# MES dla ustrojów prętowych (statyka)


Jerzy Pamin

e-mail: Jerzy.Pamin@pk.edu.pl

Piotr Pluciński

e-mail: Piotr.Plucinski@pk.edu.pl

Katedra Technologii Informatycznych w Inżynierii

Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej

Strona domowa: www.CCE.pk.edu.pl




# Teoria - równania równowagi

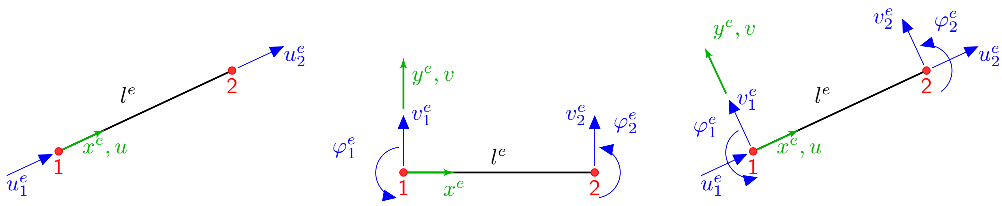
## Zasada prac wirtualnych

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

Podział na elementy skończone

$$\delta W_{int} = \sum_e \delta W^e_{int}\,, \quad \delta W_{ext} = \sum_e \delta W^e_{ext}$$

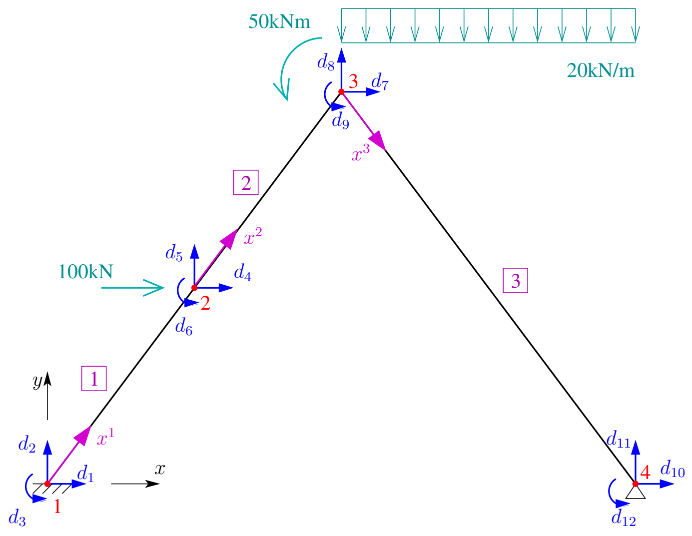
Równoważna warunkowi minimum całkowitej energii potencjalnej w przestrzeni przemieszczeń dopuszczalnych.




kratowy ES belkowy ES ramowy ES

Związki elementowe zapisane w lokalnym (elementowym) układzie współrzędnych.

# Dyskretyzacja




Topologia (relacje przylegania)

$$\text{TOP} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} e=1 \\ e=2 \\ e=3 \end{matrix}$$

Dane:

Współrzędne węzłów

Sztywności prętów $EA$ i $EI$

Warunki brzegowe

Obciążenia

Dyskretyzacja:

LW=4, LE=3, LSSW=3,
LSSU=LW*LSSW=12

Wektor stopni swobody:

$$\mathbf{d}^e = \begin{bmatrix} d_1^e \\ d_2^e \\ d_3^e \\ d_4^e \\ d_5^e \\ d_6^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \\ d_{10} \\ d_{11} \\ d_{12} \end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe:

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_{10} = d_{11} = 0$$



# Teoria - równania równowagi

## Zmienne dla konstrukcji ramowych

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ - wektor przemieszczenia (niewiadoma podstawowa)

$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_0 \\ \kappa \end{bmatrix}$ - wektor uogólnionych odkształceń ($\mathbf{e} = \mathbf{L}\mathbf{u}$)

$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$ - wektor uogólnionych naprężeń ($\mathbf{s} = \mathbf{D}\mathbf{e}$)

$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$ - wektor intensywności obciążenia ciągłego

## Aproksymacja Galerkina w elemencie

$\mathbf{u}(x^e) = \mathbf{N}(x^e)\mathbf{d}^e\,, \quad \delta\mathbf{u} = \mathbf{N}(x^e)\delta\mathbf{d}^e$

$\mathbf{d}^e$ - stopnie swobody (s.s.), tj. przemieszczenia wezłowe

$\mathbf{e}(x^e) = \mathbf{B}(x^e)\mathbf{d}^e\,, \quad \mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}\,, \quad \delta\mathbf{e} = \mathbf{B}(x^e)\delta\mathbf{d}^e$

$\mathbf{s}(x^e) = \mathbf{D}\,\mathbf{e}(x^e) = \mathbf{D}\mathbf{B}(x^e)\mathbf{d}^e$

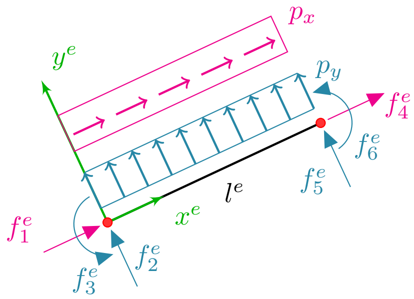
# Teoria - równania równowagi

## Zasada prac wirtualnych

$$\delta W^e_{int} = \int_0^{l^e} \delta \mathbf{e}^{\mathrm{T}} \mathbf{s} \, \mathrm{d}x^e$$

$$\delta W^e_{ext} = \int_0^{l^e} \delta \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{p} \, \mathrm{d}x^e + \delta \mathbf{d}^{e\mathrm{T}} \mathbf{f}^e$$

$\mathbf{f}^e$ - wektor sił przywęzłowych (siły, którymi elementy sąsiednie działają na dany element przez wspólne węzły)




$$\mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \\ f_4^e \\ f_5^e \\ f_6^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_1 \\ Q_1 \\ -M_1 \\ N_2 \\ -Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$



# Teoria - równania równowagi

## Podstawiamy aproksymację

$$\delta W^e_{int} = \delta \mathbf{d}^{e\mathrm{T}} \int_0^{l^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B} \, \mathrm{d}x^e \, \mathbf{d}^e = \delta \mathbf{d}^{e\mathrm{T}} \mathbf{K}^e \mathbf{d}^e$$

$\mathbf{K}^e$ - elementowa macierz sztywności

$$\delta W^e_{ext} = \delta \mathbf{d}^{e\mathrm{T}} \int_0^{l^e} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{p} \, \mathrm{d}x^e + \delta \mathbf{d}^{e\mathrm{T}} \mathbf{f}^e = \delta \mathbf{d}^{e\mathrm{T}} (\mathbf{z}^e + \mathbf{f}^e)$$

$\mathbf{z}^e$ - węzłowe siły zastępujące obciążenie (ciągłe) przyłożone do wnętrza elementu

Żądamy, aby $\delta W^e_{int} = \delta W^e_{ext} \quad \forall \delta \mathbf{d}^e$

## Elementowe równanie równowagi

$$\mathbf{K}^e \mathbf{d}^e = \mathbf{z}^e + \mathbf{f}^e$$

# Opis elementu belkowego

## Reprezentacja zginania

Definicje przemieszczenia, uogólnionego odkształcenia i uogólnionego naprężenia

$$\mathbf{u}(x) = [v(x)], \quad \mathbf{e}(x) = [\kappa(x)], \quad \mathbf{s}(x) = [M(x)]$$

Równania kinematyczne i konstytutywne w punkcie $P(x, y, z) = P(x, 0, 0) = P(x)$ na osi belki

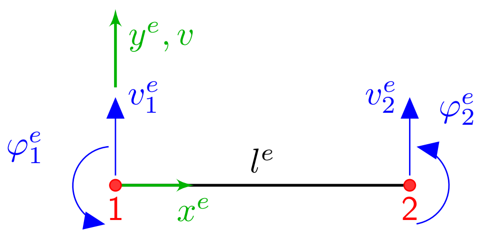
$$\kappa(x) = -\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e} = \mathbf{L}\mathbf{u}, \quad \mathbf{L} = \left[\ -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ \right]$$

$$M(x) = EI(x)\ \kappa(x) \quad \rightarrow \quad \mathbf{s} = \mathbf{D}\mathbf{e}, \quad \mathbf{D} = [\ EI(x)\ ]$$



# Opis elementu belkowego

## Aproksymacja ugięcia

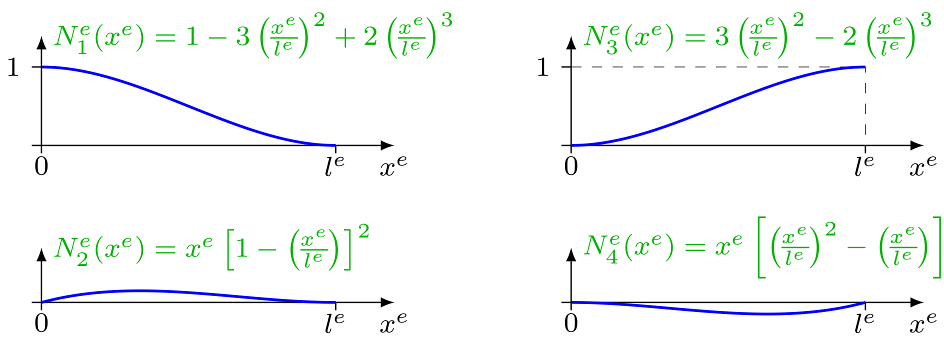



$$NDOF_n = 2, \ NDOF^e = 4$$

$$\underset{[2\times1]}{\mathbf{d}_w} = \{v_w, \varphi_w\}$$

$$\underset{[4\times1]}{\mathbf{d}^e} = \{v_1^e, \varphi_1^e, v_2^e, \varphi_2^e\}$$

$$\underset{[1\times1]}{\mathbf{u}(x^e)} = [v(x^e)] = \underset{[1\times4]}{\mathbf{N}(x^e)}\ \underset{[4\times1]}{\mathbf{d}^e}, \qquad \mathbf{N} = [N_1^e \quad N_2^e \quad N_3^e \quad N_4^e]$$



## Opis elementu belkowego

### Aproksymacja krzywizny i momentu zginającego, macierz sztywności

$$\underset{[1\times 1]}{\mathbf{e}(x^e)} = [\kappa(x^e)] = \mathbf{LN}(x^e)\cdot\mathbf{q}^e = \underset{[1\times 4]}{\mathbf{B}(x^e)}\cdot\underset{[4\times 1]}{\mathbf{d}^e}$$

$$\underset{[1\times 1]}{\mathbf{s}(x^e)} = [M(x^e)] = \underset{[1\times 1]}{\mathbf{D}}\cdot\underset{[1\times 4]}{\mathbf{B}(x^e)}\cdot\underset{[4\times 1]}{\mathbf{d}^e}$$

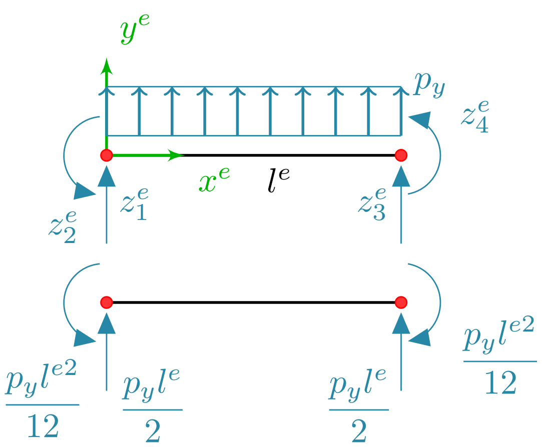
$$\underset{[4\times 4]}{\mathbf{K}^e} = \int_0^{l^e}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}x^e$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{E^eI^e}{l^{e3}}\begin{bmatrix} 12 & 6l^e & -12 & 6l^e \\ 6l^e & 4l^{e2} & -6l^e & 2l^{e2} \\ -12 & -6l^e & 12 & -6l^e \\ 6l^e & 2l^{e2} & -6l^e & 4l^{e2} \end{bmatrix}$$



## Opis elementu belkowego

### Obliczenie węzłowych sił zastępujących stałe obciążenie rozłożone




$$\mathbf{z}^e = \int_0^{l^e}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\left[\;p_y\;\right]\mathrm{d}x^e$$

$$\mathbf{z}^e = \begin{bmatrix} \dfrac{p_y l^e}{2} \\ \dfrac{p_y l^{e2}}{12} \\ \dfrac{p_y l^e}{2} \\ -\dfrac{p_y l^{e2}}{12} \end{bmatrix}$$

# Równowaga globalna

## Transformacja $\mathbf{T}^e$: globalny $\longrightarrow$ lokalny

Macierze określone w lokalnym (elementowym) układzie współrzędnych będą oznaczane nadkreśleniem.

$$\bar{\mathbf{d}}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{d}^e\,, \quad \mathbf{z}^e = \mathbf{T}^{e\mathrm{T}} \bar{\mathbf{z}}^e\,, \quad \mathbf{K}^e = \mathbf{T}^{e\mathrm{T}} \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}^e$$

Równania równowagi elementu w lokalnych współrzędnych

$$\bar{\mathbf{f}}^e = \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{d}}^e - \bar{\mathbf{z}}^e$$

Równania równowagi elementu w globalnych współrzędnych

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{d}^e - \mathbf{z}^e$$

## Agregacja

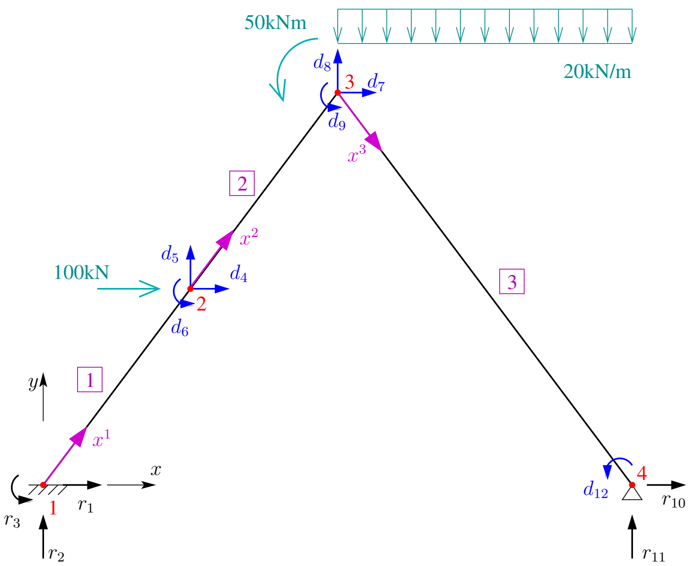
$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e\,, \quad \mathbf{d} = \sum_e \mathbf{d}^e\,, \quad \mathbf{z} = \sum_e \mathbf{z}^e\,, \quad \mathbf{f} = \sum_e \mathbf{f}^e$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\,\mathbf{d} - \mathbf{z} = \mathbf{w} + \mathbf{r}$$

$\mathbf{w}$ - wektor zewnętrznych sił skupionych przyłożonych w węzłach
$\mathbf{r}$ - wektor reakcji podpór



# Algorytm obliczeń




Wektory globalne:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \\ d_{10} \\ d_{11} \\ d_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \\ r_9 \\ r_{10} \\ r_{11} \\ r_{12} \end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe:

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_{10} = d_{11} = 0$$

Zatem:

$$r_4 = r_5 = r_6 = r_7 = r_8 = r_9 = r_{12} = 0$$

Równowaga układu

$$\mathbf{K}\,\mathbf{d} = \mathbf{w} + \mathbf{z} + \mathbf{r}$$

Równowaga elementu

$$\bar{\mathbf{f}}^e = \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{d}}^e - \bar{\mathbf{z}}^e$$

# Algorytm obliczeń MES dla konstrukcji prętowej

Równowaga zdyskretyzowanego układu (węzłów)

$$\mathbf{K}\,\mathbf{d} = \mathbf{w} + \mathbf{z} + \mathbf{r}$$

plus podstawowe (kinematyczne) warunki brzegowe

## Statyka

1. Podział na elementy (określenie numerów, osi, topologii), przygotowanie pliku z danymi
2. Obliczenie macierzy elementowych $\bar{\mathbf{K}}^e$, $\mathbf{K}^e$, agregacja macierzy globalnej $\mathbf{K}$
3. Obliczenie wektorów elementowych $\bar{\mathbf{z}}^e$, $\mathbf{z}^e$, agregacja wektora globalnego $\mathbf{z}$, określenie wektora sił zewnętrznych przyłożonych w węzłach $\mathbf{w}$
4. Rozwiązanie układu równań $\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{w} + \mathbf{z} + \mathbf{r}$ z uwzględnieniem kinematycznych warunków brzegowych, tzn. obliczenie niewiadomych przemieszczeń węzłowych $\mathbf{d}$ i reakcji $\mathbf{r}$



# Algorytm obliczeń MES dla konstrukcji prętowej

## Statyka (c.d.)

Podział macierzy na bloki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 + \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{w}_2 + \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix}$$

Zadane przemieszczenia $\mathbf{d}_2 = \hat{\mathbf{d}}$, zatem $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$

$\mathbf{K}_{11}\mathbf{d}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{z}_1 - \mathbf{K}_{12}\hat{\mathbf{d}} \;\rightarrow\; \mathbf{d}_1 \;\rightarrow\; \mathbf{d}$

$\mathbf{r} = \mathbf{K}\mathbf{d} - \mathbf{z} - \mathbf{w}$

5. Obliczenie sił przywęzłowych w elementach
   $\mathbf{d} \;\rightarrow\; \mathbf{d}^e \;\rightarrow\; \bar{\mathbf{d}}^e \;\rightarrow\; \bar{\mathbf{f}}^e = \bar{\mathbf{K}}^e\bar{\mathbf{d}}^e - \bar{\mathbf{z}}^e$
   lub $\mathbf{d} \;\rightarrow\; \mathbf{d}^e \;\rightarrow\; \mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e\mathbf{d}^e - \mathbf{z}^e \;\rightarrow\; \bar{\mathbf{f}}^e$
6. Narysowanie wykresów sił przekrojowych, sprawdzenie równowagi