

Oszacowanie błędu dyskretyzacji

Witold Cecot

e-mail: plcecot@cyf-kr.edu.pl

Jerzy Pamin

e-mail: Jerzy.Pamin@pk.edu.pl

Katedra Technologii Informatycznych w Inżynierii
Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej

Strona domowa: www.CCE.pk.edu.pl

Błąd dyskretyzacji

Popętniane błędy

- ▶ Błąd modelowania
- ▶ **Błąd dyskretyzacji** (w aproksymacji MES)
- ▶ Błąd rozwiązania

Metody oceny błędu dyskretyzacji

- ▶ hierarchiczna (Runge)
- ▶ jawna residualna (niejawna tu pominięta)
- ▶ oparta na wygładzaniu (Zienkiewicza-Zhu)
- ▶ analiza błędu interpolacji (nie rozważana w wykładzie)

Aproksymacja MES z użyciem funkcji liniowych

Przykładowy problem brzegowy

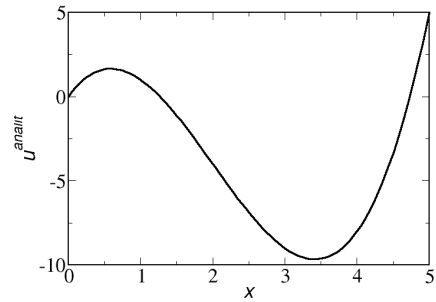
Rozwiąż stosując 4 elementy liniowe

$$-u'' + u = f, \quad f = x^3 - 6x^2 + 12, \quad x \in (0, 5)$$

Wb: $u(0) = 0, \quad u(5) = 5$

Rozwiązanie analityczne:

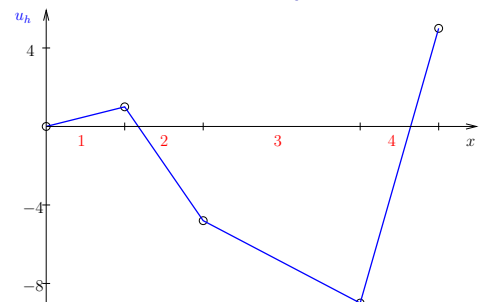
$$u^{analit} = x^3 - 6x^2 + 6x$$



Rozwiązanie aproksymacyjne u_h (h - rozmiar elementu)

x	0	1	2	4	5
u_h	0	0.938	-4.797	9.153	5

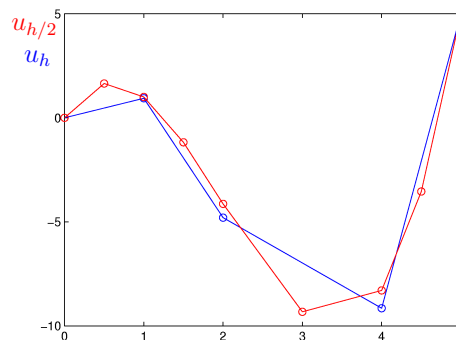
Miara błęd: $e \stackrel{\text{def}}{=} u - u_h$



Metody obliczeniowe, 2020 © J.Pamin



Metoda hierarchiczna $e^H = u_{h/2} - u_h$



x	0	0.5	1	1.5	2	3	4	4.5	5
u_h	0	0.469	0.938	-1.930	-4.797	-6.975	-9.153	-2.077	5
$u_{h/2}$	0	1.647	1.000	-1.179	-4.138	-9.324	-8.299	-3.543	5
$u_{h/2} - u_h$	0	1.178	0.062	0.751	0.660	-2.349	0.855	-1.467	0

$$\eta_i^H = \sqrt{\int_{x_i}^{x_{i+1}} (u_{h/2} - u_h)^2 dx} \rightarrow \eta_1^H = 0.69, \quad \eta_2^H = 0.59, \quad \eta_3^H = 1.70, \quad \eta_4^H = 0.79$$

$$\|e^H\|^2 = \|u_{h/2} - u_h\|^2 = \int_0^5 (u_{h/2} - u_h)^2 dx \rightarrow \|e^H\| \approx 2.08$$

$$\|u_{h/2}\|^2 = \int_0^5 (u_{h/2})^2 dx \rightarrow \|u_{h/2}\| = 12.35 \rightarrow \frac{\|e^H\|}{\|u_{h/2}\|} \approx 17\%$$

Metody obliczeniowe, 2020 © J.Pamin



Oszacowanie błędów oparte na residuum (wersja jawna)

Residuum równania różniczkowego

$$-u'' + u = f, \quad f = x^3 - 6x^2 + 12 \rightarrow R(x) = f - (-u_h'' + u_h)$$

Residuum dostarcza oszacowania błędów od góry

$$\|e\| \leq C\|R\|$$

W 2D (J - skok pierwszej pochodnej)

$$\|e\|^2 \leq C(h^2\|R\|^2 + h\|J\|^2)$$

Wskaźnik błędów w jednowymiarowym elemencie i

$$\eta_i^R = h_i \sqrt{\int_{x_i}^{x_{i+1}} R^2 dx}, \quad u_h'' = 0 \rightarrow R = x^3 - 6x^2 + 12 - u_h$$

Podstawienie interpolacji za u_h , np.

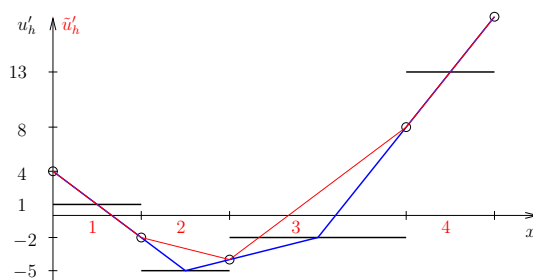
$$\eta_1^R = 1 \sqrt{\int_0^1 \{x^3 - 6x^2 + 12 - [0(x-1) + 0.938x]\}^2 dx} = 9.94$$

Obliczenie normy błędów względnego

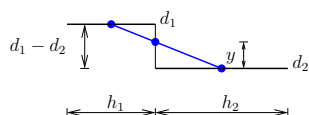
$$\frac{\eta_1^R}{\|f\|} \approx 33\%$$

i porównanie jakości rozwiązania w elementach

Oszacowanie błędów oparte na wygładzaniu $e^S = \tilde{u}'_h - u'_h$



Wygładzona **pochodna** rozwiązania \tilde{u}'_h (przez punkty na brzegach elementów)



$$y = \frac{h_2}{h_1+h_2}(d_1 - d_2)$$

$$\tilde{u}' = d_2 + y = d_1 \frac{h_2}{h_1+h_2} + d_2 \frac{h_1}{h_1+h_2}$$

If $h_1 = h_2$ then $\tilde{u}' = \frac{d_1+d_2}{2}$

$\tilde{u}'_1 = 4.2$ (ekstrapolacja do węzła 1),

$\tilde{u}'_2 = -2.4, \tilde{u}'_3 = -4.5, \tilde{u}'_4 = 8.7, \tilde{u}'_5 = 19.6$

$$\eta_i^S = \sqrt{\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\tilde{u}'_h - u'_h)^2 dx}$$

$$\eta_1^S = \sqrt{\int_0^1 \{4.2(1-x) + (-2.4)x - 0.94\}^2 dx} = 1.93$$

$$\eta_2^S = 2.35, \eta_3^S = 8.09, \eta_4^S = 3.14$$

$$\|e^S\|^2 = \int_0^5 (\tilde{u}'_h - u'_h)^2 dx = \sum_i (\eta_i^S)^2 \rightarrow \frac{\|e^S\|}{\|\tilde{u}'_h\|} \approx 57\%$$