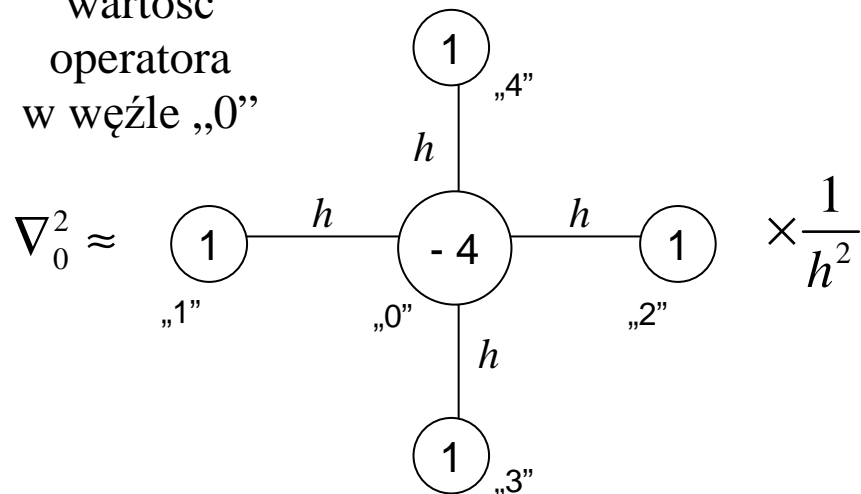
ten sam układ równań, co dla wariantu I

Ustalony przepływ ciepła (2D)

$$\begin{cases} \nabla^2 T = T''_{xx} + T''_{yy} = -\frac{f}{k} & \text{w } \Omega \\ T = \bar{T} & \text{na } \partial\Omega_T \\ k \frac{\partial T}{\partial n} = -\bar{q}_n & \text{na } \partial\Omega_q \end{cases}$$



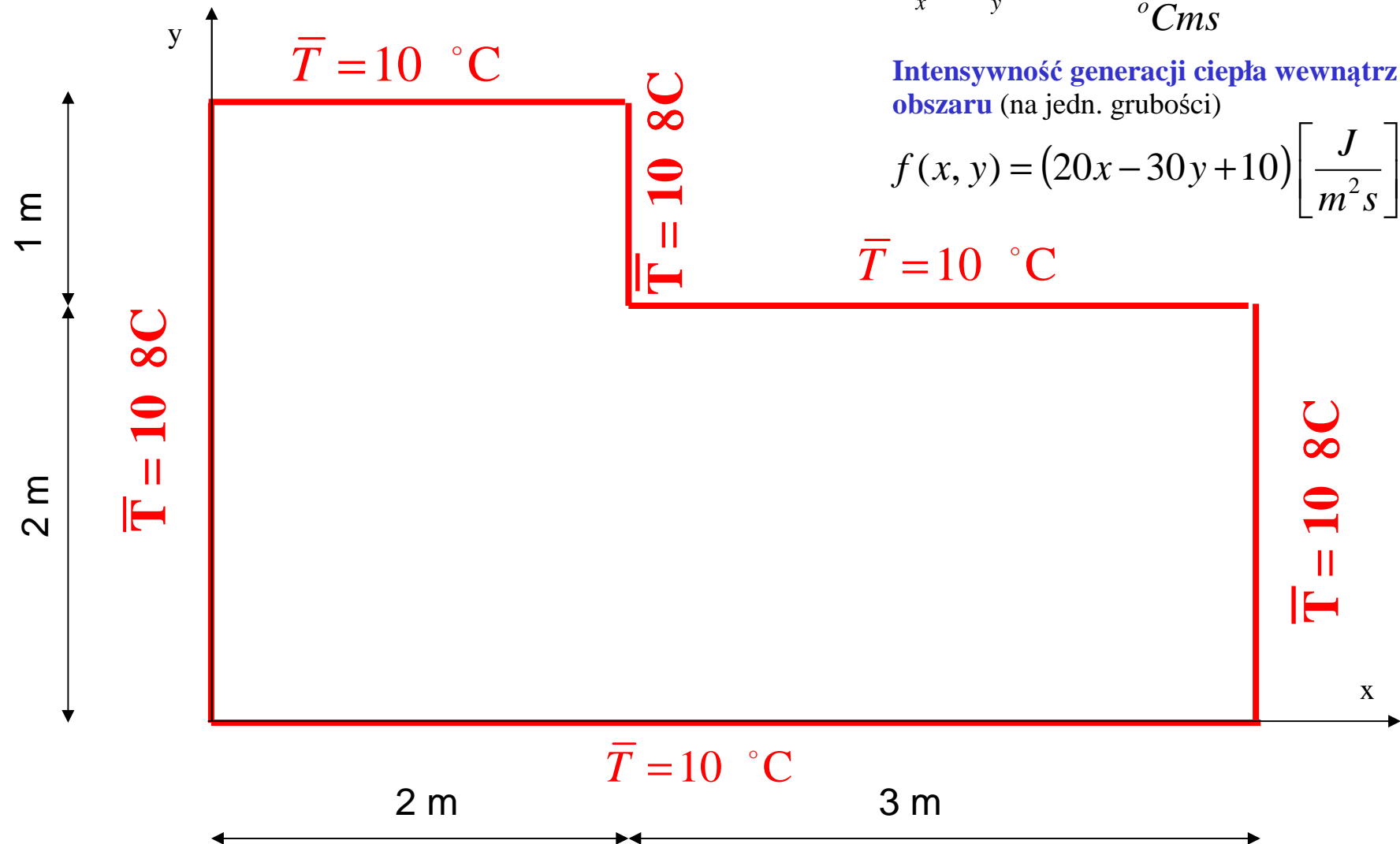
wartość operatora w węźle „0”



$$\nabla^2 T_0 = T_0''_{xx} + T_0''_{yy} \approx$$

$$= (T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0) \frac{1}{h^2}$$

Ustalony przepływ ciepła 2D – przykład obliczeń MRS



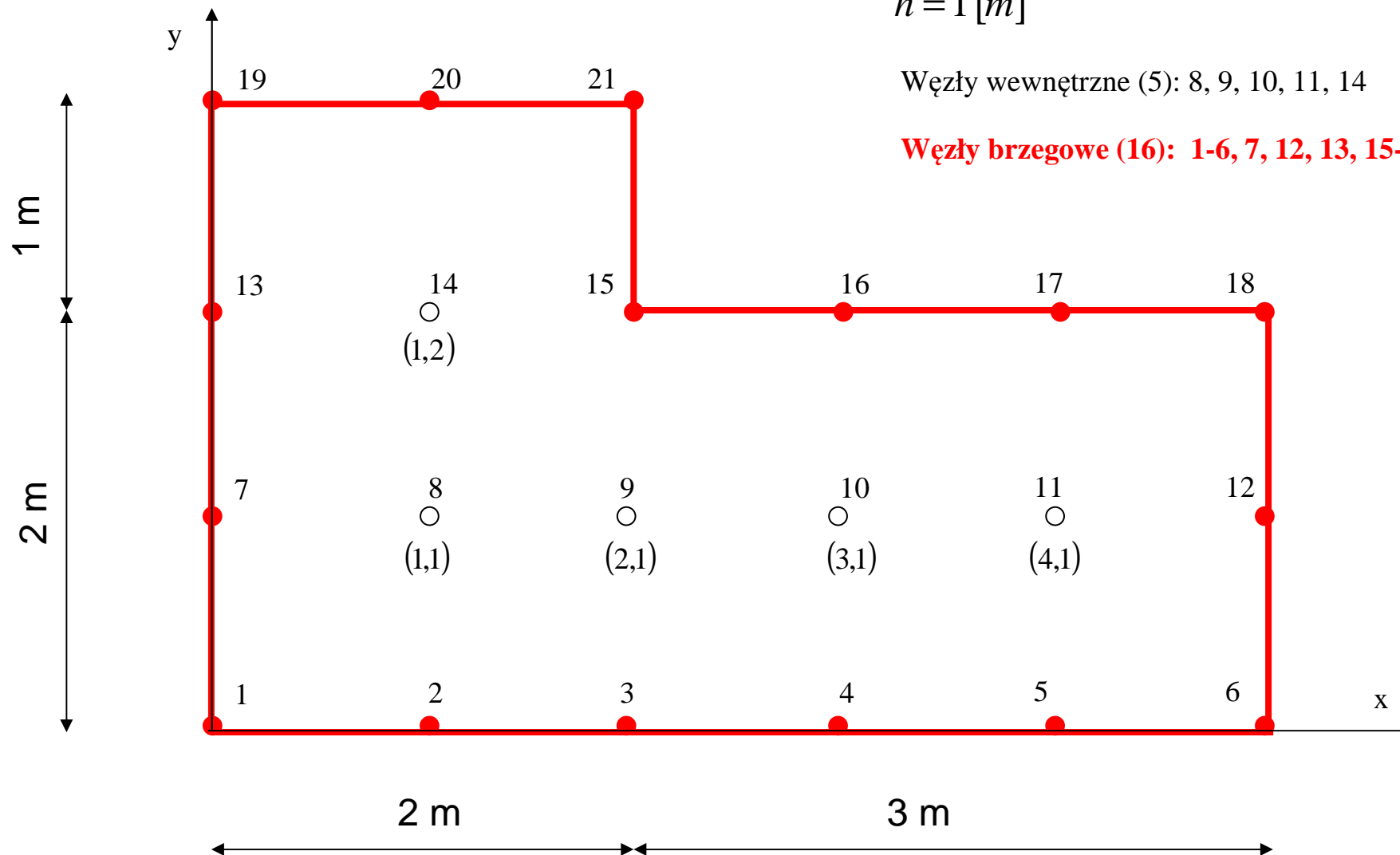
Ustalony przepływ ciepła 2D – przykład obliczeń MRS – siatka MRS

moduł siatki (21 węzłów)

$$h = 1 [m]$$

Węzły wewnętrzne (5): 8, 9, 10, 11, 14

Węzły brzegowe (16): 1-6, 7, 12, 13, 15-21



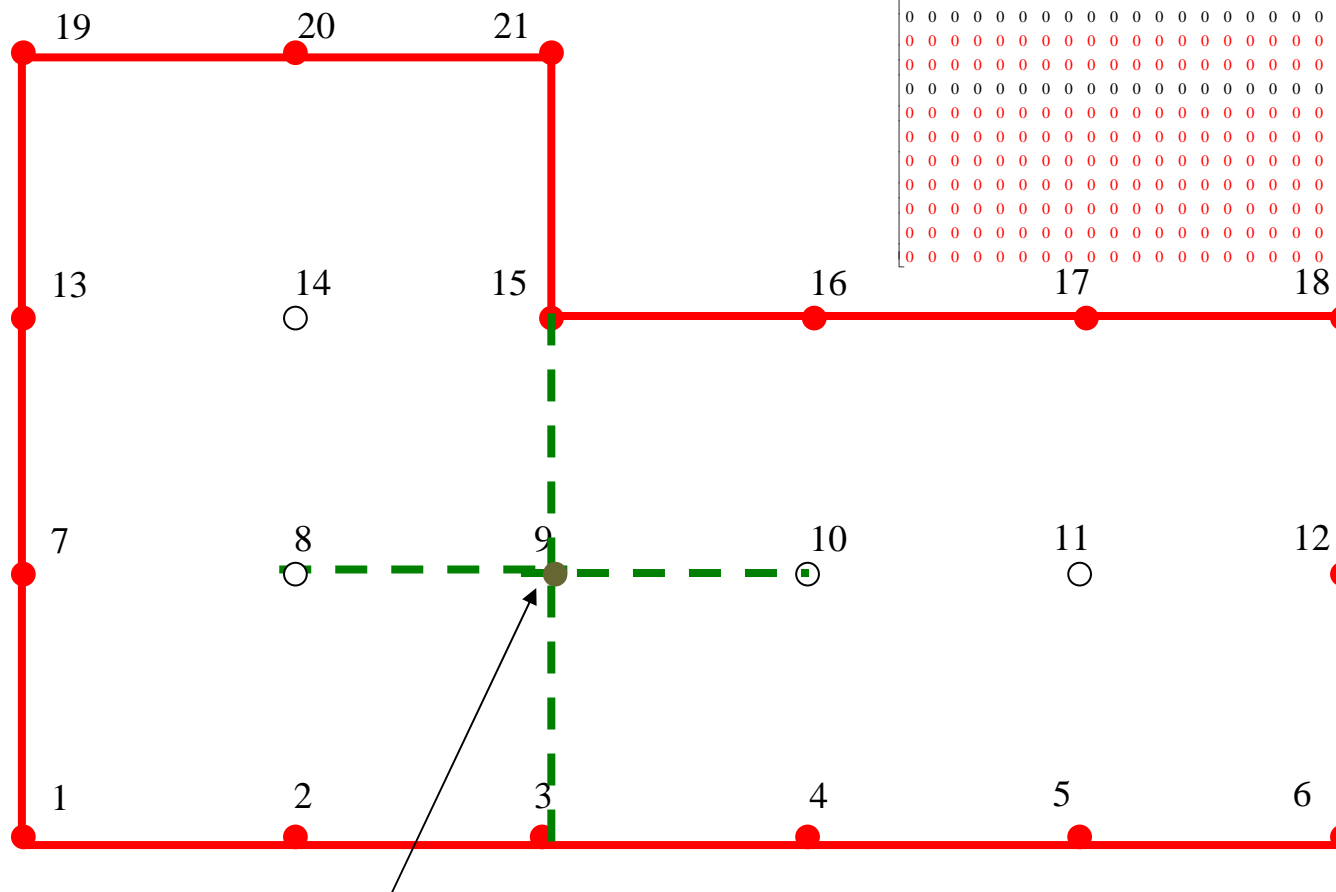
Ustalony przepływ ciepła 2D – przykład obliczeń MRS – układ równań

początkowa postać układu równań (21 x 21)
algebraicznych

równanie nr 1 - węzeł nr 1 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_1	0
równanie nr 2 - węzeł nr 2 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_2	0
równanie nr 3 - węzeł nr 3 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_3	0
równanie nr 4 - węzeł nr 4 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_4	0
równanie nr 5 - węzeł nr 5 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_5	0
równanie nr 6 - węzeł nr 6 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_6	0
równanie nr 7 - węzeł nr 7 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_7	0
równanie nr 8 - węzeł nr 8 - wnętrze	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_8	0
równanie nr 9 - węzeł nr 9 - wnętrze	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_9	0
równanie nr 10 - węzeł nr 10 - wnętrze	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{10}	0
równanie nr 11 - węzeł nr 11 - wnętrze	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{11}	0
równanie nr 12 - węzeł nr 12 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{12}	0
równanie nr 13 - węzeł nr 13 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{13}	0
równanie nr 14 - węzeł nr 14 - wnętrze	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{14}	0
równanie nr 15 - węzeł nr 15 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{15}	0
równanie nr 16 - węzeł nr 16 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{16}	0
równanie nr 17 - węzeł nr 17 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{17}	0
równanie nr 18 - węzeł nr 18 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{18}	0
równanie nr 19 - węzeł nr 19 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{19}	0
równanie nr 20 - węzeł nr 20 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{20}	0
równanie nr 21 - węzeł nr 21 - brzeg	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{21}	0

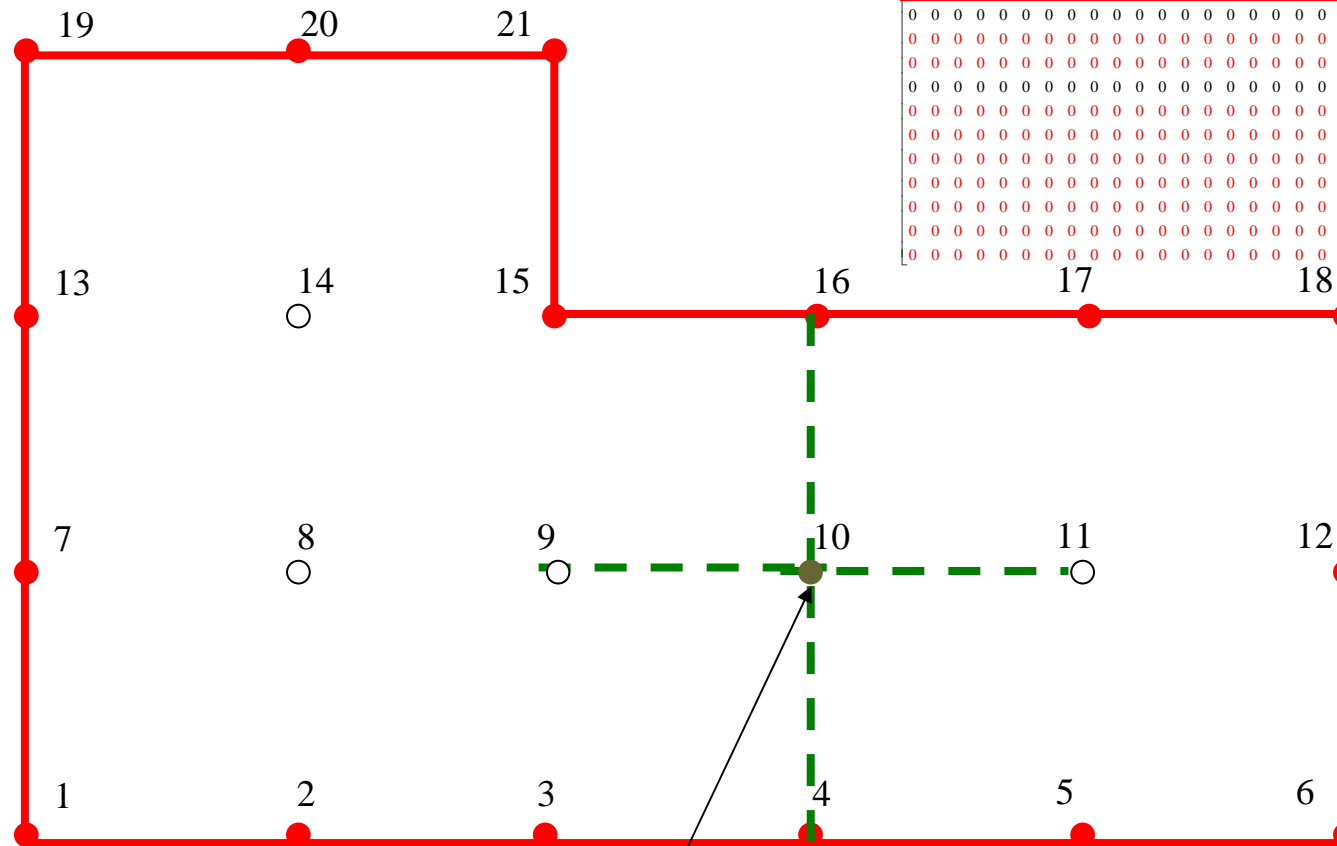
Ustalony przepływ ciepła 2D – przykład obliczeń MRS – równania różnicowe

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_1	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_3	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_5	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_6	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_7	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_8	0
0	1	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	T_9	-20/7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{10}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{11}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{12}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{13}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{14}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{15}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{16}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{17}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{18}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{19}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{20}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{21}	0



$$T_3 + T_{10} + T_{15} + T_8 - 4T_9 = -f(x_9, y_9) \frac{h^2}{k} = -\frac{20}{7}$$

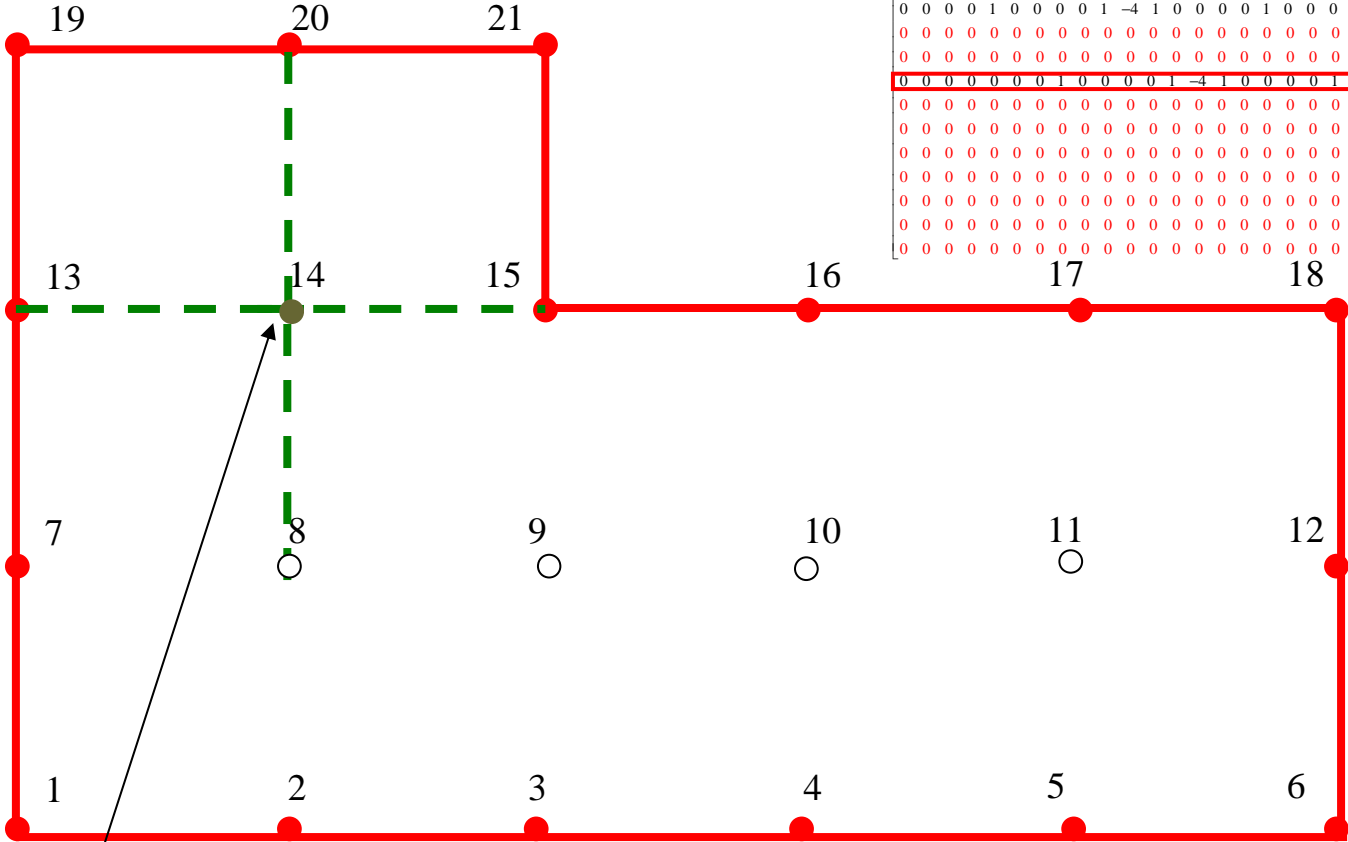
Ustalony przepływ ciepła 2D – przykład obliczeń MRS – równania różnicowe



0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_1	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_3	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_5	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_6	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_7	0
0	1	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	T_8	0
0	0	1	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	T_9	-20/7
0	0	0	1	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	T_{10}	-40/7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{11}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{12}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{13}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{14}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{15}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{16}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{17}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{18}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{19}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{20}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{21}	0

$$T_4 + T_{11} + T_{16} + T_9 - 4T_{10} = -f(x_{10}, y_{10}) \frac{h^2}{k} = -\frac{40}{7}$$

Ustalony przepływ ciepła 2D – przykład obliczeń MRS – równania różnicowe



0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_1	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_3	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_5	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_6	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_7	0
0	1	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	T_8	0
0	0	1	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	T_9	-20/7
0	0	0	1	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	T_{10}	-40/7
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	T_{11}	-60/7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{12}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{13}	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	1	0	0	T_{14}	30/7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{15}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{16}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{17}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{18}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{19}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{20}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{21}	0

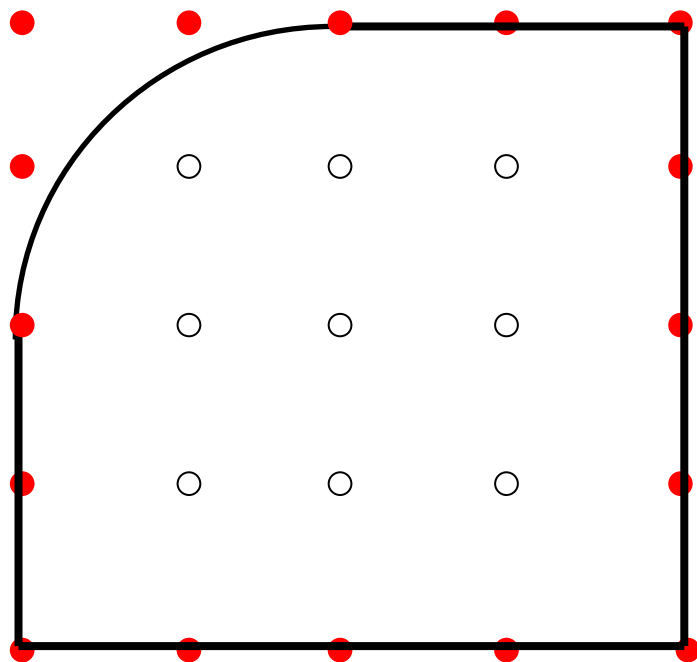
$$T_8 + T_{15} + T_{20} + T_{13} - 4T_{14} = -f(x_{14}, y_{14}) \frac{h^2}{k} = \frac{30}{7}$$

Ustalony przepływ ciepła 2D – przykład obliczeń MRS – układ równań

końcowa postać układu równań (21 x 21) algebraicznych

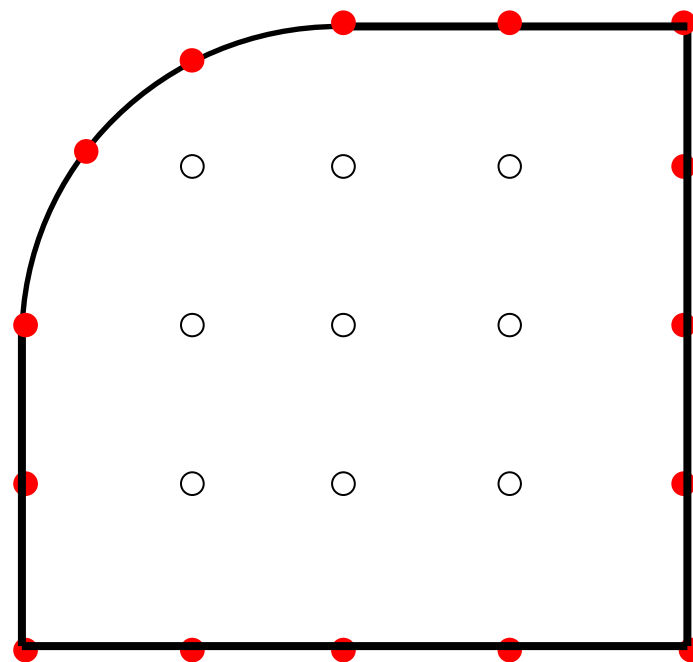
$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{14} \\ T_{15} \\ T_{16} \\ T_{17} \\ T_{18} \\ T_{19} \\ T_{20} \\ T_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 0 \\ -20/7 \\ -40/7 \\ -60/7 \\ 10 \\ 10 \\ 30/7 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{14} \\ T_{15} \\ T_{16} \\ T_{17} \\ T_{18} \\ T_{19} \\ T_{20} \\ T_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10.073 \\ 11.346 \\ 12.454 \\ 12.756 \\ 10 \\ 10 \\ 8.947 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Krzywoliniowy brzeg



MRS klasyczna

?



MRS dla siatek nieregularnych

Bilans MRS i MES

MRS:

zalety:

- Najstarsza metoda komputerowa
- Łatwość implementacji
- Istnienie wersji lokalnej
- Łatwa generacja siatki
- Dydaktyczny charakter

wady:

- Trudności przy krzywoliniowym brzegu
- Nie można przeprowadzić adaptacji
- Nie można lokalnie zagęszczać siatki
(naroża, obciążenia skupione, ...)
- Trudna do automatyzacji

MES:

zalety:

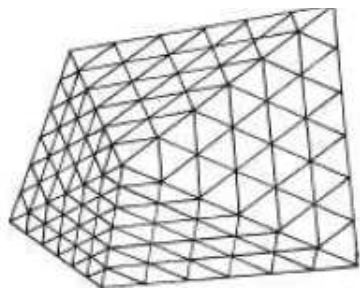
- Najbardziej powszechna
metoda komputerowa
- Podstawa programów komputerowych
- Szerokie pole zastosowań
- Ogromna biblioteka
elementów skończonych
- Duża dokładność rozwiązania

wady:

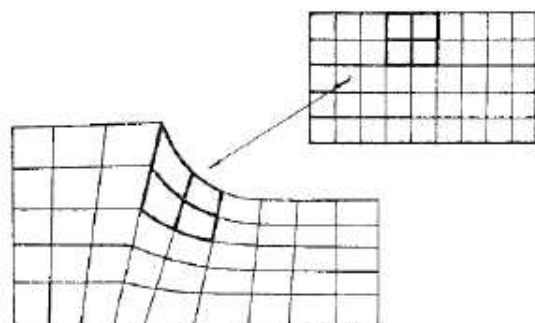
- Kłopotliwa generacja siatki dla obszarów
o skomplikowanej geometrii
 - Mało efektywna przy częstej przebudowie siatki
 - Uwzględnianie nieliniowości geometrycznych
(duże przemieszczenia, ...)
 - Trudności w analizie ruchomego brzegu, rozwoju
szczeliny
 - Zjawisko blokady
-

Bezsiatkowa metoda różnic skończonych

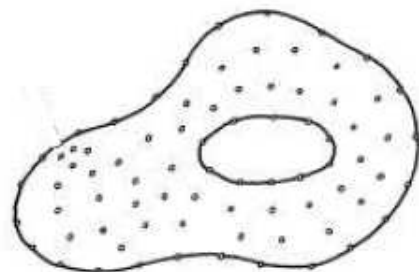
Siatki nieregularne



a) SIATKA REGULARNA W PODOBSZARACH



b) SIATKA NIEREGULARNA, RZUTOWANA Z SIATKI REGULARNEJ



c) DOWOLNIE NIEREGULARNA SIATKA

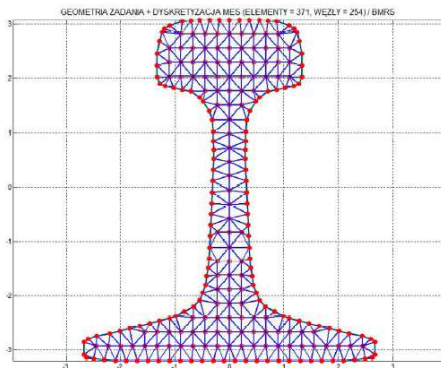
SIATKI O RÓŻNYM STOPNIU NIEREGULARNOŚCI

Bezsiatkowa (Uogólniona) Metoda Różnic Skończonych BMRS

- **DOWOLNIE NIEREGULARNE CHMURY WĘZŁÓW**
(WĘZŁY NIE POWIĄZANE ZE SOBĄ ŻADNĄ STRUKTURĄ
TYPU SIATKA REGULARNA CZY ELEMENT) } *Cecha
metod bezsiatkowych MB*
- KAŻDY WĘZŁ MOŻE BYĆ **USUNIĘTY, DODANY, PRZESUNIĘTY**
(ADAPTACJA TYPU h , OBCIĄŻENIE SKUPIONE, SZCZELINA, WĘDRUJĄCY BRZEG, ...)
- ZAMIANA **OPERATORÓW RÓŻNICZKOWYCH** NA **RÓŻNICOWE** *Cecha metod różnicowych MRS*
- **APROKSYMACJA LOKALNA** JEST OPARTA NA GRUPIE WĘZŁÓW, DOKONYWANA
METODĄ NAJMNIEJSZYCH WAŻONYCH KROCZĄCYCH KWADRATÓW

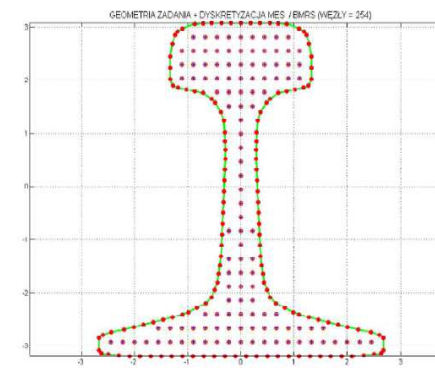
Cecha metody BMRS

METODA
ELEMENTÓW
SKOŃCZONYCH



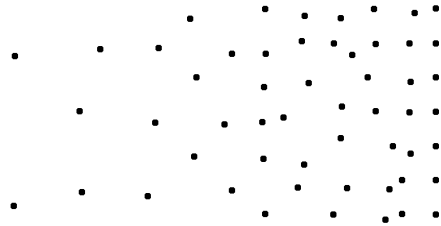
Dyskretyzacja przekroju szyny kolejowej za pomocą MES

METODA
BEZSIATKOWA
(np. BMRS)

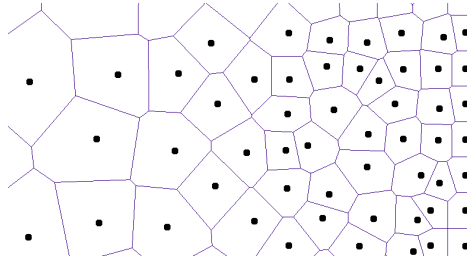


Dyskretyzacja przekroju szyny kolejowej za pomocą BMRS

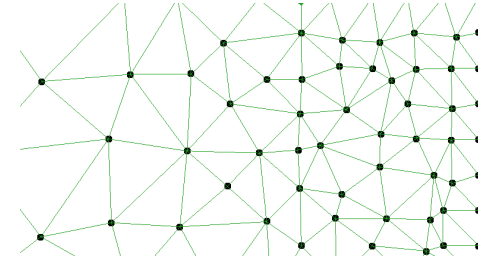
Generacja węzłów



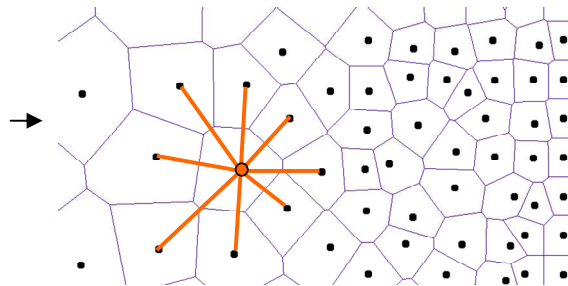
Topologia - wielokąty



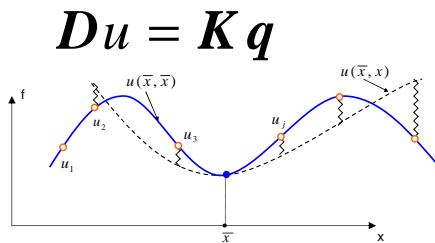
Topologia - trójkąty



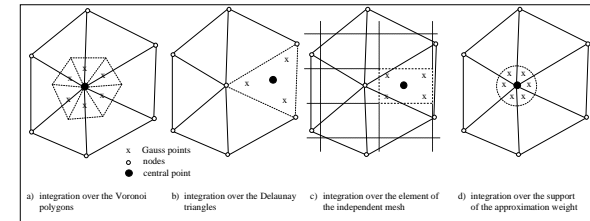
Generacja gwiazd



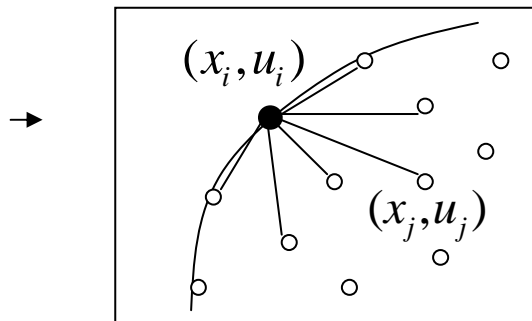
Generacja wzorów różnicowych (MWLS)



Całkowanie numeryczne



Uwzględnienie warunków brzegowych



Generacja równań różnicowych

- kolokacja
- minimum funkcjonału
- równanie wariacyjne

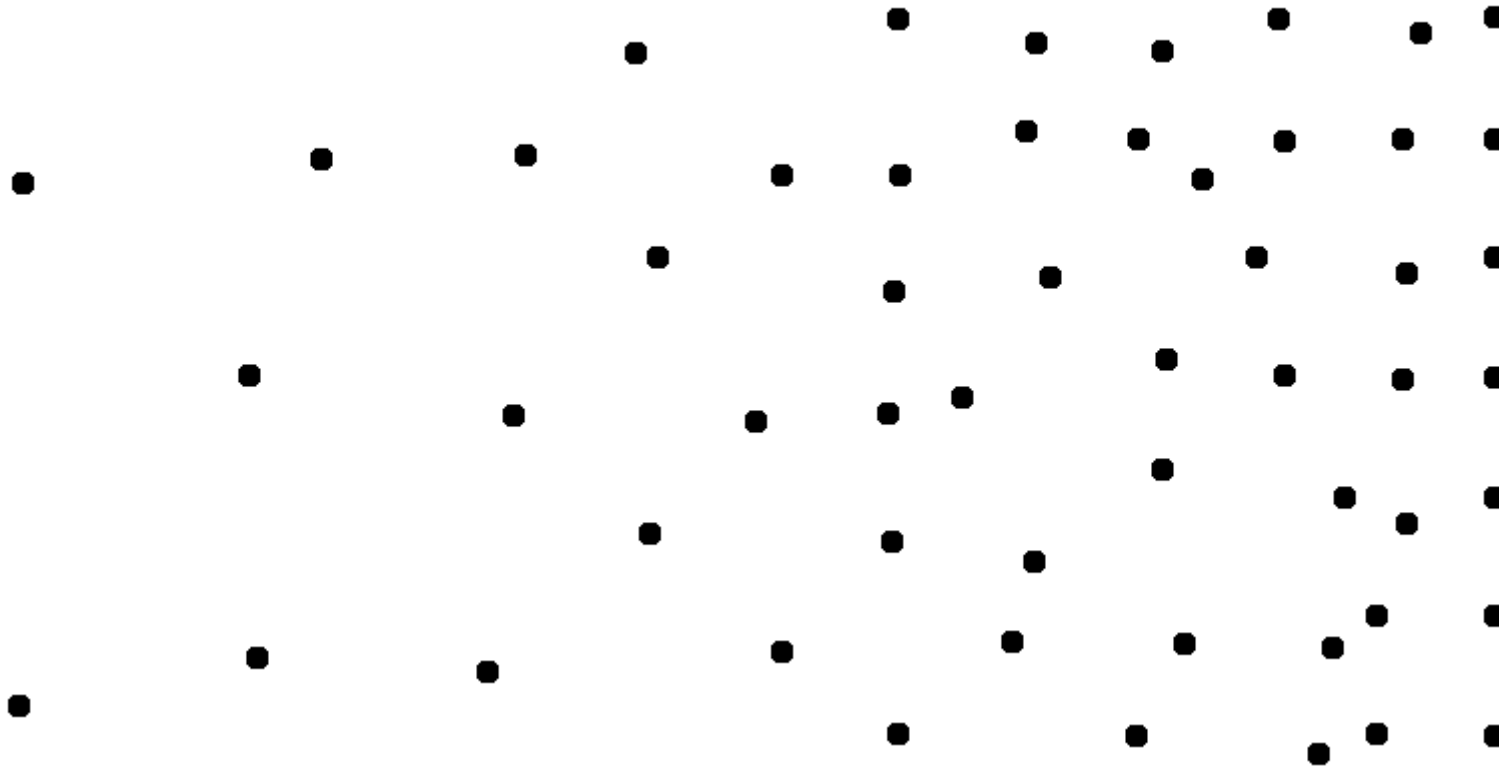
Rozwiązanie układu Równań

+
Postprocessing

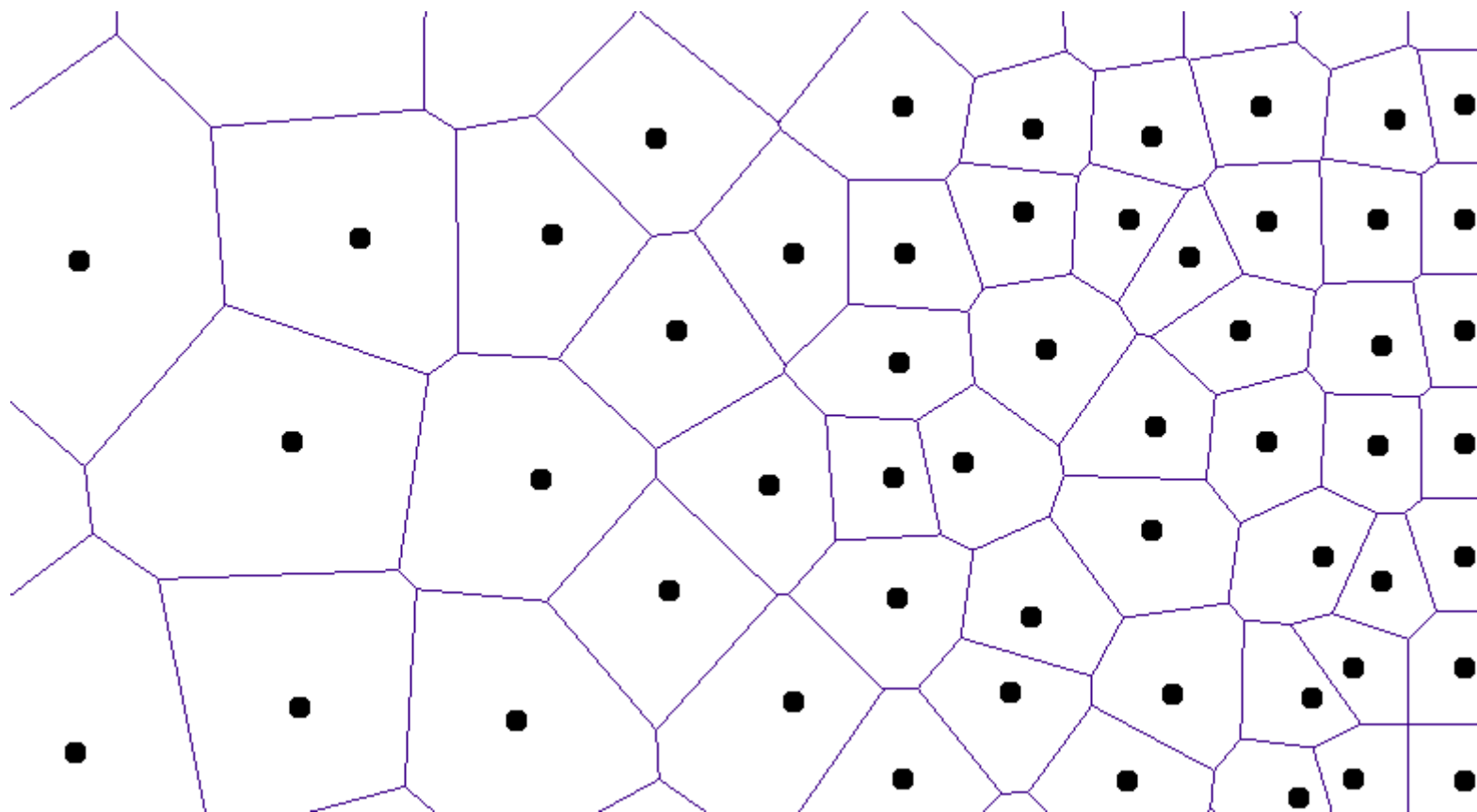
Generacja węzłów : **Kryterium generacji:**

$$\rho^{-1} - \rho_{\max}^{-1} \geq \bar{p}$$

\bar{p} - funkcja określająca żadaną gęstość siatki

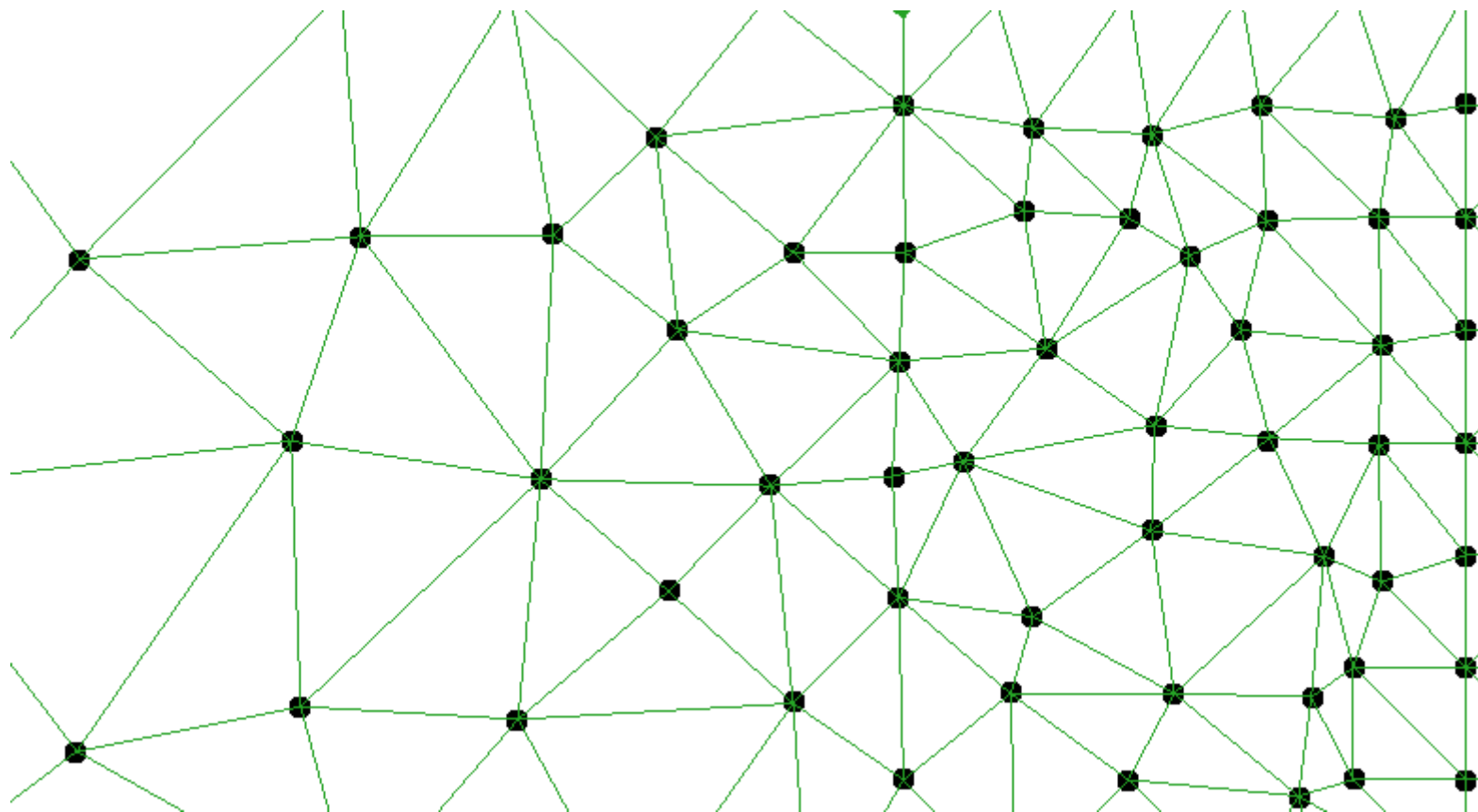


Podział obszaru



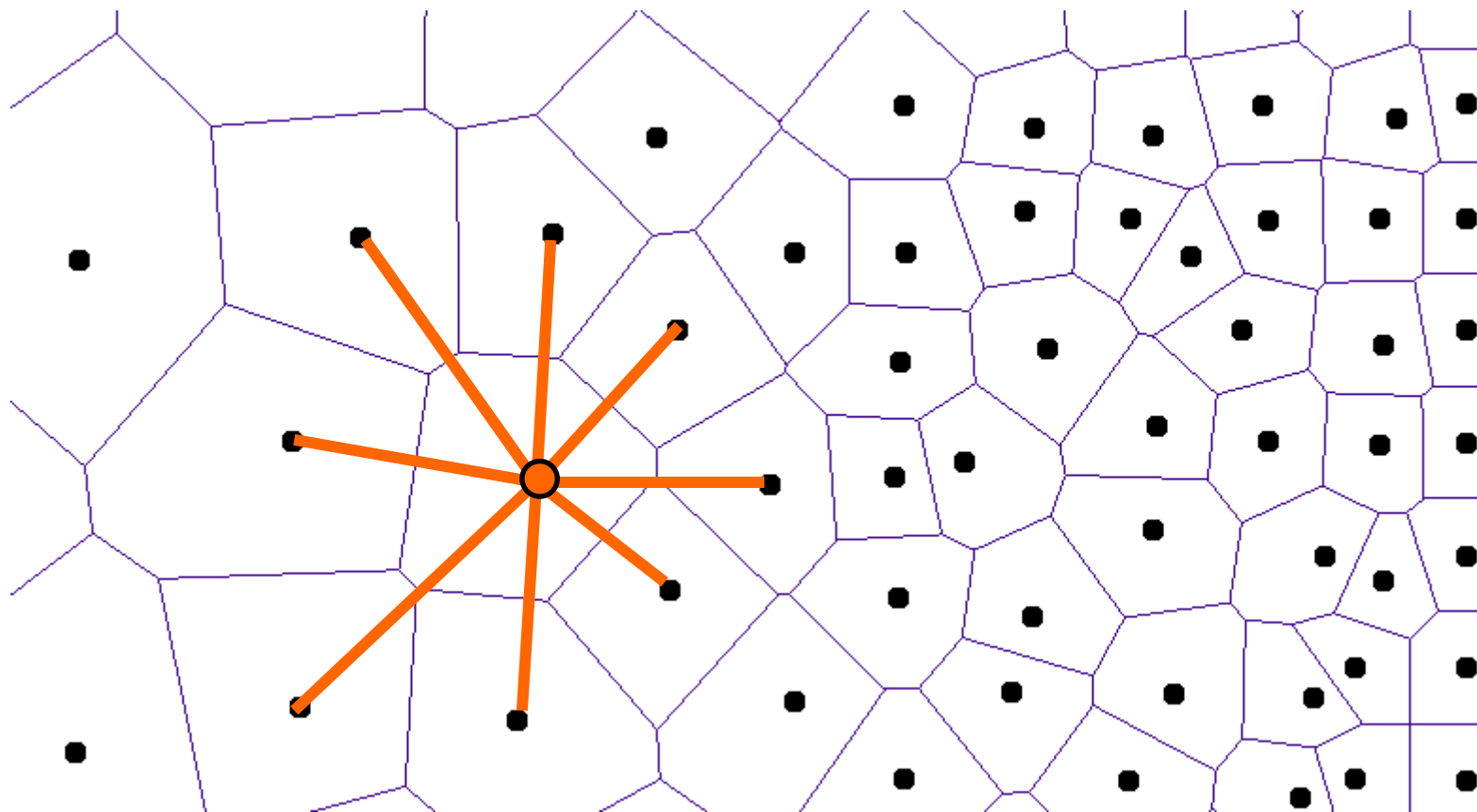
Tessalacja Voronoi

Połączenia węzłowe



Triangulacja Delaunay

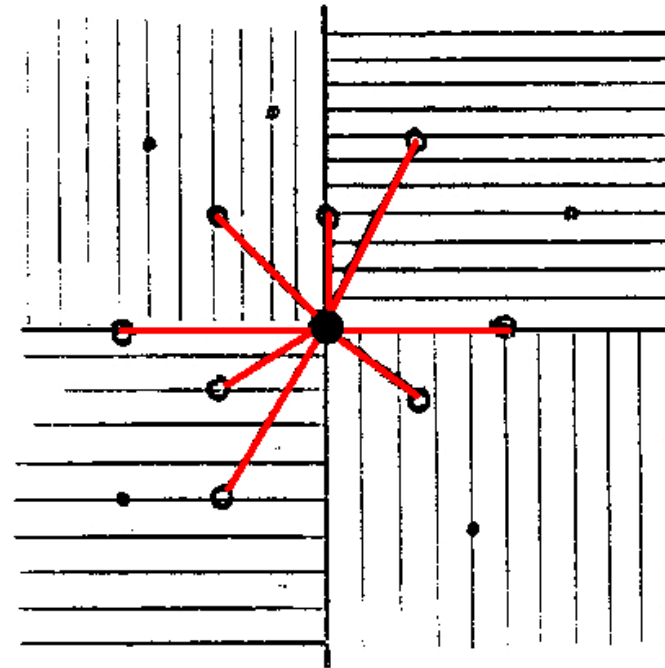
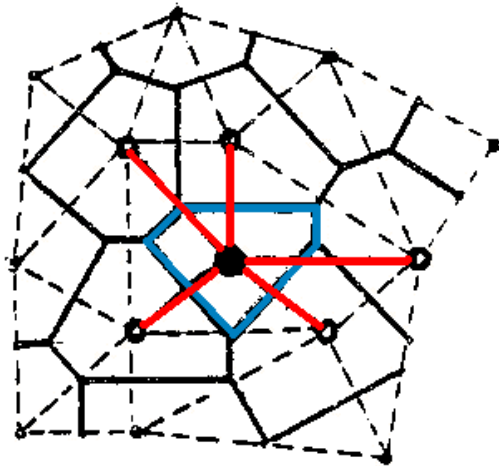
Determinacja topologii



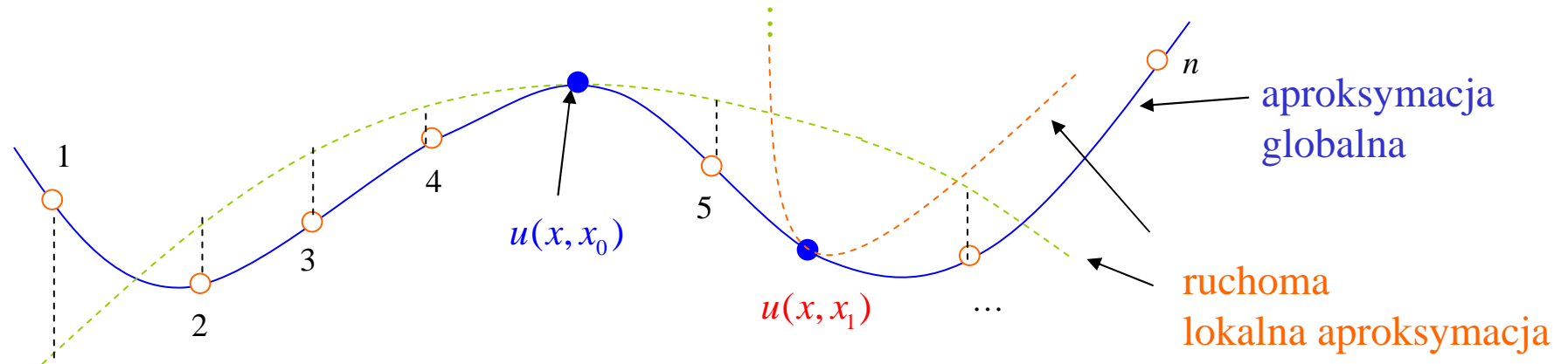
Sąsiedztwa węzłowe

Optymalna selekcja gwiazd różnicowych

- Kryteria selekcji
 - sąsiadów Voronoi
 - „krzyża”



Aproksymacja MWLS – idea 1D



Aproksymacja lokalna 1D – zapis **tradycyjny (wielomianowy)**

$$u(x, x_0) = a_1 + a_2 (x - x_0) + a_3 (x - x_0)^2 + \dots + a_{p+1} (x - x_0)^p =$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1} a_i (x - x_0)^{i-1}$$

a_i - **matematyczne**
stopnie swobody

Aproksymacja lokalna 1D – zapis **bezsiatkowy (rozwiniecie w szereg Taylora)**

$$u(x, x_0) = u_0 + \frac{du}{dx} \Big|_0 h + \frac{1}{2} \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_0 h^2 + \dots + \frac{1}{p!} \frac{d^p u}{dx^p} \Big|_0 h^p = \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} \frac{d^i u}{dx^i} \Big|_0 h^i$$

$$h = x - x_0 \quad \frac{d^i u}{dx^i} \Big|_0 \text{ - **fizyczne** (mechaniczne)}$$

stopnie swobody

Aproksymacja MWLS

aproksymacja lokalna

$$u(x, x_0) = \mathbf{p}^T \mathbf{D}u \quad \mathbf{p}_{[p+1 \times 1]} = \begin{bmatrix} 1 \\ h \\ \dots \\ h^p \\ \frac{h^p}{p!} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}u_{[p+1 \times 1]} = \begin{bmatrix} \{u_0\} \\ u'_0 \\ \dots \\ u_0^{(p)} \end{bmatrix} \quad \{u_0\} - \text{występuje, gdy dany punkt nie jest węzłem}$$

ważona funkcja błędu

$$J = (\mathbf{P}\mathbf{D}u - \mathbf{q})^T \mathbf{W}^2 (\mathbf{P}\mathbf{D}u - \mathbf{q}) \quad \mathbf{q}_{[n \times 1]}^T = [u_1, \dots, u_n]$$

$$\mathbf{P}_{[n \times p+1]} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(h_1) \\ \mathbf{p}^T(h_2) \\ \dots \\ \mathbf{p}^T(h_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_{[n \times n]} = \begin{bmatrix} \omega(x-x_0) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \omega(x-x_n) \end{bmatrix}$$

minimalizacja błędu

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{D}u} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}^2 (\mathbf{P}\mathbf{D}u - \mathbf{q}) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{D}u = (\mathbf{P}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{q} = \mathbf{M}\mathbf{q}$$

$$\mathbf{D}u = \mathbf{M}\mathbf{q}$$

$$\mathbf{M}_{[p+1 \times n]} = (\mathbf{P}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{W}^2$$

Macierz wzorów różnicowych

Aproksymacja MWLS

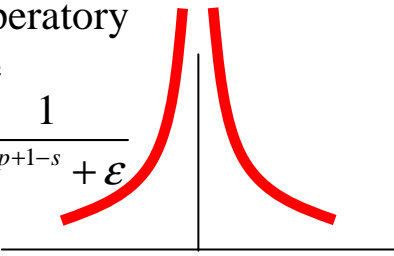
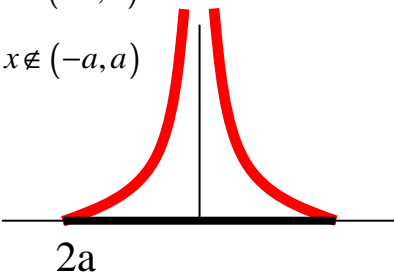
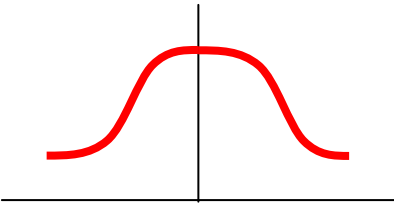
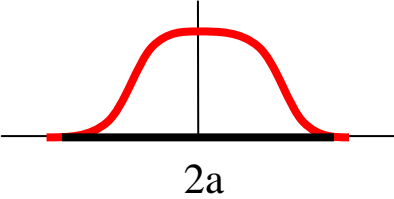
FUNKCJE WAGOWE

$$\omega(x - x_0) = f(d)$$

$$d = \|x - x_0\|$$

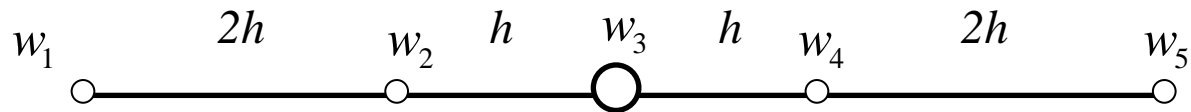
powszechnie stosowane

KLASYFIKACJA

	nośnik nieskończony (wygodne dla obliczeń)	nośnik skończony (wygodne dla matematycznych dowodów)
osobliwe interpolacja	BMRS: operatory różnicowe $\omega(d) = \frac{1}{d^{p+1-s} + \varepsilon}$ 	$\omega(d) = \begin{cases} \frac{1}{d^{p+1-s} + \varepsilon} & , x \in (-a, a) \\ 0 & , x \notin (-a, a) \end{cases}$ BMRS: operatory różnicowe 
nieosobliwe wygładzanie	BMRS: wygładzanie danych 	EFG, metody jądrowe, hp-clouds BMRS: wygładzanie danych 

Aproksymacja MWLS – przykład obliczeniowy 1D

Zał: $p = 2$ (aproksymacja lokalna za pomocą **paraboli**) Szukane: $w'_3 = ?$, $w''_3 = ?$



rozwinięcie w szereg Taylora wartości funkcji w węzłach względem węzła (punktu) centralnego

funkcja **wagowa** (dla 1D: $d = |h|$)

$$\omega(d) = \frac{1}{d^{p+1-s} + \varepsilon} \rightarrow \omega(h) = \frac{1}{|h|^{2+1-0}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = w_3 - 3hw'_3 + \frac{1}{2}(3h)^2 w''_3 + \dots \approx \bar{w}_1 \\ w_2 = w_3 - hw'_3 + \frac{1}{2}h^2 w''_3 + \dots \approx \bar{w}_2 \\ w_3 = w_3 \\ w_4 = w_3 + hw'_3 + \frac{1}{2}h^2 w''_3 + \dots \approx \bar{w}_4 \\ w_5 = w_3 + 3hw'_3 + \frac{1}{2}(3h)^2 w''_3 + \dots \approx \bar{w}_5 \end{array} \right.$$

budowa **funkcji błędu**

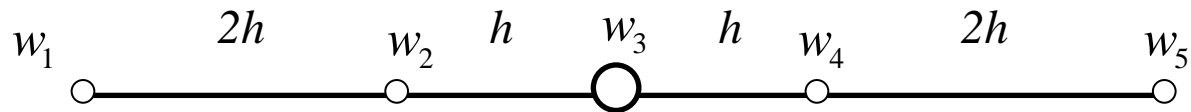
$$J = (\bar{w}_1 - w_1)^2 \left(\frac{1}{(3h)^3} \right)^2 + (\bar{w}_2 - w_2)^2 \left(\frac{1}{h^3} \right)^2 + \dots$$

$$+ 0 + (\bar{w}_4 - w_4)^2 \left(\frac{1}{h^3} \right)^2 + (\bar{w}_5 - w_5)^2 \left(\frac{1}{(3h)^3} \right)^2$$

Aproksymacja MWLS – przykład obliczeniowy 1D

Zał: $p = 2$ (aproksymacja lokalna za pomocą paraboli)

Szukane: $w'_3 = ?$, $w''_3 = ?$



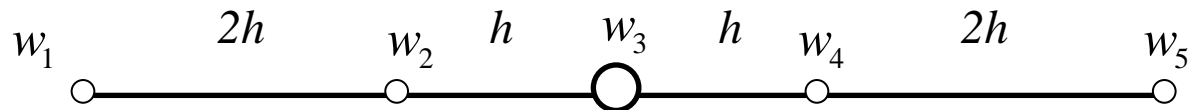
minimalizacja funkcji błędu $\min_{(w'_3, w''_3)} J \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial w'_3} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial w''_3} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial w'_3} = \frac{2}{729h^6}(\bar{w}_1 - w_1) \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial w'_3} + \frac{2}{h^6}(\bar{w}_2 - w_2) \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial w'_3} + \frac{2}{h^6}(\bar{w}_4 - w_4) \frac{\partial \bar{w}_4}{\partial w'_3} + \frac{2}{729h^6}(\bar{w}_5 - w_5) \frac{\partial \bar{w}_5}{\partial w'_3} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial w''_3} = \frac{2}{729h^6}(\bar{w}_1 - w_1) \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial w''_3} + \frac{2}{h^6}(\bar{w}_2 - w_2) \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial w''_3} + \frac{2}{h^6}(\bar{w}_4 - w_4) \frac{\partial \bar{w}_4}{\partial w''_3} + \frac{2}{729h^6}(\bar{w}_5 - w_5) \frac{\partial \bar{w}_5}{\partial w''_3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\bar{w}_1 - w_1)(-3h) + 729(\bar{w}_2 - w_2)(-h) + 729(\bar{w}_4 - w_4)h + (\bar{w}_5 - w_5)3h = 0 \\ (\bar{w}_1 - w_1)\frac{9}{2}h^2 + 729(\bar{w}_2 - w_2)\frac{1}{2}h^2 + 729(\bar{w}_4 - w_4)\frac{1}{2}h^2 + (\bar{w}_5 - w_5)\frac{9}{2}h^2 = 0 \end{cases}$$

Aproksymacja MWLS – przykład obliczeniowy 1D

Zał: $p = 2$ (aproksymacja lokalna za pomocą paraboli) Szukane: $w'_3 = ?$, $w''_3 = ?$

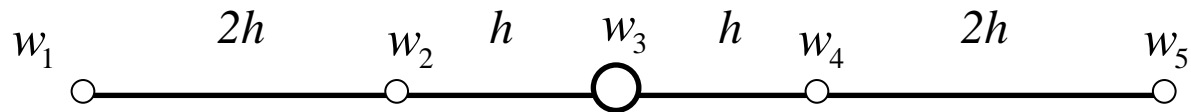


$$\begin{cases} -(\bar{w}_1 - w_1) - 243(\bar{w}_2 - w_2) + 243(\bar{w}_4 - w_4) + (\bar{w}_5 - w_5) = 0 \\ (\bar{w}_1 - w_1) + 81(\bar{w}_2 - w_2) + 81(\bar{w}_4 - w_4) + (\bar{w}_5 - w_5) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\left(w_3 - 3hw'_3 + \frac{1}{2}(3h)^2 w''_3 - w_1\right) - 243\left(w_3 - hw'_3 + \frac{1}{2}h^2 w''_3 - w_2\right) + \\ + 243\left(w_3 + hw'_3 + \frac{1}{2}h^2 w''_3 - w_4\right) + \left(w_3 + 3hw'_3 + \frac{1}{2}(3h)^2 w''_3 - w_5\right) = 0 \\ \left(w_3 - 3hw'_3 + \frac{1}{2}(3h)^2 w''_3 - w_1\right) + 81\left(w_3 - hw'_3 + \frac{1}{2}h^2 w''_3 - w_2\right) + \\ + 81\left(w_3 + hw'_3 + \frac{1}{2}h^2 w''_3 - w_4\right) + \left(w_3 + 3hw'_3 + \frac{1}{2}(3h)^2 w''_3 - w_5\right) = 0 \end{cases}$$

Aproksymacja MWLS – przykład obliczeniowy 1D

Zał: $p = 2$ (aproksymacja lokalna za pomocą paraboli) Szukane: $w'_3 = ?$, $w''_3 = ?$



$$\begin{cases} 492h \cdot w'_3 = -w_1 - 243w_2 + 243w_4 + w_5 \\ 90h^2 \cdot w''_3 = w_1 + 81w_2 - 164w_3 + 81w_4 + w_5 \end{cases}$$

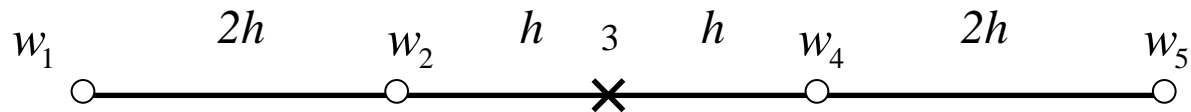
$$\begin{cases} w'_3 \approx \frac{-w_1 - 243w_2 + 243w_4 + w_5}{492h} \\ w''_3 \approx \frac{w_1 + 81w_2 - 164w_3 + 81w_4 + w_5}{90h^2} \end{cases}$$

np. dla $w(x) = \sin(x)$ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$, $x_4 = \frac{2\pi}{3}$, $x_5 = \pi$ $\rightarrow h = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{cases} w'_3 \approx \frac{-w_1 - 243w_2 + 243w_4 + w_5}{492h} = 0 \\ w''_3 \approx \frac{w_1 + 81w_2 - 164w_3 + 81w_4 + w_5}{90h^2} = -0.9607 \end{cases} \quad \begin{cases} e = 0 \\ e = \left| \frac{-0.9607 - (-1)}{-1} \right| = 0.0393 \approx 4\% \end{cases}$$

Aproksymacja MWLS – przykład obliczeniowy 1D

Zał: $p = 1$ (aproksymacja lokalna za pomocą **f.linijowej**) Szukane: $w_3 = ?$, $w'_3 = ?$



rozwińnięcie w szereg Taylora wartości funkcji w węzłach względem węzła (punktu) centralnego

$$\begin{cases} w_1 = w_3 - 3hw'_3 + \dots \approx \bar{w}_1 \\ w_2 = w_3 - hw'_3 + \dots \approx \bar{w}_2 \\ w_4 = w_3 + hw'_3 + \dots \approx \bar{w}_4 \\ w_5 = w_3 + 3hw'_3 + \dots \approx \bar{w}_5 \end{cases}$$

funkcja **wagowa**

$$\omega(d) = \frac{1}{d^{p+1-s} + \varepsilon} \rightarrow \omega(h) = \frac{1}{|h|^{1+1-0}}$$

budowa **funkcji błędu**

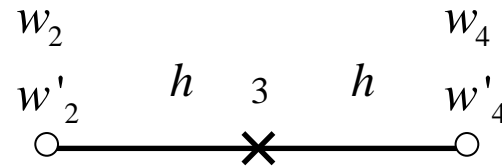
$$J = (\bar{w}_1 - w_1)^2 \left(\frac{1}{(3h)^2} \right)^2 + (\bar{w}_2 - w_2)^2 \left(\frac{1}{h^2} \right)^2 + (\bar{w}_4 - w_4)^2 \left(\frac{1}{h^2} \right)^2 + (\bar{w}_5 - w_5)^2 \left(\frac{1}{(3h)^2} \right)^2$$

minimalizacja funkcji błędu

$$\min_{(w_3, w'_3)} J \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial w_3} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial w'_3} = 0 \end{cases}$$

Aproksymacja MWLS – przykład obliczeniowy 1D

Zał: $p = 1$ (aproksymacja lokalna za pomocą **f.liniiowej**) Szukane: $w_3 = ?$, $w'_3 = ?$



rozwińnięcie w szereg Taylora wartości funkcji w węzłach względem węzła (punktu) centralnego

$$\begin{cases} w_2 = w_3 - hw'_3 + \dots \approx \bar{w}_2, & s = 0 \\ w'_2 = w'_3 - h w''_3 + \dots \approx \bar{w}'_2, & s = 1 \\ w_4 = w_3 + hw'_3 + \dots \approx \bar{w}_4, & s = 0 \\ w'_4 = w'_3 + h w''_3 + \dots \approx \bar{w}'_4, & s = 1 \end{cases}$$

funkcja **wagowa**

$$\omega(d) = \frac{1}{d^{p+1-s} + \varepsilon} \rightarrow \omega(h) = \frac{1}{|h|^{1+1-s}}$$

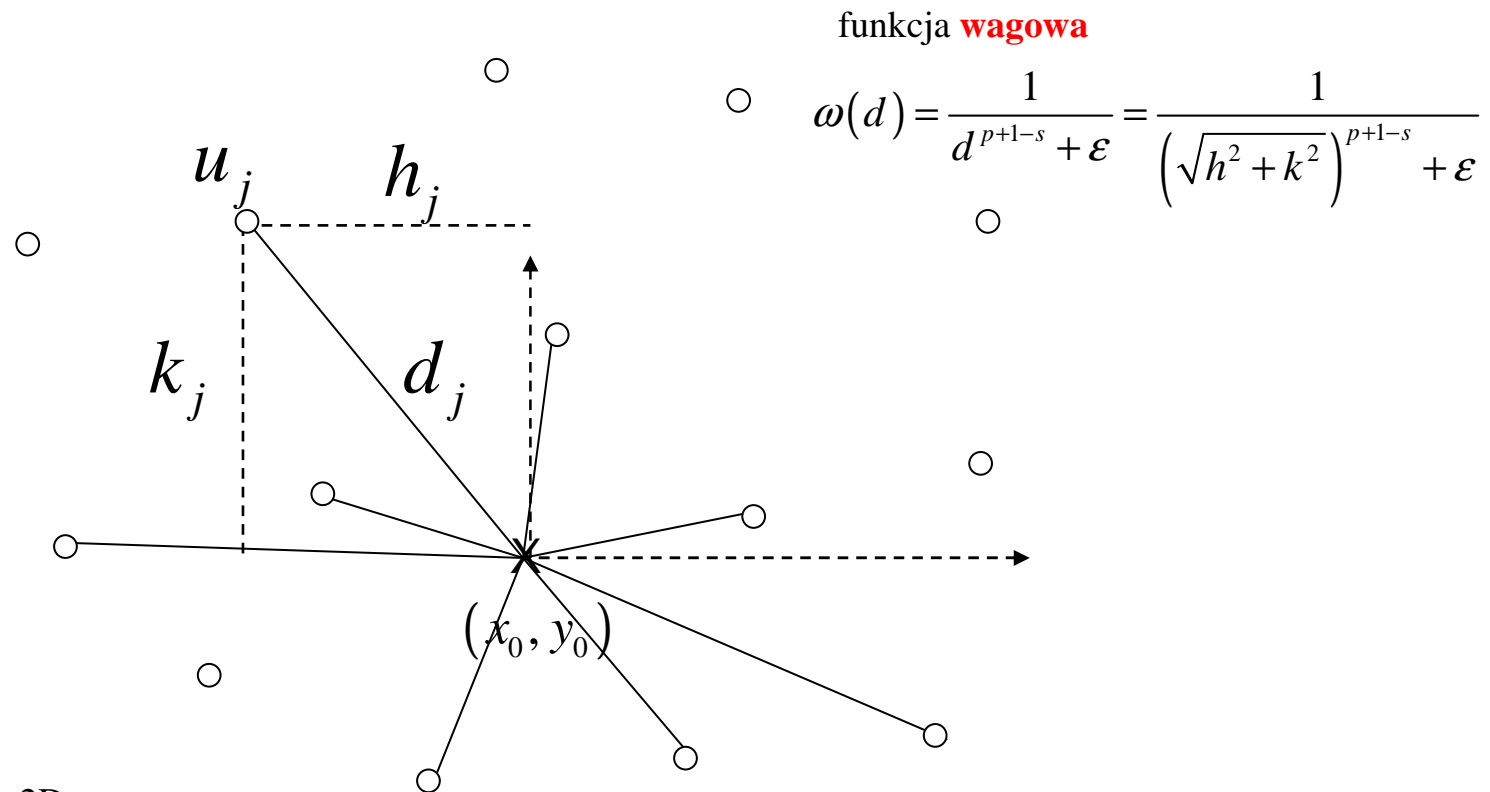
budowa **funkcji błędu**

$$J = (\bar{w}_2 - w_2)^2 \left(\frac{1}{h^2}\right)^2 + (\bar{w}'_2 - w'_2)^2 \left(\frac{1}{h}\right)^2 + (\bar{w}_4 - w_4)^2 \left(\frac{1}{h^2}\right)^2 + (\bar{w}'_4 - w'_4)^2 \left(\frac{1}{h}\right)^2$$

minimalizacja funkcji błędu

$$\min_{(w_3, w'_3)} J \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial w_3} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial w'_3} = 0 \end{cases}$$

Aproksymacja MWLS – idea 2D

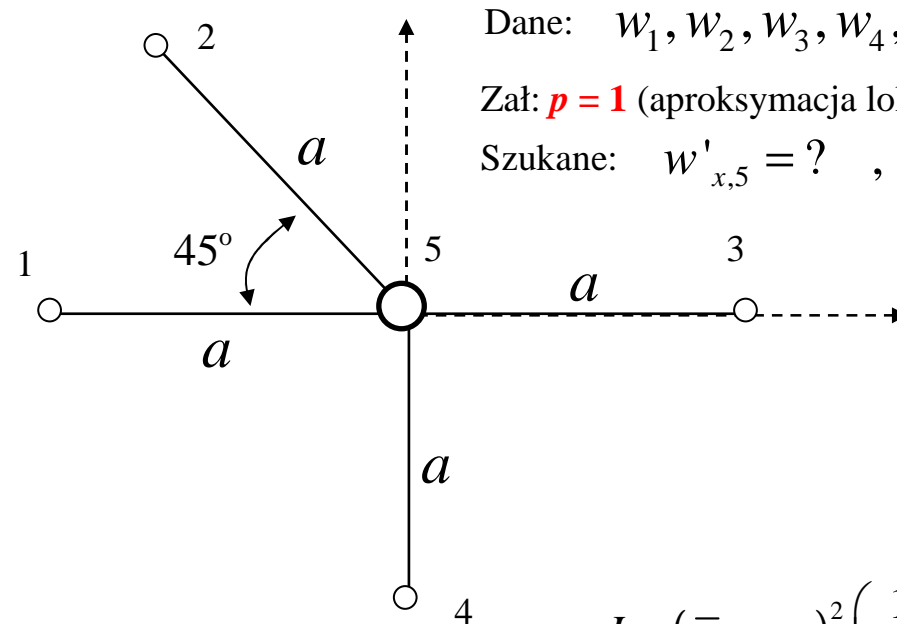


Aproksymacja lokalna 2D

$$u(x, y, x_0, y_0) = \underbrace{u_0 + \frac{du}{dx}\bigg|_0 h + \frac{du}{dy}\bigg|_0 k}_{p=1} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dx^2}\bigg|_0 h^2 + \frac{d^2 u}{dx dy}\bigg|_0 hk + \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dy^2}\bigg|_0 k^2}_{p=2} + \dots$$

$$h = x - x_0, \quad k = y - y_0$$

Aproksymacja MWLS – przykład 2D



$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = w_5 - aw'_{x,5} + \dots \approx \bar{w}_1 \\ w_2 = w_5 - a \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) w'_{x,5} + a \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) w'_{y,5} + \dots \approx \bar{w}_2 \\ w_3 = w_5 + aw'_{x,5} + \dots \approx \bar{w}_3 \\ w_4 = w_5 - aw'_{y,5} + \dots \approx \bar{w}_4 \\ w_5 = w_5 \end{array} \right.$$

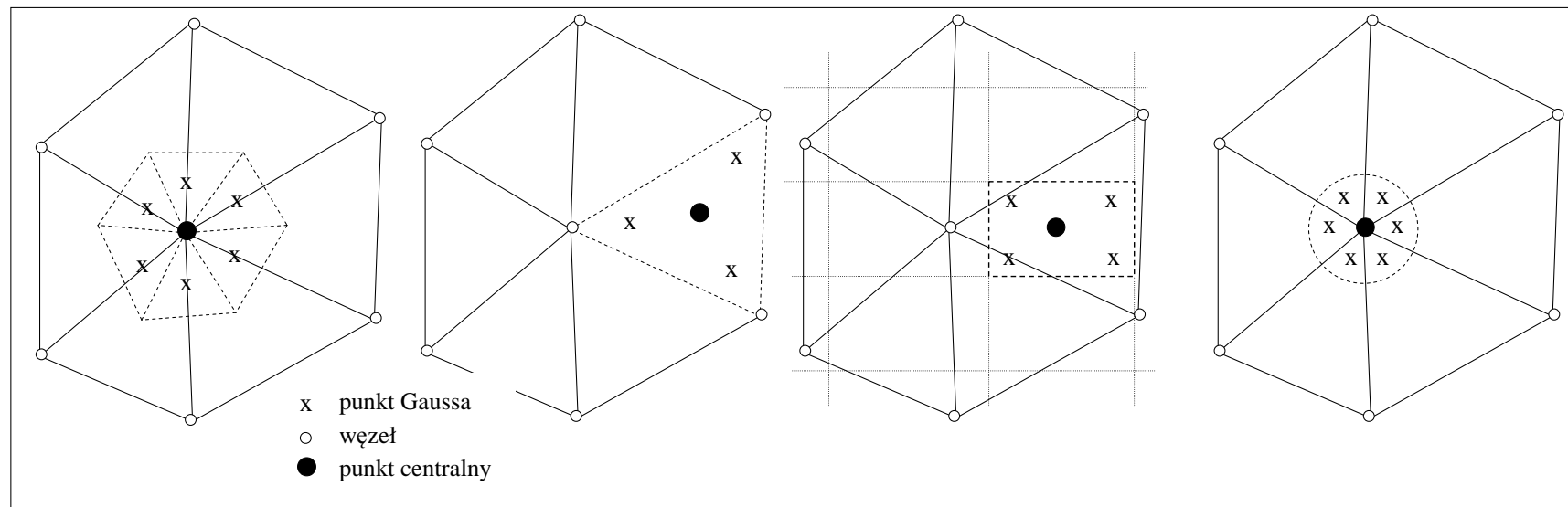
$$J = (\bar{w}_1 - w_1)^2 \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 + (\bar{w}_2 - w_2)^2 \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 +$$

$$+ (\bar{w}_3 - w_3)^2 \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 + (\bar{w}_4 - w_4)^2 \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 + 0$$

$$\min_{(w'_{5,x}, w'_{5,y})} J \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial w'_{5,x}} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial w'_{5,y}} = 0 \end{array} \right.$$

Całkowanie w BMRS

- CAŁKOWANIE **DOKOŁA WĘZŁA** – PO WIELOKĄTACH **VORONOI**
(NAJLEPSZE DLA PARZYSTYCH OPERATORÓW) – TAK JAK W KLASYCZNEJ MRS
- CAŁKOWANIE **POMIĘDZY WĘZŁAMI** – PO TRÓJKĄTACH **DELAUNAY** (2D)
(NAJLEPSZE DLA NIEPARZYSTYCH OPERATORÓW) – TAK JAK W MES
- CAŁKOWANIE PO **SIATCE TŁA** –
NIEZALEŻNEJ OD WĘZŁÓW – TAK JAK W METODACH BEZSIATKOWYCH
- CAŁKOWANIE PO **STREFACH WPLYWU**
FUNKCJI WAGOWYCH APROKSYMACJI MWLS – TAK JAK W MET. BEZSIATK.

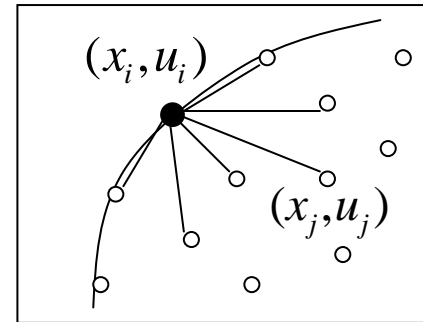


a) całkowanie po wielokącie Voronoi b) całkowanie po trójkącie Delaunay c) całkowanie po niezależnej siatce d) całkowanie po nośniku funkcji wagowej

Warunki brzegowe w BMRS

- użycie jedynie **wewnętrznych węzłów** – słaba jakość

$$u_i = \sum_{j=1}^m a_j \cdot u_j$$



- użycie **węzłów wewnętrznych** z warunkiem brzegowym i równaniem z obszaru zapisanym na brzegu

$$Lu_i = f_i, \quad Gu_i = g_i, \quad P_i \in \partial\Omega$$

- użycie **węzłów wewnętrznych** i uogólnionych stopni swobody

$$u_i = \sum_{j=1}^{m_1} a_j \cdot u_j + \sum_{j=1}^{m_2} b_j \cdot u_j^{(k)}$$

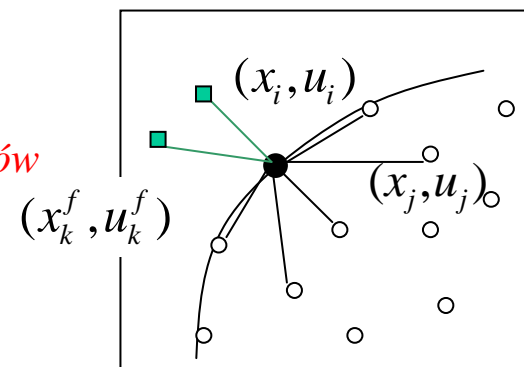
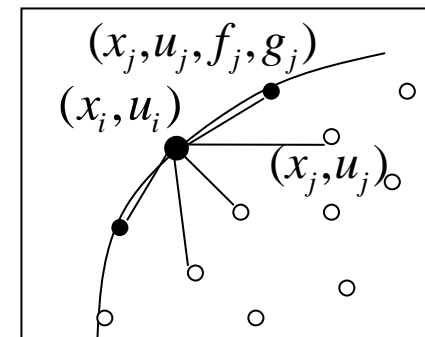
- podjęcie wielopunktowe**

$$\sum_{j=1}^{m_1} a_j \cdot u_j = \sum_{j=1}^{m_2} b_j \cdot f_j$$

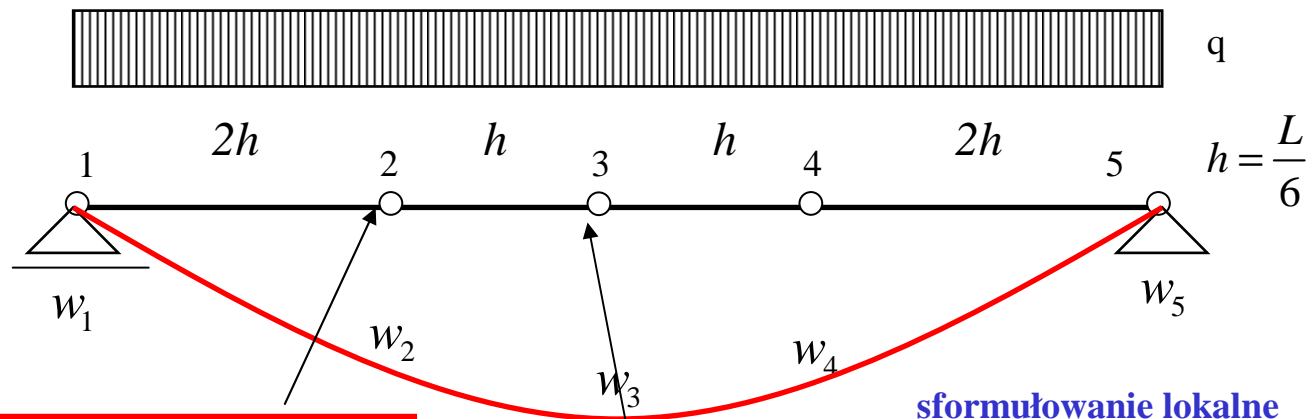
- użycie **wewnętrznych** i dodatkowych **zewnętrznych węzłów**

$$u_i = \sum_{j=1}^{m_1} a_j \cdot u_j + \sum_{k=1}^{m_2} b_k \cdot u_k^f,$$

- kombinacje powyższych sposobów



Rozwiązanie zadania 1D za pomocą BMRS



$$\begin{cases} w'_2 \approx \frac{-46w_1 - 171w_2 + 224w_3 - 6w_4 - w_5}{300h} \\ w''_2 \approx \frac{419w_1 - 1056w_2 + 464w_3 + 159w_4 + 14w_5}{1500h^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w'_3 \approx \frac{-w_1 - 243w_2 + 243w_4 + w_5}{492h} \\ w''_3 \approx \frac{w_1 + 81w_2 - 164w_3 + 81w_4 + w_5}{90h^2} \end{cases}$$

sformułowanie lokalne

$$\frac{d^2w}{dx^2} = f(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

$$w(0) = 0, \quad w(L) = 0$$

$$M(x) = \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2 = \frac{1}{2}qx(L-x)$$

$$\begin{cases} w_1 = 0 \\ \frac{419w_1 - 1056w_2 + 464w_3 + 159w_4 + 14w_5}{1500\left(\frac{L}{6}\right)^2} = -\frac{5}{72} \frac{qL^2}{EI} \\ \frac{w_1 + 81w_2 - 164w_3 + 81w_4 + w_5}{90\left(\frac{L}{6}\right)^2} = -\frac{1}{8} \frac{qL^2}{EI} \\ w_4 = w_2 \\ w_5 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 = 0.0086 \frac{qL^4}{EI} \\ w_3 = 0.0104 \frac{qL^4}{EI} \\ w_4 = 0.0086 \frac{qL^4}{EI} \\ w_5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} - \\ w'_2 = 0.0162 \frac{qL^3}{EI} \\ w'_3 = 0 \\ w'_4 = -0.0162 \frac{qL^3}{EI} \\ - \end{cases} \rightarrow \begin{cases} - \\ w''_2 = -0.0694 \frac{qL^2}{EI} \\ w''_3 = -0.1250 \frac{qL^2}{EI} \\ w''_4 = -0.0694 \frac{qL^2}{EI} \\ - \end{cases}$$

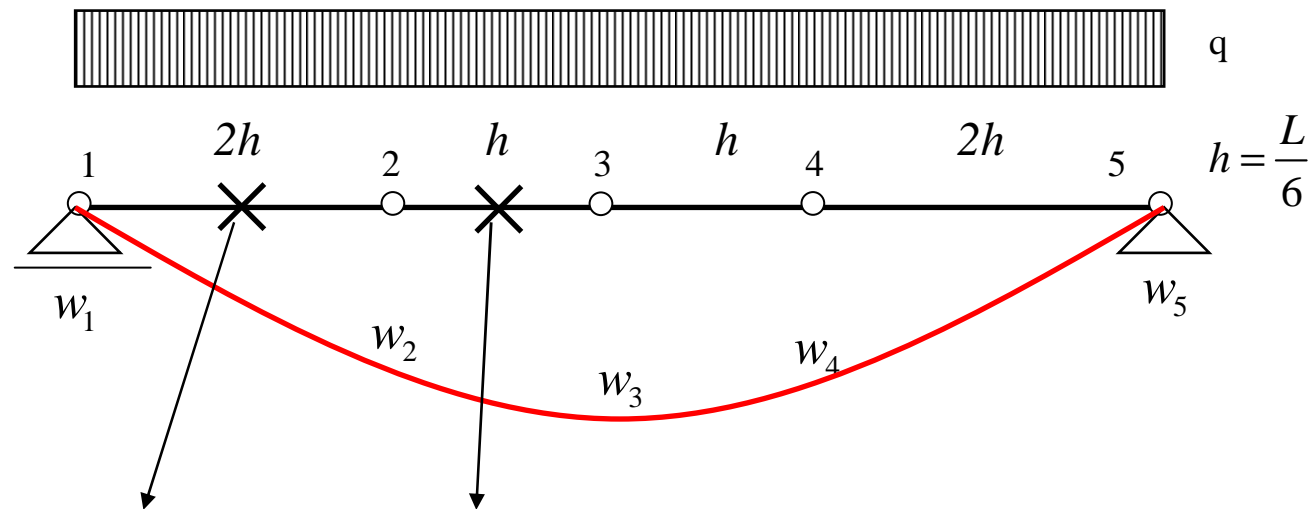
Rozwiązanie zadania 1D za pomocą BMRS

sformułowanie wariacyjne

$$-\int_0^L w' v' dx = \int_0^L f \cdot v dx$$

$$w(0) = w(L) = 0$$

$$v(0) = v(L) = 0$$



$$-2 \cdot \left(\frac{w_2 - w_1}{2h} \frac{v_2 - v_1}{2h} 2h + \frac{w_3 - w_2}{h} \frac{v_3 - v_2}{h} h \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \left(f_1 v_1 + f_2 v_2 \right) 2h + \frac{1}{2} \left(f_2 v_2 + f_3 v_3 \right) h \right)$$

$$v_2 \left(-\frac{w_2}{2h} + \frac{w_3}{h} - \frac{w_2}{h} \right) + v_3 \left(\frac{w_2}{h} - \frac{w_3}{h} \right) = v_2 \left(\frac{1}{2} f_2 2h + \frac{1}{2} f_2 h \right) + v_3 \left(\frac{1}{2} f_3 h \right), \forall v_2, v_3$$

$$\begin{cases} \frac{-3w_2}{2h} + \frac{w_3}{h} = \frac{3}{2} f_2 h \\ \frac{w_2}{h} - \frac{w_3}{h} = \frac{1}{2} f_3 h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_1 = w_5 = 0 \\ w_2 = w_4 = 0.0093 \frac{qL^4}{EI} \\ w_3 = 0.0110 \frac{qL^4}{EI} \end{cases}$$

Rozwiązanie zadania 2D za pomocą BMRS

sformułowanie lokalne

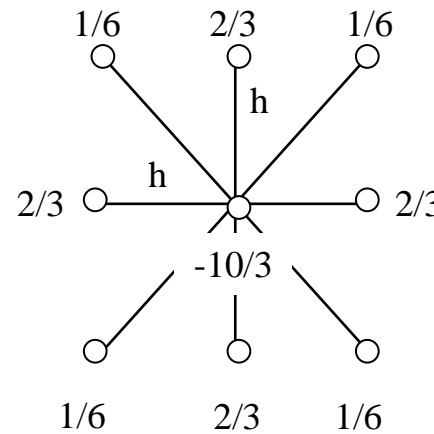
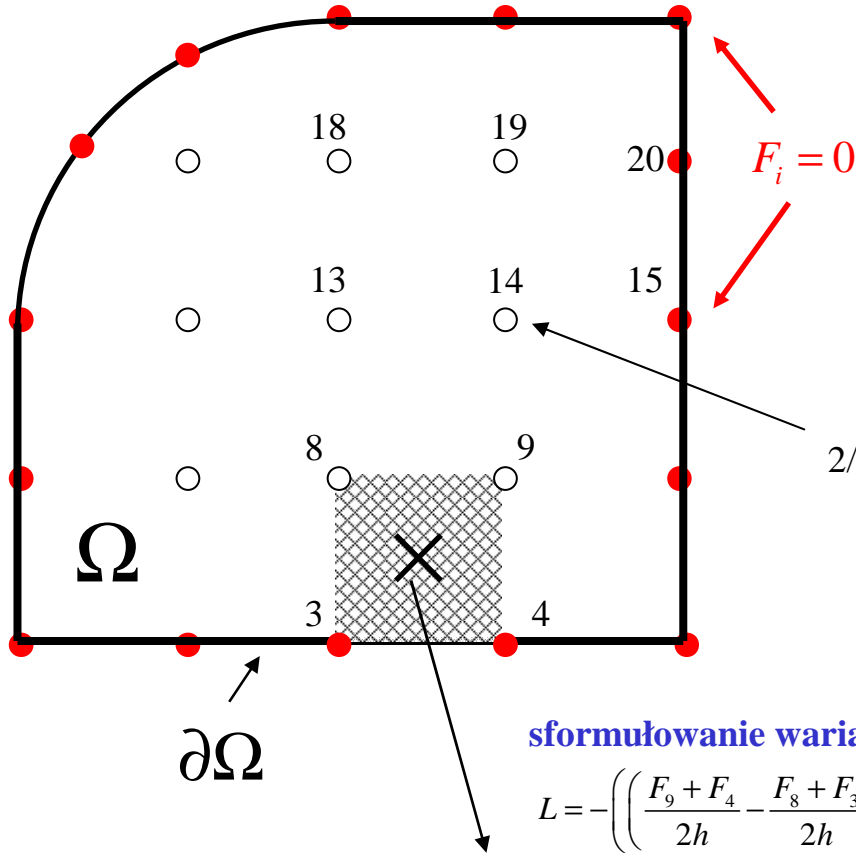
$$F''_{xx} + F''_{yy} = f(x, y)$$

$$F = 0 \text{ na } \partial\Omega$$

sformułowanie wariacyjne

$$-\int_{\Omega} F'_x v'_x + F'_y v'_y d\Omega = \int_{\Omega} f(x, y) v d\Omega$$

$$F = 0 \text{ na } \partial\Omega, \quad v = 0 \text{ na } \partial\Omega$$



sformułowanie lokalne

$$\frac{1}{h^2} \approx \nabla^2 F_{14}$$

sformułowanie wariacyjne

$$L = -\left(\left(\frac{F_9 + F_4}{2h} - \frac{F_8 + F_3}{2h} \right) \left(\frac{v_9 + v_4}{2h} - \frac{v_8 + v_3}{2h} \right) h^2 + \left(\frac{F_8 + F_9}{2h} - \frac{F_3 + F_4}{2h} \right) \left(\frac{v_8 + v_9}{2h} - \frac{v_3 + v_4}{2h} \right) h^2 \right)$$

$$P = \frac{1}{4} (f_3 v_3 + f_8 v_8 + f_9 v_9 + f_4 v_4) h^2$$