

ALGORYTM STATYCZNEJ ANALIZY MES DLA KRATOWNICY

Piotr Pluciński

e-mail: Piotr.Plucinski@pk.edu.pl

Jerzy Pamin

e-mail: Jerzy.Pamin@pk.edu.pl

Katedra Technologii Informatycznych w Inżynierii

Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej

Strona domowa: www.CCE.pk.edu.pl

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński

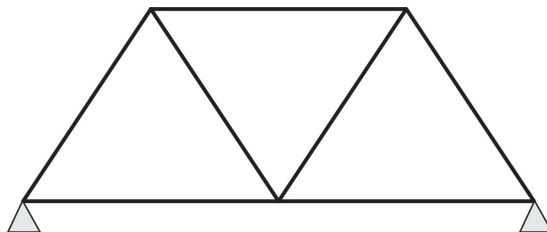


Model obliczeniowy i dyskretyzacja

Wymagania wobec modelu

W modelu obliczeniowym MES musimy zagwarantować:

- ▶ ciągłość przemieszczeń (w węzłach, gdzie łączą się elementy)
- ▶ spełnienie kinematycznych więzów podporowych
- ▶ spełnienie warunków równowagi dla całego układu i dowolnego podukładu (np. węzła lub elementu)



Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński



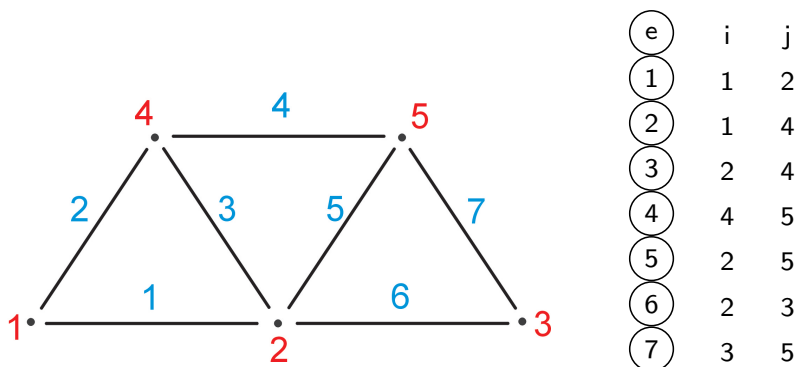
Model obliczeniowy i dyskretyzacja

Proces dyskretyzacji - generacja siatki

Konstrukcję kratową zamieniamy na układ dyskretny, składający się ze zbioru węzłów i zbioru elementów

Proces dyskretyzacji zawiera następujące operacje:

- ▶ numeracja węzłów
- ▶ numeracja elementów
- ▶ zapisanie relacji przylegania między prętami i węzłami (topologia układu)



Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński



Opis elementu skończonego kratowego (2D)

Definicje wielkości mechanicznych

Definicje przemieszczenia, odkształcenia i siły przekrojowej w pręcie rozciągany (ściskanym)

$$\mathbf{u}(x) = \{u(x)\}, \quad \mathbf{e}(x) = \{\varepsilon_0(x)\}, \quad \mathbf{s}(x) = \{N(x)\}$$

Równania kinematyczne i fizyczne dla punktu $P(x, y, z) = P(x, 0, 0) = P(x)$ na osi pręta

$$\varepsilon_0 = \frac{du}{dx} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e} = \mathbf{L}\mathbf{u}, \quad \mathbf{L} = \left[\frac{d}{dx} \right]$$
$$N = EA \cdot \varepsilon_0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{s} = \mathbf{D}\mathbf{e}, \quad \mathbf{D} = [EA]$$

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński



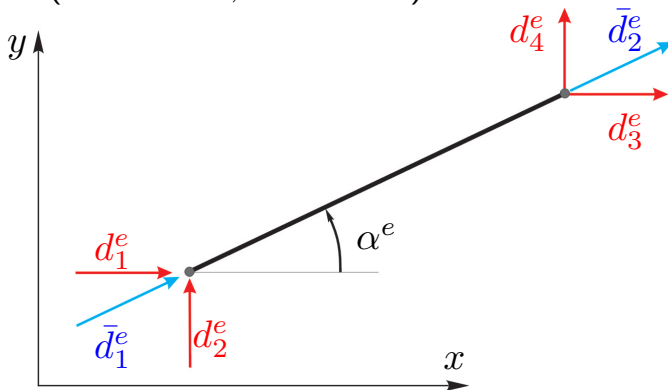
Opis elementu skończonego kratowego (2D)

Opis elementu kratowego w globalnym układzie Oxy

Liczba globalnych stopni swobody węzła $LSS_w = 2$, a elementu

$$LSS^e = 4$$

$$(c = \cos \alpha^e, s = \sin \alpha^e)$$



$$\mathbf{d}_w = \{u_w, v_w\}$$

$$[2 \times 1]$$

$$\mathbf{d}^e = \{d_1, d_2, d_3, d_4\} =$$

$$[4 \times 1]$$

$$= \{u_1, v_1, u_2, v_2\}$$

$$\bar{\mathbf{d}}^e = \begin{bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}^e \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}^e = \mathbf{T}^e \cdot \mathbf{d}^e$$

$$[2 \times 1] \quad [2 \times 4] \quad [4 \times 1]$$

$$\mathbf{d}^e = \mathbf{T}^{eT} \cdot \bar{\mathbf{d}}^e$$

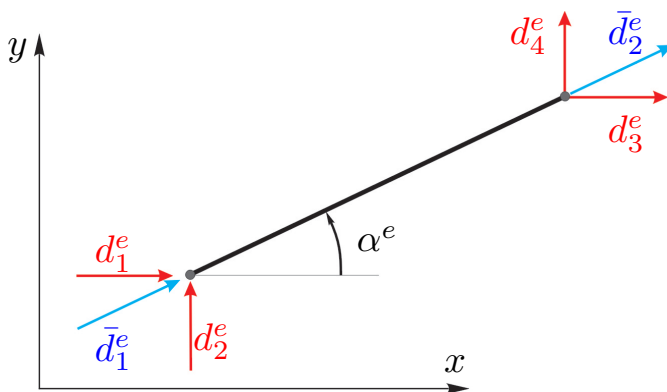
$$[4 \times 1] \quad [4 \times 2] \quad [2 \times 1]$$

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński



Opis elementu skończonego kratowego (2D)

Transformacja macierzy sztywności elementu



Macierz sztywności elementu w układzie globalnym:

$$\mathbf{K}^e = (\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T})^e = \left(\frac{EA}{L} \right)^e \cdot \begin{bmatrix} cc & cs & -cc & -cs \\ cs & ss & -cs & -ss \\ -cc & -cs & cc & cs \\ -cs & -ss & cs & ss \end{bmatrix}^e$$

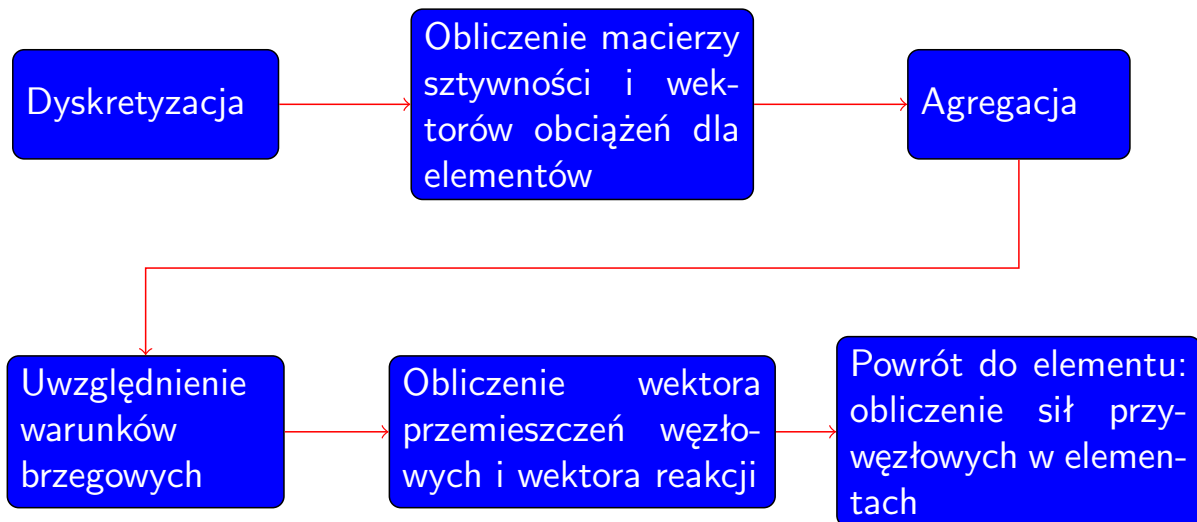
$$[4 \times 4]$$

$$c = \cos \alpha^e, s = \sin \alpha^e$$

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński



Schemat blokowy algorytmu rozwiązania zagadnienia statyki MES



Równowaga układu

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{w} + \mathbf{z} + \mathbf{r} \quad (\text{oraz w.b.})$$

Równowaga elementu

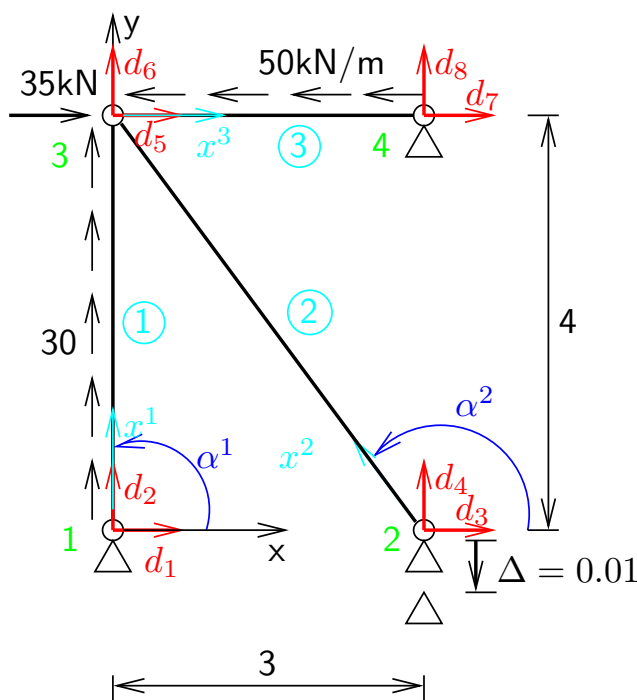
$$\bar{\mathbf{f}}^e = \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{d}}^e - \bar{\mathbf{z}}^e$$

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński



Przykładowe obliczenia kratownicy 2D

Definicja problemu i dyskretyzacja



Sztywność $EA = 10^4 \text{ kN}$

Elem.1: $l = 4, c = 0, s = 1$

Elem.2: $l = 5, -c = 0.6, s = 0.8$

Elem.3: $l = 3, c = 1, s = 0$

Macierz topologii

$$\text{TOP} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} \cos \alpha^e & \sin \alpha^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha^e & \sin \alpha^e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^e_{[4 \times 4]} = \frac{EA}{L^e} \begin{bmatrix} cc & cs & -cc & -cs \\ cs & ss & -cs & -ss \\ -cc & -cs & cc & cs \\ -cs & -ss & cs & ss \end{bmatrix}$$

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński



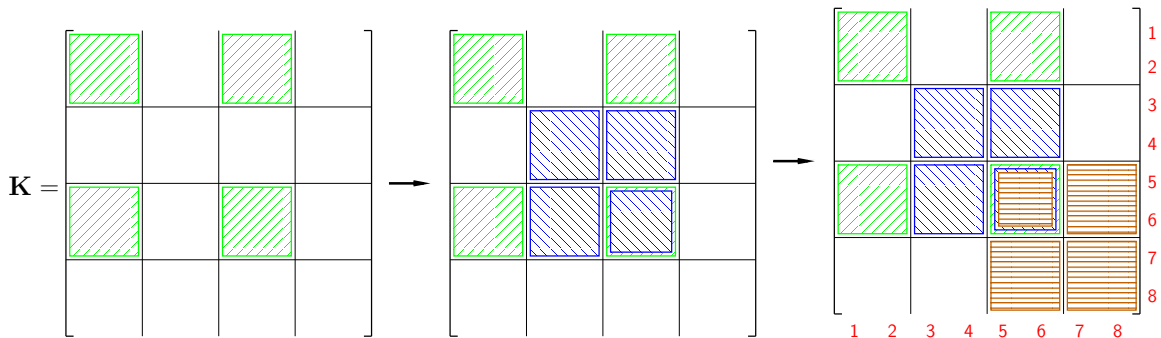
Przykładowe obliczenia kratownicy 2D

Macierze sztywności elementów w globalnych współrzędnych i agregacja

$$\mathbf{K}^1 = \frac{10^4}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2500 & 0 & -2500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2500 & 0 & 2500 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}^2 = \frac{10^4}{5} \begin{bmatrix} 0.36 & -0.48 & -0.36 & 0.48 \\ -0.48 & 0.64 & 0.48 & -0.64 \\ -0.36 & 0.48 & 0.36 & -0.48 \\ 0.48 & -0.64 & -0.48 & 0.64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 & -960 & -720 & 960 \\ -960 & 1280 & 960 & -1280 \\ -720 & 960 & 720 & -960 \\ 960 & -1280 & -960 & 1280 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}^3 = \frac{10^4}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3333 & 0 & -3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3333 & 0 & 3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

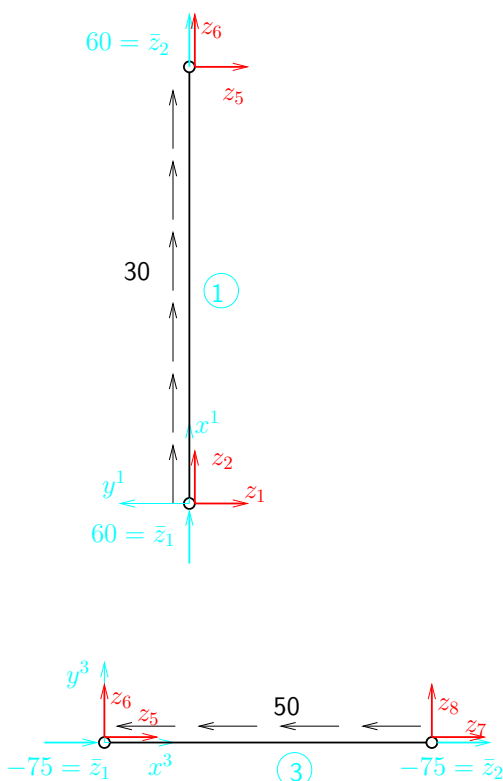


Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński



Przykładowe obliczenia kratownicy 2D

Zastępcze siły węzłowe dla obciążonych elementów i agregacja



$$\bar{\mathbf{z}}^e = \int_0^{l^e} \mathbf{N}^T p_x(x) dx, \quad \mathbf{N} = \left[1 - \frac{x^e}{l^e}, \frac{x^e}{l^e} \right]$$

$$\bar{\mathbf{z}}^1 = \int_0^4 \left[1 - \frac{x}{4} \right] \cdot 30 dx = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}^1 = (\mathbf{T}^1)^T \bar{\mathbf{z}}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\mathbf{z}^2 = 0, \quad \mathbf{z}^3 = \begin{bmatrix} -75 \\ 0 \\ -75 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

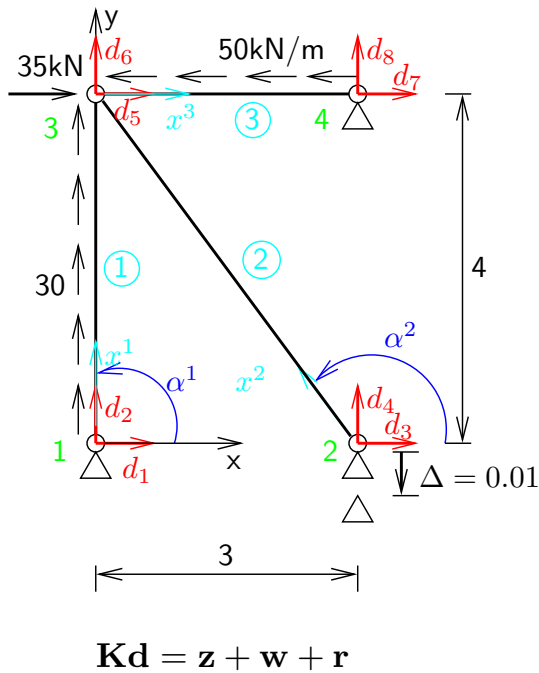
$$\mathbf{z} = \sum_e \mathbf{z}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \\ -75 \\ 60 \\ -75 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński



Przykładowe obliczenia kratownicy 2D

Układ równań, warunki brzegowe, rozwiązanie



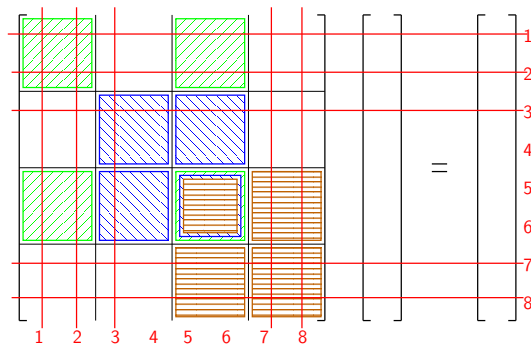
$$\mathbf{w}^T = \{0, 0, 0, 0, 35, 0, 0, 0\}$$

$$\mathbf{r}^T = \{R_1, R_2, R_3, R_4, 0, 0, R_7, R_8\}$$

Warunki brzegowe:

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_7 = d_8 = 0, \quad d_4 = -0.01$$

Wykreślamy wiersze i kolumny dla których $d_i = 0$, otrzymujemy układ 3×3



$$\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{w}} + \hat{\mathbf{r}}$$

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński

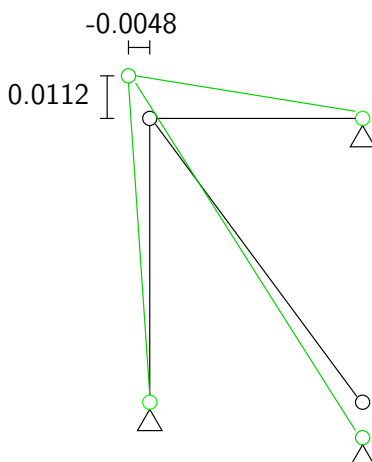


Przykładowe obliczenia kratownicy 2D

Rozwiązanie, przemieszczenia węzłów

$$\begin{bmatrix} 1280 & 960 & -1280 \\ 960 & 0 + 720 + 3333 & 0 - 960 + 0 \\ -1280 & 0 - 960 + 0 & 2500 + 1280 + 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.01 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -75 \\ 60 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 35 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1280 & 960 & -1280 \\ 960 & 4053 & -960 \\ -1280 & -960 & 3780 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.01 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_4 \\ -40 \\ 60 \end{bmatrix}$$



$$d_5 = -0.0048, \quad d_6 = 0.0112$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.01 \\ -0.0048 \\ 0.0112 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński

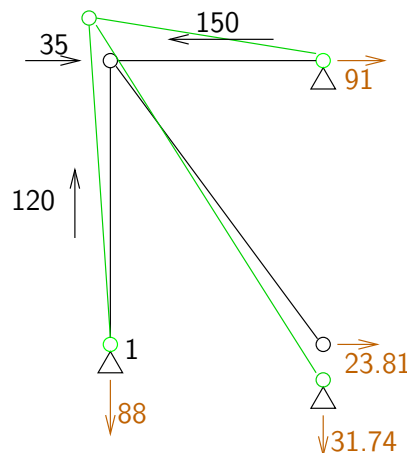


Przykładowe obliczenia kratownicy 2D

Rozwiązanie, reakcje podpór (uwaga na błędy zaokrąglenia)

$$\mathbf{r} = \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{z} - \mathbf{w}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.01 \\ -0.0048 \\ 0.0112 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \\ -40 \\ 60 \\ -75 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -88.00 \\ 23.81 \\ -31.74 \\ 0.19 \\ -0.26 \\ 91.00 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Sprawdzenie równowagi układu:

$$\sum X = -150 + 35 + 91.00 + 23.81 = -0.19$$

$$\sum Y = 120 - 88.00 - 31.74 = 0.26$$

$$\sum M_1 = -150 \cdot 4 + 35 \cdot 4 + 91.00 \cdot 4 + 31.74 \cdot 3 = -0.78$$

Przykładowe obliczenia kratownicy 2D

Powrót do elementu celem obliczenia sił przywęzłowych

Element 1

$$\bar{\mathbf{f}}^1 = \mathbf{T}^1 (\mathbf{K}^1 \mathbf{d}^1 - \mathbf{z}^1)$$

$$\mathbf{d}^1 = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{f}}^1 = \begin{bmatrix} -88.00 \\ -32.00 \end{bmatrix}$$

Element 2

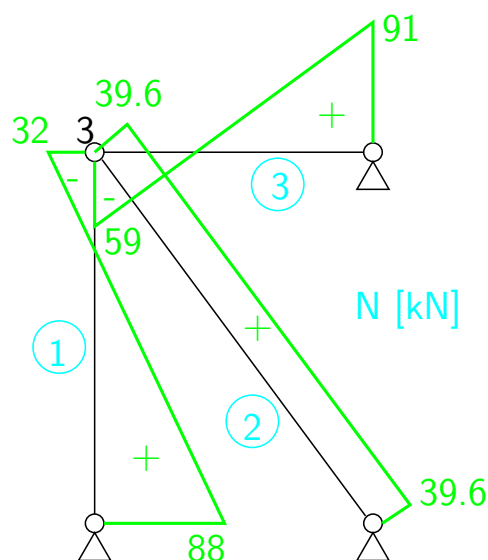
$$\bar{\mathbf{f}}^2 = \mathbf{T}^2 (\mathbf{K}^2 \mathbf{d}^2)$$

$$\mathbf{d}^2 = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{f}}^2 = \begin{bmatrix} -39.60 \\ 39.60 \end{bmatrix}$$

Element 3

$$\bar{\mathbf{f}}^3 = \mathbf{T}^3 (\mathbf{K}^3 \mathbf{d}^3 - \mathbf{z}^3)$$

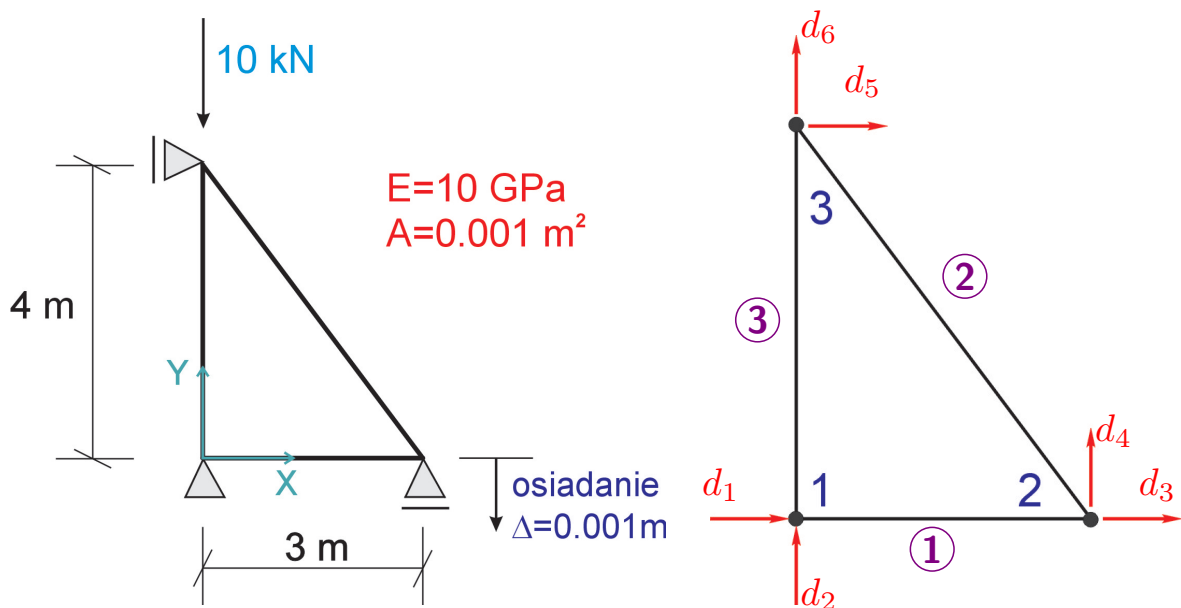
$$\mathbf{d}^3 = \begin{bmatrix} d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{f}}^3 = \begin{bmatrix} 59.00 \\ 91.00 \end{bmatrix}$$



Wykres sił normalnych
Sprawdź równowagę węzła 3

Kratownica płaska - drugi przykład

Zdefiniowanie zadania i dyskretyzacja



Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński



Kratownica płaska - drugi przykład

Dane wejściowe

Macierz sztywności $\bar{\mathbf{K}}^e$

$$\bar{\mathbf{K}}^e(EA, l^e) = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l^e} & -\frac{EA}{l^e} \\ EA & EA \\ -\frac{EA}{l^e} & \frac{EA}{l^e} \end{bmatrix}$$

Macierz topologii

$$\text{TOP} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sztywność przekrojowa

$$EA = 1 \cdot 10^4$$

Macierz transformacji \mathbf{T}^e

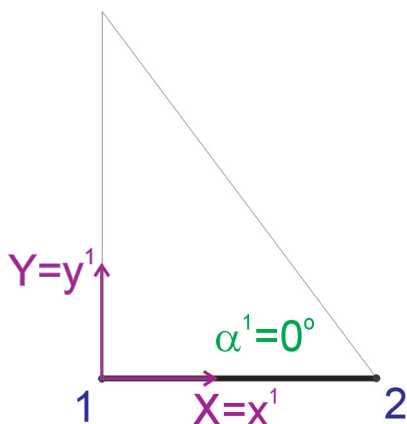
$$\mathbf{T}^e(\cos \alpha, \sin \alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński



Kratownica płaska - drugi przykład

Obliczenie macierzy transformacji oraz macierzy sztywności w lokalnym i globalnym układzie współrzędnych dla elementu 1



$$x^{(1)} = 3, \quad y^{(1)} = 0, \quad l^{(1)} = \sqrt{x^{(1)2} + y^{(1)2}}$$

$$\cos \alpha^1 = \frac{x^{(1)}}{l^{(1)}}, \quad \sin \alpha^1 = \frac{y^{(1)}}{l^{(1)}}$$

$$\mathbf{T}^1 = \mathbf{T}^e(\cos \alpha^1, \sin \alpha^1)$$

$$\mathbf{T}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{K}}^1 = \bar{\mathbf{K}}^e(EA, l^{(1)})$$

$$\bar{\mathbf{K}}^1 = \begin{bmatrix} 3.3333 & -3.3333 \\ -3.3333 & 3.3333 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{T}^{1T} \bar{\mathbf{K}}^1 \mathbf{T}^1$$

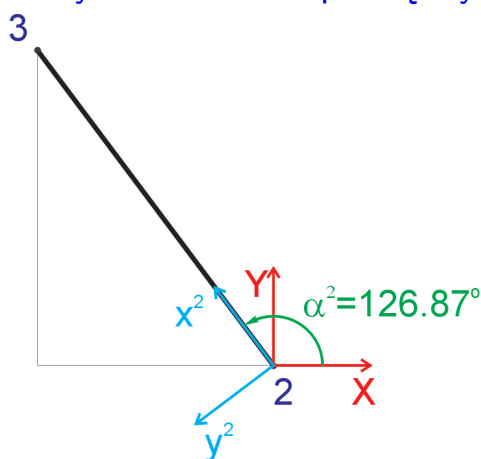
$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 3.3333 & 0 & -3.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.3333 & 0 & 3.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński



Kratownica płaska - drugi przykład

Obliczenie macierzy transformacji oraz macierzy sztywności w lokalnym i globalnym układzie współrzędnych dla elementu 2



$$x^{(2)} = -3, \quad y^{(2)} = 4, \quad l^{(2)} = \sqrt{x^{(2)2} + y^{(2)2}}$$

$$\cos \alpha^2 = \frac{x^{(2)}}{l^{(2)}}, \quad \sin \alpha^2 = \frac{y^{(2)}}{l^{(2)}}$$

$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}^e(\cos \alpha^2, \sin \alpha^2)$$

$$\mathbf{T}^2 = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{K}}^2 = \bar{\mathbf{K}}^e(EA, l^{(2)})$$

$$\bar{\mathbf{K}}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

$$\mathbf{K}^2 = \mathbf{T}^{2T} \bar{\mathbf{K}}^2 \mathbf{T}^2$$

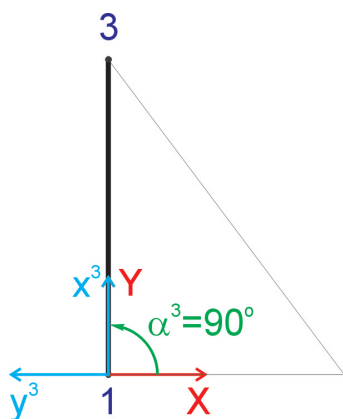
$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 0.72 & -0.96 & -0.72 & 0.96 \\ -0.96 & 1.28 & 0.96 & -1.28 \\ -0.72 & 0.96 & 0.72 & -0.96 \\ 0.96 & -1.28 & -0.96 & 1.28 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński



Kratownica płaska - drugi przykład

Obliczenie macierzy transformacji oraz macierzy sztywności w lokalnym i globalnym układzie współrzędnych dla elementu 3



$$\bar{\mathbf{K}}^3 = \bar{\mathbf{K}}^e(EA, l^{(3)})$$

$$\mathbf{K}^3 = \mathbf{T}^{3T} \bar{\mathbf{K}}^3 \mathbf{T}^3$$

$$x^{(3)} = 0, \quad y^{(3)} = 4, \quad l^{(3)} = \sqrt{x^{(3)2} + y^{(3)2}}$$

$$\cos \alpha^3 = \frac{x^{(3)}}{l^{(3)}}, \quad \sin \alpha^3 = \frac{y^{(3)}}{l^{(3)}}$$

$$\mathbf{T}^3 = \mathbf{T}^e(\cos \alpha^3, \sin \alpha^3)$$

$$\mathbf{T}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

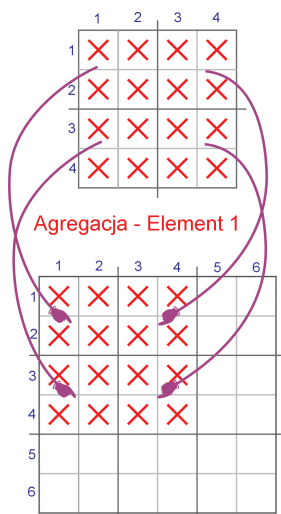
$$\bar{\mathbf{K}}^3 = \begin{bmatrix} 2.5 & -2.5 \\ -2.5 & 2.5 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

$$\mathbf{K}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & -2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 0 & 2.5 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński

Kratownica płaska - drugi przykład

Agregacja macierzy sztywności elementu 1 do globalnej macierzy sztywności układu



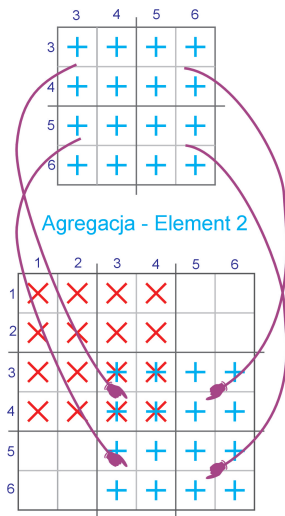
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 & 0 & 0 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 & K_{44}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3.3333 & 0 & -3.3333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.3333 & 0 & 3.3333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński

Kratownica płaska - drugi przykład

Agregacja macierzy sztywności elementu 2 do globalnej macierzy sztywności układu

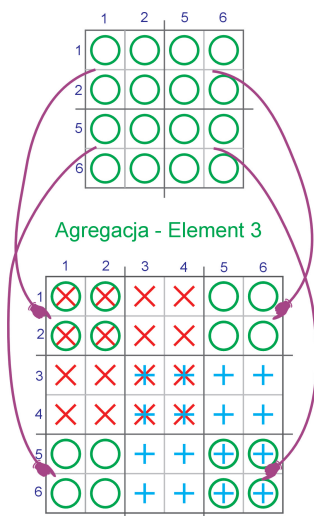


$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3.3333 & 0 & -3.3333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.3333 & 0 & 4.0533 & -0.96 & -0.72 & 0.96 \\ 0 & 0 & -0.96 & 1.28 & 0.96 & -1.28 \\ 0 & 0 & -0.72 & 0.96 & 0.72 & -0.96 \\ 0 & 0 & 0.96 & -1.28 & -0.96 & 1.28 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Kratownica płaska - drugi przykład

Agregacja macierzy sztywności elementu 3 do globalnej macierzy sztywności układu

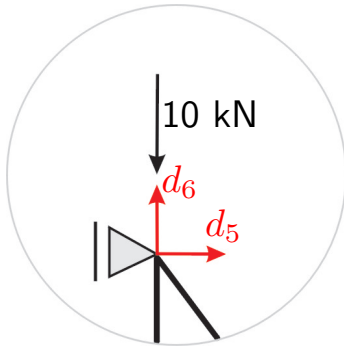


$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 + K_{11}^3 & K_{12}^1 + K_{12}^3 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & K_{13}^3 & K_{14}^3 \\ K_{21}^1 + K_{21}^3 & K_{22}^1 + K_{22}^3 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & K_{23}^3 & K_{24}^3 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ K_{31}^3 & K_{32}^3 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 + K_{33}^3 & K_{34}^2 + K_{34}^3 \\ K_{41}^3 & K_{42}^3 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 + K_{43}^3 & K_{44}^2 + K_{44}^3 \end{bmatrix}$$

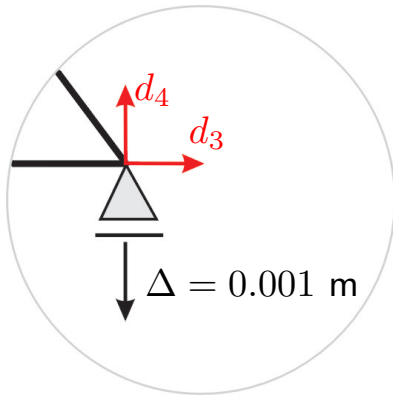
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3.3333 & 0 & -3.3333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & -2.5 \\ -3.3333 & 0 & 4.0533 & -0.96 & -0.72 & 0.96 \\ 0 & 0 & -0.96 & 1.28 & 0.96 & -1.28 \\ 0 & 0 & -0.72 & 0.96 & 0.72 & -0.96 \\ 0 & -2.5 & 0.96 & -1.28 & -0.96 & 3.78 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Kratownica płaska - drugi przykład

Wektor obciążenia od siły skupionej i wektor zastępczych sił wywołanych przez narzucone przemieszczenie



$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{d}_{wb} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.001 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

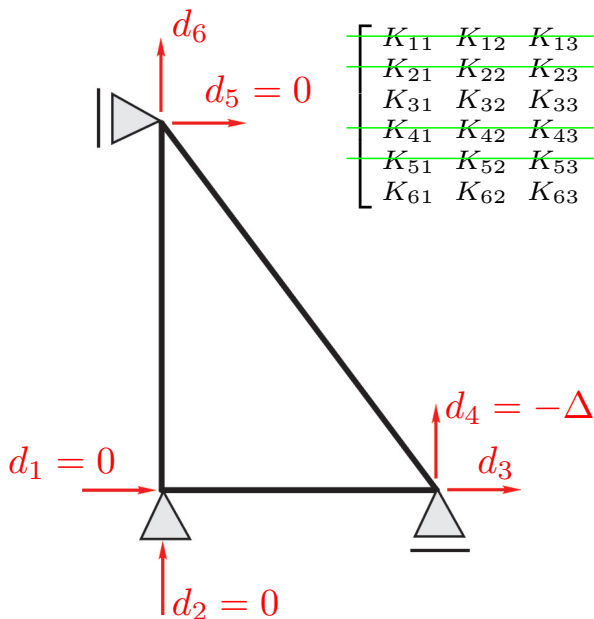
$$\mathbf{f} = \mathbf{w} - \mathbf{K} \mathbf{d}_{wb}$$

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński



Kratownica płaska - drugi przykład

Uwzględnienie warunków brzegowych $\mathbf{K} \rightarrow \hat{\mathbf{K}}, \mathbf{f} \rightarrow \hat{\mathbf{f}}$



$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \\ -\Delta \\ 0 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ R_4 \\ R_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & 0 & 0 & K_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K_{63} & 0 & 0 & K_{66} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \\ 0 \\ 0 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

Metody obliczeniowe, 2020 © P.Pluciński

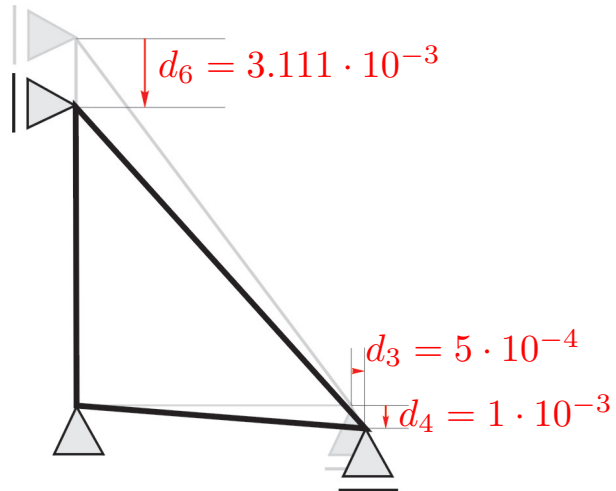


Kratownica płaska - drugi przykład

Wyznaczenie przemieszczeń węzłowych

$$\mathbf{d} = \hat{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{f}} + \mathbf{d}_{wb}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ -1 \\ 0 \\ -3.1111 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

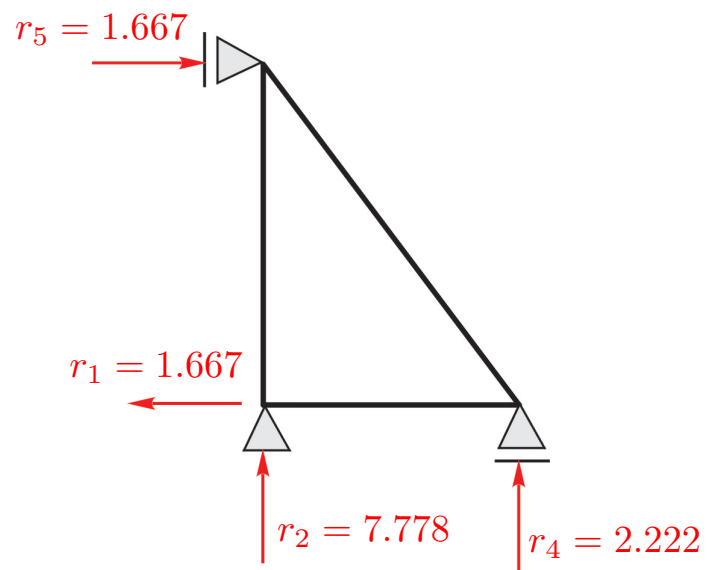


Kratownica płaska - drugi przykład

Wyznaczenie reakcji podporowych

$$\mathbf{r} = \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{w}$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -1.6667 \\ 7.7778 \\ 0 \\ 2.2222 \\ 1.6667 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Kratownica płaska - drugi przykład

Powrót do elementu - siły przywęzłowe - wykres sił podłużnych

Element 1

$$\mathbf{d}^1 = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}^1 = \mathbf{T}^1(\mathbf{K}^1 \mathbf{d}^1) = \begin{bmatrix} -1.6667 \\ 1.6667 \end{bmatrix}$$

Element 2

$$\mathbf{d}^2 = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}^2 = \mathbf{T}^2(\mathbf{K}^2 \mathbf{d}^2) = \begin{bmatrix} 2.7778 \\ -2.7778 \end{bmatrix}$$

Element 3

$$\mathbf{d}^3 = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{T}^3(\mathbf{K}^3 \mathbf{d}^3) = \begin{bmatrix} 7.7778 \\ -7.7778 \end{bmatrix}$$

