Metoda residuów ważonych

Piotr Pluciński, Jerzy Pamin

Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej

Politechnika Krakowska

Metoda residuów ważonych

Sformułowanie mocne - model lokalny

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = D(x)\ , \quad x \in (x_a, x_b)$$

+ (przykładowe) warunki brzegowe

- $y(x_a) = \widehat{a}$ – podstawowy warunek brzegowy (Dirichleta)
- $y'(x_b) = \widehat{b}$ – naturalny warunek brzegowy (Neumanna)

Aproksymacja funkcji

$$\tilde{y} = \phi_0 + \sum_{i=1}^{n} \phi_i c_i = \phi_0 + \boldsymbol{\phi c}$$

ϕ_i – (znane) funkcje bazowe, c_i – (nieznane) współczynniki

Residuum

$$R(x) = A(x)\tilde{y}''(x) + B(x)\tilde{y}'(x) + C(x)\tilde{y}(x) - D(x)$$

Metoda residuów ważonych

Minimalizacja residuum

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x)R(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \forall w$$

- $w(x) \neq 0$ – funkcja wagowa

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x)\left(A(x)\tilde{y}''(x) + B(x)\tilde{y}'(x) + C(x)\tilde{y}(x) - D(x)\right)\mathrm{d}x = 0$$

Różne metody residuów ważonych zależnie od funkcji wagowej $w(x)$

- metoda kollokacji – $w_i = \delta(x - x_i)$
- metoda najmniejszych kwadratów – $w_i = \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}c_i}$
- metoda Bubnowa-Galerkina – $w_i = \phi_i$

Metoda residuów ważonych

Sformułowanie słabe - model globalny ($\forall w \neq 0$)

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x)\left(A(x)\tilde{y}''(x) + B(x)\tilde{y}'(x) + C(x)\tilde{y}(x) - D(x)\right)\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x)A(x)\tilde{y}''(x)\mathrm{d}x +$$
$$+ \int_{x_a}^{x_b} w(x)B(x)\tilde{y}'(x)\mathrm{d}x + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)\tilde{y}(x)\mathrm{d}x - \int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$w(x)A(x)\tilde{y}'(x)\Big|_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} w'(x)A(x)\tilde{y}'(x)\mathrm{d}x - \int_{x_a}^{x_b} w(x)A'(x)\tilde{y}'(x)\mathrm{d}x +$$
$$+ \int_{x_a}^{x_b} w(x)B(x)\tilde{y}'(x)\mathrm{d}x + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)\tilde{y}(x)\mathrm{d}x - \int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)\mathrm{d}x = 0$$

Metoda residuów ważonych

Sformułowanie słabe - model globalny ($\forall w \neq 0$)

$$w(x)A(x)\tilde{y}'(x)\Big|_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} w'(x)A(x)\tilde{y}'(x)\mathrm{d}x - \int_{x_a}^{x_b} w(x)A'(x)\tilde{y}'(x)\mathrm{d}x +$$
$$+ \int_{x_a}^{x_b} w(x)B(x)\tilde{y}'(x)\mathrm{d}x + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)\tilde{y}(x)\mathrm{d}x - \int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$w(x_b)A(x_b)\overset{\widehat{b}}{\boxed{\tilde{y}'(x_b)}} - w(x_a)A(x_a)\tilde{y}'(x_a) - \int_{x_a}^{x_b} w'(x)A(x)\tilde{y}'(x)\mathrm{d}x +$$
$$+ \int_{x_a}^{x_b} w(x)[B(x) - A'(x)]\tilde{y}'(x)\mathrm{d}x + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)\tilde{y}(x)\mathrm{d}x - \int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)\mathrm{d}x = 0$$

+ podstawowy warunek brzegowy

- $y(x_a) = \widehat{a}$

Przykładowe sformułowanie - przepływ ciepła 1D

Ilość ciepła

$$Q \qquad \text{[J]}$$

ilość energii cieplnej

Strumień przepływu ciepła *(heat flux)*

$$H = \frac{\partial Q}{\partial t} \qquad \text{[J/s=W]}$$

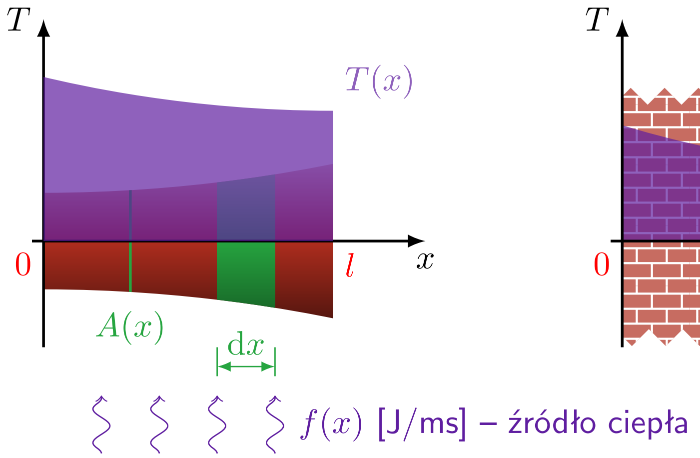
ilość ciepła na jednostkę czasu

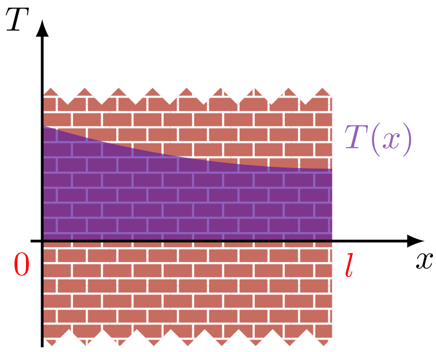
Gęstość strumienia przepływu ciepła

$$q_\mathrm{n} = \frac{\partial H}{\partial A} \qquad [\mathrm{W/m^2}] \qquad \text{dla 1D: } H(x) = A(x)q_x(x)$$

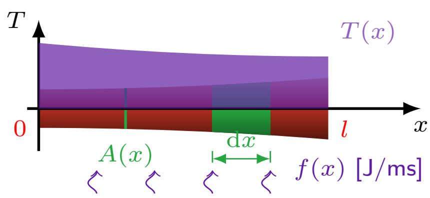
strumień przepływu ciepła na jednostkę powierzchni

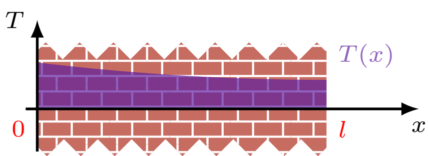
Przykładowe sformułowanie - przepływ ciepła 1D

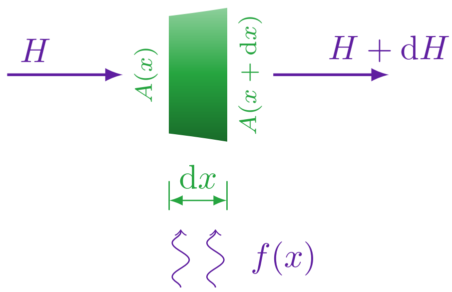




Przykładowe sformułowanie - przepływ ciepła 1D







$$H + f\,\mathrm{d}x = H + \mathrm{d}H \Rightarrow \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = f$$

Prawo Fouriera ($H = Aq_x$)

$$q_x = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

k – współczynnik przewodnictwa cieplnego

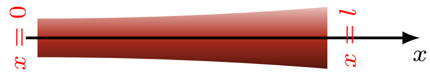
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Ak\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) = f$$

dla $Ak = \mathrm{const}$

$$Ak\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} + f = 0$$

Metody obliczeniowe, 2015 © P.Pluciński

Przykładowe sformułowanie - przepływ ciepła 1D



Model lokalny (sformułowanie mocne)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Ak\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)+f=0$$

+ warunki brzegowe

$$q(x=0)=-\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=0}=\widehat{q} \qquad \text{naturalny w.b. (Neumanna)}$$

$$T(x=l)=\widehat{T} \qquad \text{podstawowy w.b.(Dirichleta)}$$

Przykładowe sformułowanie - przepływ ciepła 1D

Model globalny (sformułowanie słabe)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Ak\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)+f=0 \quad \Big|\cdot w\Big|\int_0^l$$

$$\int_0^l w\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Ak\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)+f\right)\mathrm{d}x=0, \quad \forall w\neq 0$$

$$\int_0^l w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Ak\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+\int_0^l wf\,\mathrm{d}x=0$$

$$\left[wAk\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right]\bigg|_0^l-\int_0^l\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(Ak\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+\int_0^l wf\,\mathrm{d}x=0$$

$$\int_0^l\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(Ak\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=-(wAq_x)\bigg|_{x=l}+(wAq_x)\bigg|_{x=0}+\int_0^l wf\,\mathrm{d}x=0$$

Przykładowe sformułowanie - przepływ ciepła 1D

Model lokalny (sformułowanie silne)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Ak\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)+f=0$$

$$q_x(x=0)=-\left.\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=0}=\widehat{q} \qquad \text{w.b. Neumanna (naturalny)}$$

$$T(x=l)=\widehat{T} \qquad \text{w.b. Dirichleta (podstawowy)}$$

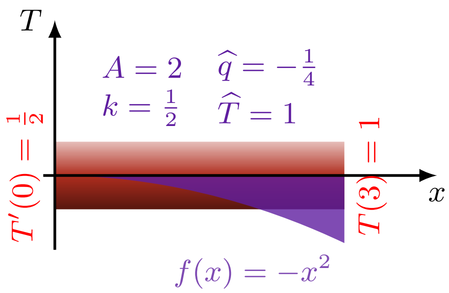
Model globalny (sformułowanie słabe)

$$\int_0^l \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(Ak\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=-(wAq_x)\Big|_{x=l}+(wA)\Big|_{x=0}\widehat{q}+\int_0^l wf\,\mathrm{d}x=0$$

$$T(x=l)=\widehat{T} \qquad \text{podstawowy w.b. (Dirichleta)}$$

Przykład

Wyprowadzenie sformułowania słabego dla zagadnienia 1D



Sformułowanie mocne

$$T''-x^2=0$$

+ warunki brzegowe

$$q_x(0)=-\frac{1}{2}T'(0)=-\frac{1}{4}$$

$$T(3)=\widehat{T}=1$$

Sformułowanie słabe

$$\int_0^3 w\left[T''-x^2\right]\mathrm{d}x=0 \quad \forall w$$

$$-\int_0^3 w'T'\mathrm{d}x+w(3)T'(3)-w(0)T'(0)-\int_0^3 wx^2\mathrm{d}x=0$$

$$\int_0^3 w'T'\mathrm{d}x=w(3)T'(3)-w(0)\cdot\frac{1}{2}-\int_0^3 wx^2\mathrm{d}x$$

+ warunek brzegowy $T(3)=1$