

Rozwiązanie równania różniczkowego MES

Jerzy Pamin

e-mail: Jerzy.Pamin@PK.edu.pl

Katedra Technologii Informatycznych w Inżynierii

Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej

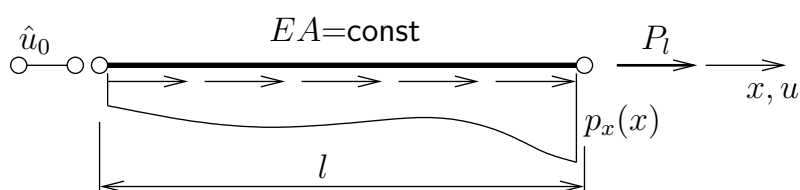
Strona domowa: www.CCE.pk.edu.pl

Metody obliczeniowe, 2020 © J.Pamin



Model fizyczny 1D - pręt

Pręt pod obciążeniem rozłożonym – problem brzegowy



(1) Równowaga

$$\frac{dN}{dx} \equiv N' = -p_x$$

(2) Kinematyka $\epsilon_0 = \frac{du}{dx} \equiv u'$

(3) Fizyka $N = EA\epsilon_0$

Podstawiając (3)→(2):

(4) Siła-przem. $N = EAu'$

Podstawiając (4)→(1):

Model lokalny: $EAu'' = -p_x$

Dwa warunki brzegowe:

podstawowy albo naturalny

Z lewej $x = 0$: $u_0 = \hat{u}_0$ albo $u'_0 = \frac{P_0}{EA}$

Z prawej $x = l$: $u_l = \hat{u}_l$ albo $u'_l = \frac{P_l}{EA}$

Problem dobrze postawiony gdy min.

1 warunek brzegowy jest podstawowy

W.b. może być jednorodny lub niejednorodny

Np. $u_0 = 0$ i $u'_l = \frac{P_l}{EA}$

Metody obliczeniowe, 2020 © J.Pamin



Metoda residuów ważonych

W MES punktem wyjścia jest model globalny. Zasada prac wirtualnych lub minimum całkowitej energii potencjalnej generują modele globalne. Jeśli znany jest model lokalny, można zastosować tzw. metodę residuów ważonych.

Równoważny model globalny

Zapisujemy równanie różniczkowe jako warunek zerowania residuum

$$R(x) = EAu''(x) + p_x(x) = 0$$

Poszukujemy rozwiązania przybliżonego \tilde{u} dla którego

$$R(x) = EA\tilde{u}''(x) + p_x(x) \neq 0$$

W metodzie residuów ważonych żądamy aby

$$\int_0^l w(x)R(x)dx = 0 \quad \forall w \neq 0$$

Warunki brzegowe muszą być spełnione

Metoda residuów ważonych

Słabe (globalne) sformułowanie

Podstawiamy za residuum

$$\int_0^l w (EAu'' + p_x)dx = 0 \quad \forall w$$

$$\int_0^l w EAu'' dx + \int_0^l w p_x dx = 0 \quad \forall w$$

Całkujemy przez części aby obniżyć wymagania odnośnie ciągłości

$$- \int_0^l w' EAu' dx + [w EAu']_0^l + \int_0^l w p_x dx = 0 \quad \forall w$$

Naturalny warunek brzegowy jest wprowadzany do członu brzegowego, podstawowy warunek brzegowy należy spełnić.

Dopuszczalna jest aproksymacja funkcją o ciągłości C^0 .

Metoda residuów ważonych

Zasada prac wirtualnych

Słaba forma równania MRW

$$\int_0^l w' EAu' dx = [w EAu']_0^l + \int_0^l w p_x dx \quad \forall w$$

Funkcja wagowa jest interpretowana jako wariacja przemieszczenia podłużnego δu

$$\int_0^l \delta u' EAu' dx = [\delta u EAu']_0^l + \int_0^l \delta u p_x dx \quad \forall \delta u$$

Przepisujemy w postaci zasady prac wirtualnych

$$\int_0^l \delta \epsilon_0 N dx = [\delta u N]_0^l + \int_0^l \delta u p_x dx, \quad \delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad \forall \delta u$$

Przemieszczenie wirtualne δu spełnia jednorodne podstawowe warunki brzegowe (jest kinematycznie dopuszczalne).

Metody obliczeniowe, 2020 © J.Pamin



Rozwiązanie przybliżone

Metoda Bubnowa-Galerkina

Słabe sformułowanie problemu brzegowego

$$\int_0^l w' EAu' dx = [w EAu']_0^l + \int_0^l w p_x dx \quad \forall w \quad \text{plus w.b.}$$

Założmy aproksymację globalną \tilde{u} w postaci

$$\tilde{u} = \phi_0 + \sum_{i=1}^n \phi_i c_i = \phi_0 + \phi \mathbf{c}$$

$\phi_0, \phi_i, i = 1 \dots n$ – (znane, liniowo niezależne) funkcje bazowe

(ϕ_0 spełnia niejednorodne podstawowe w.b., ϕ_i spełnia jednorodne podstawowe w.b.)

c_i – (nieznane) współczynniki

Funkcja wagowa jest aproksymowana z użyciem tych samych funkcji bazowych

$$w = \sum_{i=1}^n \phi_i b_i = \phi \mathbf{b}$$

Podstawiamy aproksymację do równania całkowego, które ma być spełnione dla każdego b_i , i otrzymujemy układ n równań algebraicznych o n niewiadomych c_i , który łatwo rozwiązać.

Metody obliczeniowe, 2020 © J.Pamin



Metoda elementów skończonych

Przykładowe zagadnienie

Rozwiąż problem brzegowy

$$u''(x) + 6x^2 = 0 \quad x \in (0, 1), \quad \text{w.b. } u(0) = 1, \quad u'(1) = -\frac{1}{2}$$

stosując MES w sformułowaniu Galerkina i 2 elementy z interpolacją liniową.

Rozwiązanie analityczne

$$u''(x) = -6x^2$$

$$u'(x) = -2x^3 + C$$

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^4 + Cx + D$$

$$u^{analit} = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x + 1$$

Metoda residuów ważonych

Model globalny otrzymany MRW

$$R = u''(x) + 6x^2, \quad \int_0^1 w(x)R(x)dx = 0 \quad \forall w \neq 0$$

$$\int_0^1 wu''dx + \int_0^1 w6x^2dx = 0 \quad \forall w$$

Zakładamy, że rozwiązanie dokładne ma ciągłość C^1

Sformułowanie słabe

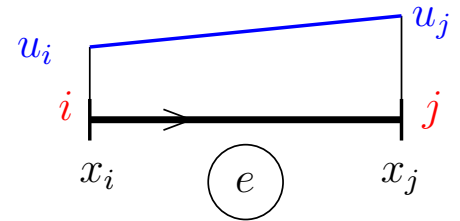
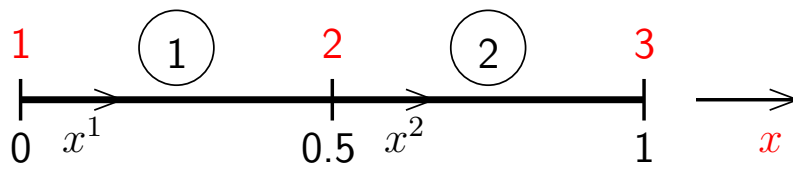
$$-\int_0^1 w'u'dx + [wu']_0^1 + \int_0^1 w6x^2dx = 0 \quad \forall w \quad | \cdot (-1)$$

$$\int_0^1 w'u'dx - w(1)u'(1) + w(0)u'(0) - \int_0^1 w6x^2dx = 0, \quad u(0) = 1$$

Na podstawie w.b. $u'(1) = -\frac{1}{2}$, wartość $u'(0)$ jest nieznaną

Dyskretyzacja MES

2 elementy z liniową interpolacją



Topologia $e = 1 \quad i = 1 \quad j = 2$

$e = 2 \quad i = 2 \quad j = 3$

Transformacja $x^e \in (0, l^e)$

$x = x^e + a^e$

$a^1 = 0, a^2 = 0.5$

Funkcje kształtu

$$N_i = 1 - \frac{x^e}{l^e} = 1 - 2x^e$$

$$N_j = \frac{x^e}{l^e} = 2x^e$$

$$\mathbf{N} = [N_i, N_j]$$

$$\mathbf{d}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

Aproksymacja Bubnowa-Galerkina

$$u \approx u^e = \mathbf{N} \mathbf{d}^e, \quad w \approx w^e = \mathbf{N} \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{N}^T$$

Metody obliczeniowe, 2020 © J.Pamin



Równania MES

Równanie całkowe dla elementu skończonego

$$\int_0^{l^e} w' u' dx^e - w(l^e) u'(l^e) + w(0^e) u'(0^e) - \int_0^{l^e} w 6x^2 dx^e = 0 \quad \forall w$$

$$\int_0^{l^e} w' u' dx^e - w(l^e) u'(l^e) + w(0^e) u'(0^e) - \int_0^{l^e} w 6(x^e + a^e)^2 dx^e = 0$$

Podstawiamy interpolację $u = \mathbf{N} \mathbf{d}^e$, $w = \mathbf{b}^T \mathbf{N}^T$, żądamy spełnienia $\forall \mathbf{b}$

$$\int_0^{l^e} \mathbf{b}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \mathbf{d}^e dx^e - \mathbf{b}^T \mathbf{N}^T(l^e) u'(l^e) + \mathbf{b}^T \mathbf{N}^T(0^e) u'(0^e) - \int_0^{l^e} \mathbf{b}^T \mathbf{N}^T 6(x^e + a^e)^2 dx^e = 0 \quad \forall$$

Uwaga: pochodne na brzegu $u'(0^e)$ i $u'(l^e)$ nie są aproksymowane.

$$\int_0^{l^e} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \mathbf{d}^e dx^e - \mathbf{N}^T(l^e) u'(l^e) + \mathbf{N}^T(0^e) u'(0^e) - \int_0^{l^e} \mathbf{N}^T 6(x^e + a^e)^2 dx^e = 0$$

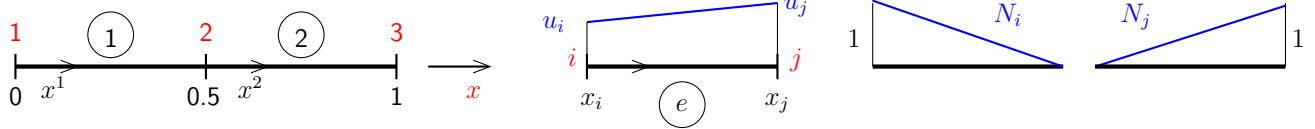
Podstawiamy $\mathbf{N}^T(l^e) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{N}^T(0^e) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\int_0^{l^e} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' dx^e \mathbf{d}^e - \begin{bmatrix} -u'(0^e) \\ u'(l^e) \end{bmatrix} - \int_0^{l^e} \mathbf{N}^T 6(x^e + a^e)^2 dx^e = 0$$

Metody obliczeniowe, 2020 © J.Pamin



Równania MES



Macierze elementu skończonego

$$\int_0^{l^e} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' dx^e \mathbf{d}^e - \begin{bmatrix} -u'(0^e) \\ u'(l^e) \end{bmatrix} - \int_0^{l^e} \mathbf{N}^T 6(x^e + a^e)^2 dx^e = 0$$

$$\mathbf{K}^e = \int_0^{l^e} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' dx^e, \quad \mathbf{p}^e = \int_0^{l^e} \mathbf{N}^T 6(x^e + a^e)^2 dx^e, \quad \mathbf{p}_b^e = \begin{bmatrix} -u'(0^e) \\ u'(l^e) \end{bmatrix}$$

Pochodne funkcji kształtu $\mathbf{N}' = [-2, 2]$

Macierzowe równanie MES

$$\mathbf{K}^e \mathbf{d}^e - \mathbf{p}_b^e - \mathbf{p}^e = 0$$

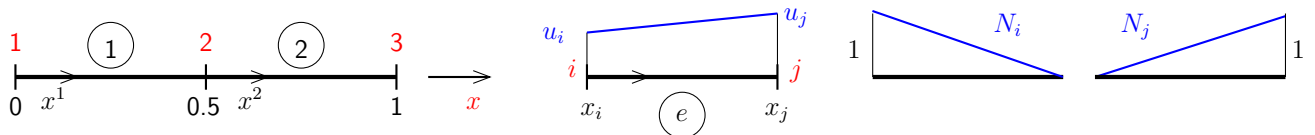
$$\mathbf{K}^e \mathbf{d}^e = \mathbf{p}^e + \mathbf{p}_b^e$$

Model numeryczny na poziomie elementu

Metody obliczeniowe, 2020 © J.Pamin



Obliczenia



Obliczamy macierze dla każdego elementu

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}^2 = \int_0^{0.5} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} dx^e = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^1 = \int_0^{0.5} \begin{bmatrix} 1 - 2x^{(1)} \\ 2x^{(1)} \end{bmatrix} 6(x^{(1)})^2 dx^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0625 \\ 0.1875 \end{bmatrix}$$

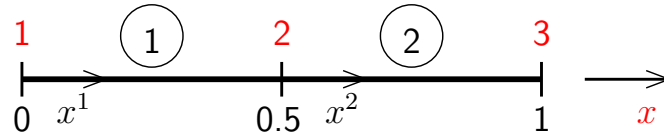
$$\mathbf{p}^2 = \int_0^{0.5} \begin{bmatrix} 1 - 2x^{(2)} \\ 2x^{(2)} \end{bmatrix} 6(x^{(2)} + 0.5)^2 dx^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.6875 \\ 1.0625 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_b^1 = \begin{bmatrix} -u'(0^1) \\ u'(l^1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_b^2 = \begin{bmatrix} -u'(0^2) \\ u'(l^2) \end{bmatrix}$$

Metody obliczeniowe, 2020 © J.Pamin



Globalny układ równań



Agregacja (*assembly*)

Dodajemy macierze elementowe do wyzerowanych macierzy globalnych zgodnie z topologią

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e, \quad \mathbf{d} = \sum_e \mathbf{d}^e, \quad \mathbf{p} = \sum_e \mathbf{p}^e, \quad \mathbf{p}_b = \sum_e \mathbf{p}_b^e,$$

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{p} + \mathbf{p}_b$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2+2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.0625 \\ 0.8750 \\ 1.0625 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_b = \begin{bmatrix} -u'(0^1) \\ u'(l^1) - u'(0^2) \\ u'(l^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u'(0) \\ 0 \\ u'(1) \end{bmatrix}$$

Metody obliczeniowe, 2020 © J.Pamin



Warunki brzegowe i rozwiązanie

Układ 3 równań o 5 niewiadomych

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0625 \\ 0.8750 \\ 1.0625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u'(0) \\ 0 \\ u'(1) \end{bmatrix}$$

ale mamy jeszcze warunki brzegowe $u_1 = u(0) = 1$ oraz $u'(1) = -0.5!$
Uwaga: do tego momentu rozwiązanie jest niezależne od warunków brzegowych.

Układ 3 równań o 3 niewiadomych

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0625 \\ 0.8750 \\ 1.0625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u'(0) \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

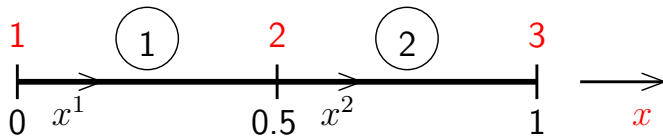
Najpierw rozwiązujemy równania 2 i 3, potem równanie 1

$$u_2 = 1.71875, \quad u_3 = 2, \quad u'(0) = 1.5$$

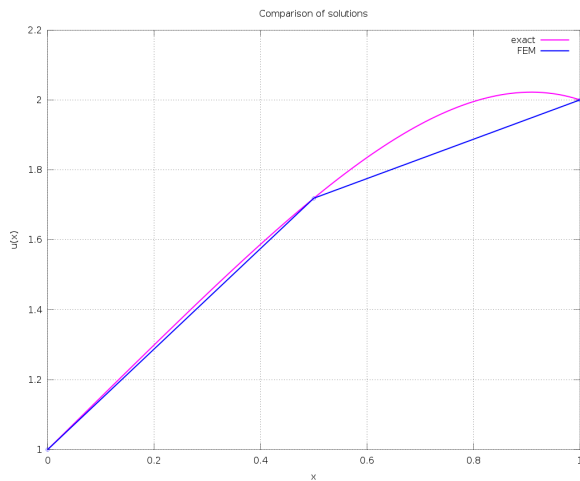
Metody obliczeniowe, 2020 © J.Pamin



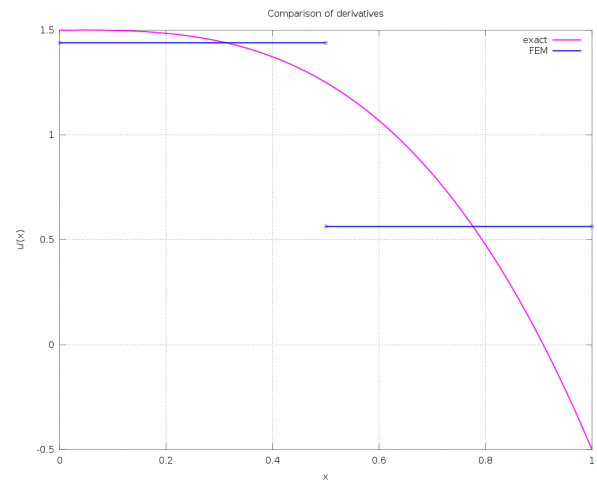
Rozwiązanie



Porównanie rozwiązania przybliżonego i analitycznego



Rozwiązanie



Pochodna rozwiązania