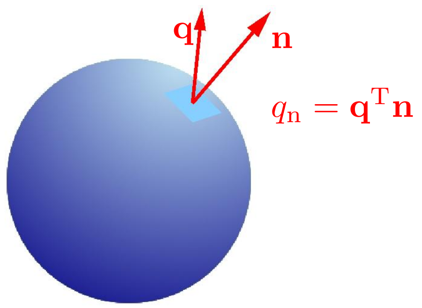
MES dla stacjonarnego przepływu ciepła

Piotr Pluciński
e-mail: Piotr.Plucinski@pk.edu.pl
Jerzy Pamin
e-mail: Jerzy.Pamin@pk.edu.pl

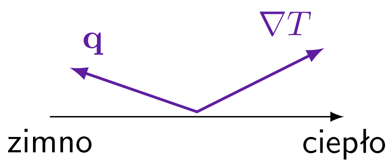
Katedra Technologii Informatycznych w Inżynierii
Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej
Strona domowa: www.CCE.pk.edu.pl

Zakres prezentacji

Problem stacjonarnego przepływu ciepła w 3D



$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$



Podstawowa niewiadoma - temperatura T

- prawo przewodnictwa cieplnego Fouriera
  $\mathbf{q} = -\mathbf{D}\,\nabla T$
- wektor gęstości strumienia ciepła
  $\mathbf{q} = \{q_x \; q_y \; q_z\}$ [W/m^2]
- wektor gradientu temperatury
  $$\nabla T = \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \; \frac{\partial T}{\partial y} \; \frac{\partial T}{\partial z} \right\} \text{ [K/m]}$$
- macierz przewodnictwa cieplnego
  $\mathbf{D} = \{k_{ij}\}$ [W/(mK)]

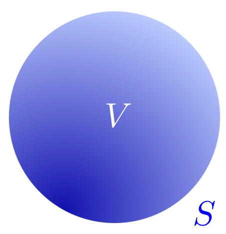
Gęstość strumienia wzrasta ze wzrostem gradientu temperatury.
Ciepło płynie od wyższej do niższej temperatury.

Bilans cieplny dla stacjonarnego przepływu ciepła

Ilość ciepła generowanego = ilość ciepła wypływającego

$$\int_V f \mathrm{d}V = \int_S q_{\mathrm{n}} \mathrm{d}S \qquad \forall V$$

f – gęstość źródła ciepła – ilość ciepła dostarczana ciału na jednostkę objętości i czasu [J/(m^{3}s)=W/m^3]



Wykorzystując twierdzenie Greena–Gaussa–Ostrogradskiego o całkowaniu przez części

$$\int_S q_{\mathrm{n}} \mathrm{d}S = \int_S \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}\,\mathbf{q}\, \mathrm{d}V = \int_V \left\{ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right\} \mathrm{d}V$$

$$\int_V f \mathrm{d}V = \int_V \nabla^{\mathrm{T}}\mathbf{q}\, \mathrm{d}V \quad \forall V \quad \Rightarrow \quad \nabla^{\mathrm{T}}\mathbf{q} = f \quad \forall \mathbf{x} \in V$$

Problem stacjonarnego przepływu ciepła w 3D

Równania przepływu ciepła

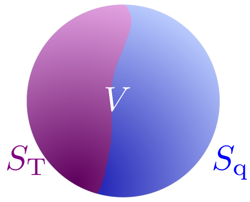
Równanie przewodnictwa (sformułowanie mocne)

$$\nabla^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}\nabla T) + f = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V$$

+ warunki brzegowe

$q_{\mathrm{n}} = \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} = \widehat{q}$ na S_{q}– naturalne w.b.(Neumanna)

$T = \widehat{T}$ na S_{T}– podstawowe w.b. (Dirichleta)



Dla materiałów izotropowych macierz $\mathbf{D}$ przyjmuje formę $\mathbf{D} = k\mathbf{I}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{f}{k} = 0$$ – równanie Poissona

Dla materiałów izotropowych bez źródła ciepła

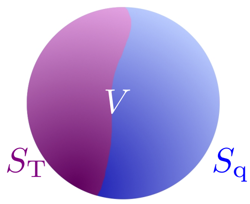
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$ – równanie Laplace'a

Stacjonarny przepływ ciepła w 3D

Weighted residual method

$$\int_V w\left(\nabla^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}\nabla T) + f\right) \mathrm{d}V = 0 \qquad \forall w \neq 0$$

$$\int_V w\nabla^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}\nabla T)\mathrm{d}V + \int_V wf\mathrm{d}V = 0$$



Sformułowanie słabe

$$-\int_V (\nabla w)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\nabla T\mathrm{d}V + \int_S w\Big(\overset{-\mathbf{q}}{\boxed{\mathbf{D}\nabla T}}\Big)^{\mathrm{T}}\mathbf{n}\mathrm{d}S + \int_V wf\mathrm{d}V = 0$$

$$-\int_V (\nabla w)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\nabla T\mathrm{d}V - \int_S w\,\overset{q_{\mathrm{n}}}{\boxed{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}}}\,\mathrm{d}S + \int_V wf\mathrm{d}V = 0$$

$$\int_V (\nabla w)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\nabla T\mathrm{d}V = -\int_{S_{\mathrm{q}}} w\,\underset{\text{naturalny w.b.}}{\boxed{\widehat{q}}}\,\mathrm{d}S - \int_{S_{\mathrm{T}}} w\,\underset{\text{niewiadoma wtórna}}{\boxed{q_{\mathrm{n}}}}\,\mathrm{d}S + \int_V wf\mathrm{d}V \quad \forall w$$

Problem stacjonarnego przepływu ciepła w 3D

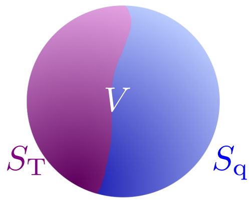
Sformułowanie mocne

$$\nabla^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}\nabla T) + f = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V$$

+ warunki brzegowe

$$q_{\mathrm{n}} = \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} = \widehat{q} \qquad \text{na } S_{\mathrm{q}}$$

$$T = \widehat{T} \qquad \text{na } S_{\mathrm{T}}$$



Sformułowanie słabe

$$\int_V (\nabla w)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\nabla T \mathrm{d}V = -\int_{S_{\mathrm{q}}} w\widehat{q}\,\mathrm{d}S - \int_{S_{\mathrm{T}}} w q_{\mathrm{n}} \mathrm{d}S + \int_V w f \mathrm{d}V \quad \forall w \neq 0$$

+ podstawowy warunek brzegowy

$$T = \widehat{T} \quad \text{na } S_{\mathrm{T}}$$

Problem stacjonarnego przepływu ciepła w 3D

Układ równań MES

- $T = \mathbf{N}\boldsymbol{\Theta}$ – aproksymowana funkcja temperatury
- $\mathbf{N}$ – wektor funkcji kształtu (aproksymacja globalna)
- $\boldsymbol{\Theta}$ – wektor węzłowych wartości temperatury
- $\nabla T = \mathbf{B}\boldsymbol{\Theta}$ – aproksymowana funkcja gradientu temperatury
- $\mathbf{B} = \nabla\mathbf{N}$ – macierz pochodnych funkcji kształtu
- $w = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}$ – aproksymacja funkcji wagowej ($\nabla w = \mathbf{B}\mathbf{w}$)

$$\int_V (\nabla w)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\nabla T \mathrm{d}V = -\int_{S_{\mathrm{q}}} w\widehat{q}\mathrm{d}S - \int_{S_{\mathrm{T}}} w q_{\mathrm{n}} \mathrm{d}S + \int_V w f \mathrm{d}V \quad \forall \mathbf{w}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{f}_{\mathrm{b}} + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\mathrm{d}V, \quad \mathbf{f}_{\mathrm{b}} = -\int_{S_{\mathrm{q}}} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\widehat{q}\,\mathrm{d}S - \int_{S_{\mathrm{T}}} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} q_{\mathrm{n}}\,\mathrm{d}S, \quad \mathbf{f} = \int_V \mathbf{N}^{\mathrm{T}} f\,\mathrm{d}V$$

Dobór funkcji aproksymacyjnych

Podstawowe kroki algorytmu MES

1. Zbudowanie sformułowania mocnego
2. Transformacja do sformułowania słabego
3. Wybór aproksymacji poszukiwanej funkcji
4. Wybór funkcji wagowej (zazwyczaj podejście Galerkina)

Dobór funkcji aproksymacyjnych – zagadnienie 1D

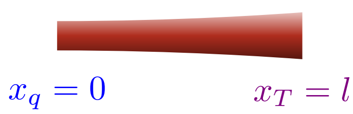
1 Zbudowanie sformułowania mocnego

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Ak\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) + f = 0$$

+ warunki brzegowe

$$q_x = \widehat{q} \qquad \text{dla } x_\mathrm{q} \ (\text{ np. } x_\mathrm{q} = 0)$$

$$T = \widehat{T} \qquad \text{dla } x_\mathrm{T} \ (\text{ np. } x_\mathrm{T} = l)$$



2 Transformacja do sformułowania słabego

$$\int_0^l \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(Ak\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = (wA)\bigg|_{x=0} \widehat{q} - (wAq_x)\bigg|_{x=l} + \int_0^l wf\,\mathrm{d}x$$

+ podstawowy warunek brzegowy

$$T = \widehat{T} \qquad \text{dla } x_\mathrm{T} \ (\text{ np. } x_\mathrm{T} = l)$$

Dobór funkcji aproksymacyjnych – zagadnienie 1D

3 Wybór funkcji aproksymujących

Funkcja liniowa

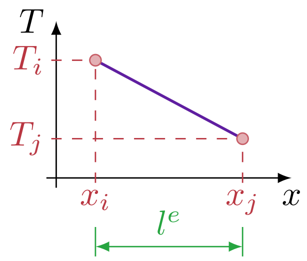
$$T^e(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}^e$$

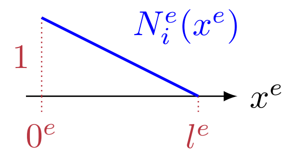
$$\boldsymbol{\Phi} = [1 \; x], \qquad \boldsymbol{\alpha}^e = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

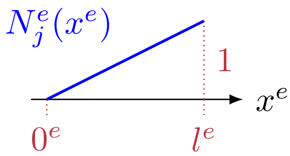
$$T^e(x) = N_i^e(x^e)T_i + N_j^e(x^e)T_j = \mathbf{N}^e\boldsymbol{\Theta}^e$$

$$\mathbf{N}^e = [N_i^e(x^e) \; N_j^e(x^e)], \qquad \boldsymbol{\Theta}^e = \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}T^e}{\mathrm{d}x^e} = \mathbf{B}^e\boldsymbol{\Theta}^e, \qquad \mathbf{B}^e = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}^e}{\mathrm{d}x^e} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}N_i^e}{\mathrm{d}x^e} & \frac{\mathrm{d}N_j^e}{\mathrm{d}x^e} \end{bmatrix}$$







Dobór funkcji aproksymacyjnych – zagadnienie 1D

3 Dobór funkcji aproksymacyjnych

Funkcja kwadratowa

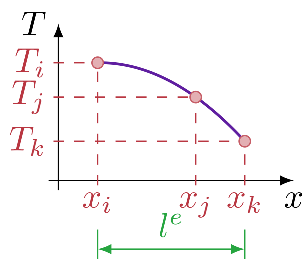
$$T^e(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}^e$$

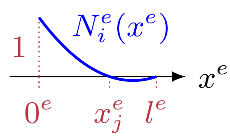
$$\boldsymbol{\Phi} = [1 \; x \; x^2], \qquad \boldsymbol{\alpha}^e = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

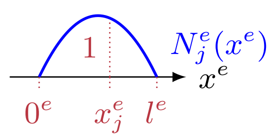
$$T^e(x) = N_i^e(x^e)T_i + N_j^e(x^e)T_j + N_k^e(x^e)T_k$$
$$= \mathbf{N}^e\boldsymbol{\Theta}^e$$

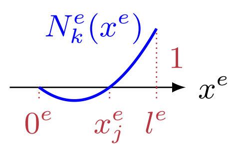
$$\mathbf{N}^e = [N_i^e(x^e) \; N_j^e(x^e) \; N_k^e(x^e)], \quad \boldsymbol{\Theta}^e = \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}T^e}{\mathrm{d}x^e} = \mathbf{B}^e\boldsymbol{\Theta}^e, \qquad \mathbf{B}^e = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}^e}{\mathrm{d}x^e} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}N_i^e}{\mathrm{d}x^e} & \frac{\mathrm{d}N_j^e}{\mathrm{d}x^e} & \frac{\mathrm{d}N_k^e}{\mathrm{d}x^e} \end{bmatrix}$$









Dobór funkcji aproksymacyjnych – Zagadnienie 2D

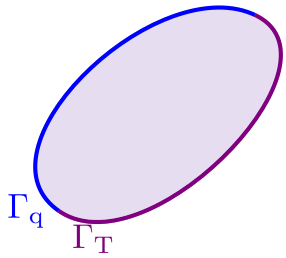
1 Zbudowanie sformułowania mocnego

$$\nabla^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}\nabla T) + f = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in A$$

+ warunki brzegowe

$$q_{\mathrm{n}} = \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} = \widehat{q} \qquad \text{na } \Gamma_{\mathrm{q}}$$

$$T = \widehat{T} \qquad \text{na } \Gamma_{\mathrm{T}}$$



2 Transformacja do sformułowania słabego (h - grubość konfiguracji)

$$\int_A (\nabla w)^{\mathrm{T}} \mathbf{D} h \nabla T \mathrm{d}A = -\int_{\Gamma_{\mathrm{q}}} wh\widehat{q}\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_{\mathrm{T}}} whq_{\mathrm{n}}\mathrm{d}\Gamma + \int_A whf\mathrm{d}A$$

+ podstawowy warunek brzegowy

$$T = \widehat{T} \quad \text{na } \Gamma_{\mathrm{T}}$$

Dobór funkcji aproksymacyjnych – zagadnienie 2D

3 Wybór funkcji aproksymujących

Element trójwęzłowy

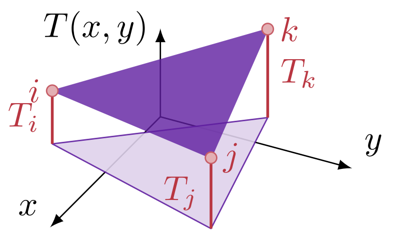
$$T^e(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\alpha}^e$$

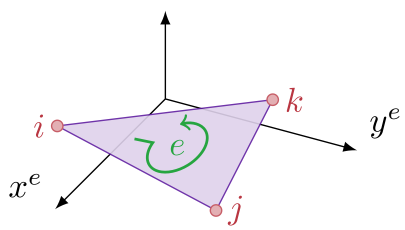
$$\mathbf{\Phi} = [1 \ x \ y], \qquad \boldsymbol{\alpha}^e = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$T^e(x,y) = N_i^e(x^e,y^e)T_i + N_j^e(x^e,y^e)T_j + \\ + N_k^e(x^e,y^e)T_k = \mathbf{N}^e\mathbf{\Theta}^e$$

$$\mathbf{N}^e = [N_i^e(x^e,y^e) \ N_j^e(x^e,y^e) \ N_k^e(x^e,y^e)],$$

$$\mathbf{\Theta}^e = \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix}$$





Dobór funkcji aproksymacyjnych – zagadnienie 2D

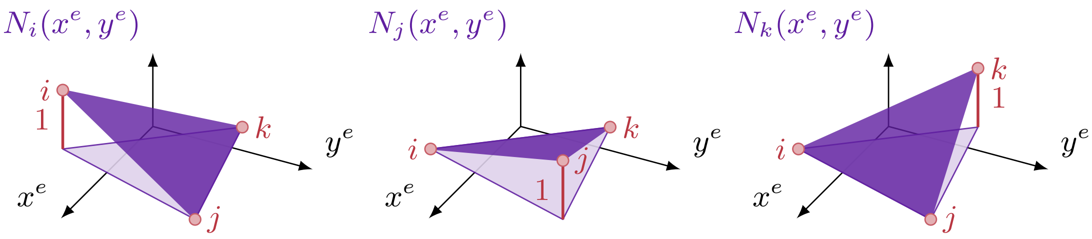
3 Wybór funkcji aproksymujących

Element trójwęzłowy

$$\mathbf{N}^e = [N_i^e(x^e,y^e)\ N_j^e(x^e,y^e)\ N_k^e(x^e,y^e)]$$

e.g. for $N_i(x^e,y^e)$

$$N_i(x_i^e,y_i^e) = 1$$
$$N_i(x_j^e,y_j^e) = 0$$
$$N_i(x_k^e,y_k^e) = 0$$



Wyznaczenie współczynników funkcji kształtu
$N_i(x^e,y^e) = \alpha_{1i} + \alpha_{2i}x^e + \alpha_{3i}y^e$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \alpha_{3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} \alpha_{1i} &= \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2P_\triangle} \\ \alpha_{2i} &= \frac{y_j - y_k}{2P_\triangle} \\ \alpha_{3i} &= \frac{x_k - x_j}{2P_\triangle} \end{aligned}$$

Dobór funkcji aproksymacyjnych – zagadnienie 2D

Trójkąt Pascala – element trójwęzłowy

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & x & & y & & & \\ & & x^2 & & xy & & y^2 & & \\ & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 & \\ x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4 \end{array}$$

Trójkąt Pascala – element sześciowęzłowy

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & x & & y & & & \\ & & x^2 & & xy & & y^2 & & \\ & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 & \\ x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4 \end{array}$$

Dobór funkcji aproksymacyjnych – zagadnienie 2D

Kryteria zbieżności - wymagania dla aproksymacji

- zupełność – aproksymacja musi być w stanie reprezentować dowolne pole stałe i dowolny stały gradient pola
- zgodność na granicach międzylementowych / styku elementów (dostosowanie) – aproksymacja musi być ciągła na granicach między elementami

Dobór funkcji aproksymacyjnych – zagadnienie 2D

3 Wybór funkcji aproksymujących

Element czterowęzłowy

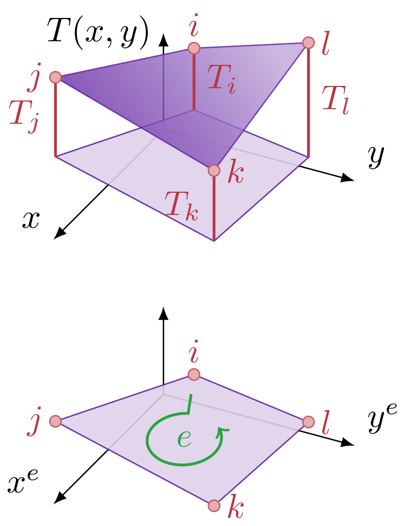
$$T^e(x,y) = \alpha_1^e + \alpha_2^e x + \alpha_3^e y + \alpha_4^e xy = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\alpha}^e$$

$$\mathbf{\Phi} = [1 \; x \; y \; xy], \qquad \boldsymbol{\alpha}^e = \begin{bmatrix} \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \\ \alpha_3^e \\ \alpha_4^e \end{bmatrix}$$

$$T^e(x,y) = N_i^e(x^e,y^e)T_i + N_j^e(x^e,y^e)T_j + \\ + N_k^e(x^e,y^e)T_k + N_l^e(x^e,y^e)T_l = \mathbf{N}^e\mathbf{\Theta}^e$$

$$\mathbf{N}^e = [N_i^e(x^e,y^e) \; N_j^e(x^e,y^e) \; N_k^e(x^e,y^e) \; N_l^e(x^e,y^e)]$$

$$\mathbf{\Theta}^e = \{T_i \; T_j \; T_k \; T_l\}$$



Dobór funkcji aproksymacyjnych – zagadnienie 2D

3 Wybór funkcji aproksymujących

Element czterowęzłowy (prostokątny)

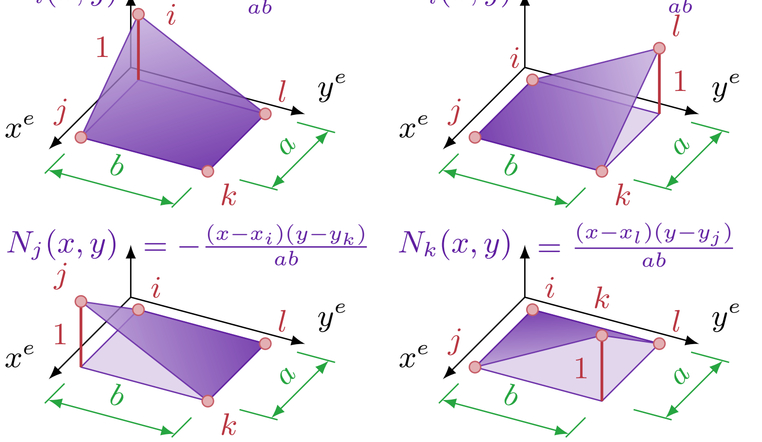
$$\mathbf{N}^e = [N_i^e(x^e,y^e)\; N_j^e(x^e,y^e)\; N_k^e(x^e,y^e)\; N_l^e(x^e,y^e)]$$

e.g. for $N_i(x^e,y^e)$

$$N_i(x_i^e,y_i^e) = 1$$
$$N_i(x_j^e,y_j^e) = 0$$
$$N_i(x_k^e,y_k^e) = 0$$
$$N_i(x_l^e,y_l^e) = 0$$

$$N_i(x,y) = \frac{(x-x_j)(y-y_l)}{ab} \qquad N_l(x,y) = -\frac{(x-x_k)(y-y_i)}{ab}$$

$$N_j(x,y) = -\frac{(x-x_i)(y-y_k)}{ab} \qquad N_k(x,y) = \frac{(x-x_l)(y-y_j)}{ab}$$



$$\nabla T^e = \mathbf{B}^e\boldsymbol{\Theta}^e$$

$$\mathbf{B}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial x^e} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial y^e} \end{bmatrix}$$

Dobór funkcji aproksymacyjnych – zagadnienie 2D

Trójkąt Pascala – element czterowęzłowy

$$1$$
$$x \qquad y$$
$$x^2 \qquad xy \qquad y^2$$
$$x^3 \qquad x^2y \qquad xy^2 \qquad y^3$$
$$x^4 \qquad x^3y \qquad x^2y^2 \qquad xy^3 \qquad y^4$$

Trójkąt Pascala – element ośmiowęzłowy

$$1$$
$$x \qquad y$$
$$x^2 \qquad xy \qquad y^2$$
$$x^3 \qquad x^2y \qquad xy^2 \qquad y^3$$
$$x^4 \qquad x^3y \qquad x^2y^2 \qquad xy^3 \qquad y^4$$

Dobór funkcji aproksymacyjnych – zagadnienie 3D

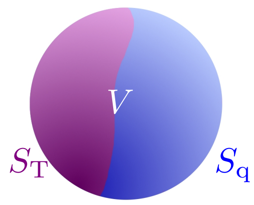
1 Zbudowanie sformułowania mocnego

$$\nabla^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}\nabla T) + f = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V$$

+ warunki brzegowe

$$q_{\mathrm{n}} = \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} = \widehat{q} \qquad \text{na } S_{\mathrm{q}}$$

$$T = \widehat{T} \qquad \text{na } S_{\mathrm{T}}$$



2 Transformacja do sformułowania słabego

$$\int_V (\nabla w)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\nabla T \mathrm{d}V = -\int_{S_{\mathrm{q}}} w\widehat{q}\mathrm{d}S - \int_{S_{\mathrm{T}}} w q_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S + \int_V wf\mathrm{d}V$$

+ podstawowy warunek brzegowy

$$T = \widehat{T} \quad \text{na } S_{\mathrm{T}}$$

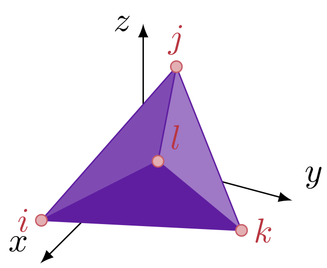
Dobór funkcji aproksymacyjnych – zagadnienie 3D

3 Wybór funkcji aproksymujących

Element czworościenny

$$T^e(x,y,z) = \alpha_1^e + \alpha_2^e x + \alpha_3^e y + \alpha_4^e z$$

$$\begin{aligned} T^e(x,y,z) &= N_i^e(x^e,y^e,z^e)T_i + N_j^e(x^e,y^e,z^e)T_j \\ &+ N_k^e(x^e,y^e,z^e)T_k + N_l^e(x^e,y^e,z^e)T_l \\ &= \mathbf{N}^e\boldsymbol{\Theta}^e \end{aligned}$$



Element sześciościenny

$$\begin{aligned} T^e(x,y,z) &= \alpha_1^e + \alpha_2^e x + \alpha_3^e y + \alpha_4^e z + \\ &+ \alpha_5^e xy + \alpha_6^e yz + \alpha_7^e xz + \alpha_8^e xyz \end{aligned}$$