

MES w analizie wyboczenia

Piotr Pluciński

e-mail: Piotr.Plucinski@pk.edu.pl

Jerzy Pamin

e-mail: Jerzy.Pamin@pk.edu.pl

Katedra Technologii Informatycznych w Inżynierii
Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej

Strona domowa: www.CCE.pk.edu.pl

Plan prezentacji

- 1 Wprowadzenie
- 2 Wyprowadzenie układu równań MES
 - Ramowy element skończony
- 3 Przykład

Wprowadzenie

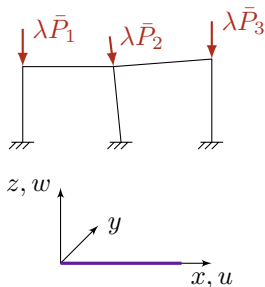
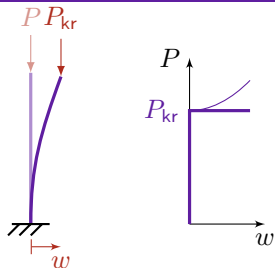
Obserwacja

Sztywność giętna jest zwiększana przez siłę rozciągającą, a zmniejszana przez siłę ściskającą. Wystarczająco duża siła ściskająca redukuje sztywność na zginanie do zera powodując wyboczenie konstrukcji.

Założenia

- liniowa sprężystość: $\sigma_x = E\varepsilon_x$
- obciążenie statyczne jednoparametrowe
- układ idealny (bez imperfekcji)
- nie zakłada się zasady zesztynnienia

$$\varepsilon_x(x) = u'(x) - zw''(x) + \frac{1}{2} (w'(x))^2$$



Kryterium energetyczne

$$\Phi = U - W$$

- Φ – całkowita energia
- U – energia sprężysta: $U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_x \sigma_x dV$
- W – praca sił zewnętrznych: $W = \mathbf{d}^T \mathbf{f}$
 - \mathbf{d} – wektor stopni swobody (przemieszczeń węzłowych)
 - \mathbf{f} – wektor sił zewnętrznych

Wyprowadzenie układu równań MES

Kryterium energetyczne

$$\Phi = U - W$$

- Φ – całkowita energia
- U – energia sprężysta: $U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_x \sigma_x dV$
- W – praca sił zewnętrznych: $W = \mathbf{d}^T \mathbf{f}$
 - \mathbf{d} – wektor stopni swobody (przemieszczeń węzłowych)
 - \mathbf{f} – wektor sił zewnętrznych

Wartość siły podłużnej przed wyobczeniem

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_x, \quad \sigma_x = \frac{N}{A}, \quad \sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \varepsilon_x = u' \implies N(x) = EAu'(x)$$

Energia sprężysta

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_x \sigma_x dV$$

Energia sprężysta

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_x \frac{\sigma_x}{E \varepsilon_x} dV$$

Energia sprężysta

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV$$

Energia sprężysta

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \left(u' - z w'' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 dV$$

Energia sprężysta

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \left(u' - z w'' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 dV$$

Energia sprężysta układu zdyskretyzowanego

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{V^e} E \left(u^{e'} - z w^{e''} + \frac{1}{2} w^{e'2} \right)^2 dV^e \right\}$$

Energia sprężysta

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV$$
$$U = \frac{1}{2} \int_V E \left(u' - zw'' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 dV$$

Energia sprężysta układu zdyskretyzowanego

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{V^e} E \left(u^{e'} - zw^{e''} + \frac{1}{2} w^{e'2} \right)^2 dV^e \right\}$$
$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left\{ \int_{A^e} E \left(u^{e'2} + z^2 w^{e''2} + \frac{1}{4} w^{e'4} - 2zu^{e'} w^{e''} + u^{e'} w^{e'2} - zw^{e''} w^{e'2} \right) dA^e \right\} dx^e \right\}$$

Kryterium energetyczne

Energia sprężysta

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV$$
$$U = \frac{1}{2} \int_V E \left(u' - zw'' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 dV$$

Energia sprężysta układu zdyskretyzowanego

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{V^e} E \left(u^{e'} - zw^{e''} + \frac{1}{2} w^{e'2} \right)^2 dV^e \right\}$$
$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left\{ \int_{A^e} E \left(u^{e'2} + z^2 w^{e''2} + \frac{1}{4} w^{e'4} - 2zu^{e'}w^{e''} + u^{e'}w^{e'2} - zw^{e''}w^{e'2} \right) dA^e \right\} dx^e \right\}$$

człon nieliniowy, przy linearyzacji $\cong 0$

Energia sprężysta

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV$$
$$U = \frac{1}{2} \int_V E \left(u' - zw'' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 dV$$

Energia sprężysta układu zdyskretyzowanego

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{V^e} E \left(u^{e'} - zw^{e''} + \frac{1}{2} w^{e'2} \right)^2 dV^e \right\}$$
$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left\{ \int_{A^e} E (u^{e'2} + z^2 w^{e''2} - 2zu^{e'} w^{e''} + u^{e'} w^{e'2} - zw^{e''} w^{e'2}) dA^e \right\} dx^e \right\}$$

Energia sprężysta

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV$$
$$U = \frac{1}{2} \int_V E \left(u' - zw'' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 dV$$

Energia sprężysta układu zdyskretyzowanego

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{V^e} E \left(u^{e'} - zw^{e''} + \frac{1}{2} w^{e'2} \right)^2 dV^e \right\}$$
$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left(EA^e u^{e'2} + EI_y^e w^{e''2} + EA^e u^{e'} w^{e'2} \right) dx^e \right\}$$

Kryterium energetyczne

Energia sprężysta

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV$$
$$U = \frac{1}{2} \int_V E \left(u' - zw'' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 dV$$

Energia sprężysta układu zdyskretyzowanego

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{V^e} E \left(u^{e'} - zw^{e''} + \frac{1}{2} w^{e'2} \right)^2 dV^e \right\}$$
$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left(EA^e u^{e'2} + EI_y^e w^{e''2} + EA^e u^{e'} w^{e'2} \right) dx^e \right\}$$

siła podłużna $N^e(x)$

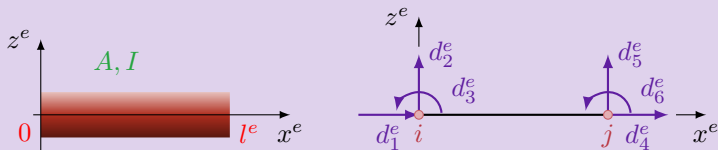
Energia sprężysta

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV$$
$$U = \frac{1}{2} \int_V E \left(u' - zw'' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 dV$$

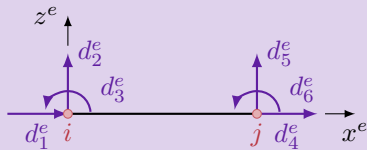
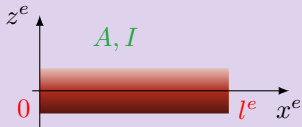
Energia sprężysta układu dyskretyzowanego

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{V^e} E \left(u^{e'} - zw^{e''} + \frac{1}{2} w^{e'2} \right)^2 dV^e \right\}$$
$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left(EA^e u^{e'2} + EI_y^e w^{e''2} + N^e(x) w^{e'2} \right) dx^e \right\}$$

Element ramowy

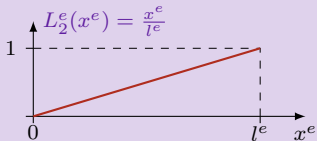
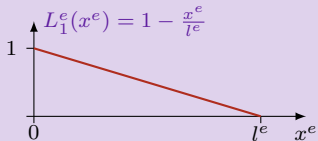


Element ramowy

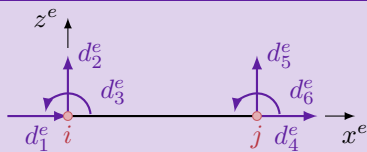
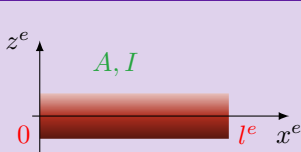


Przemieszczenie $u(x)^e = \mathbf{N}_u \mathbf{d}^e$,

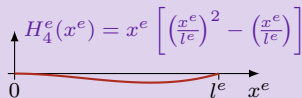
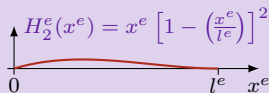
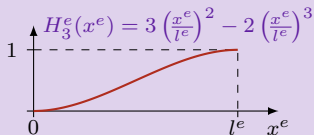
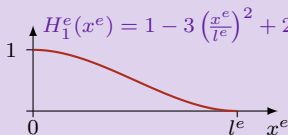
$$\mathbf{N}_u = [L_1^e \ 0 \ 0 \ L_2^e \ 0 \ 0]$$



Element ramowy



Ugięcie $w(x)^e = \mathbf{N}_w \mathbf{d}^e$, $\mathbf{N}_w = [0 \ H_1^e \ H_2^e \ 0 \ H_3^e \ H_4^e]$



Energia sprężysta układu zdyskretyzowanego

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left(EA^e u^{e\prime 2} + EI_y^e w^{e\prime\prime 2} + N^e(x) w^{e\prime 2} \right) dx^e \right\}$$

$$u(x)^e = \mathbf{N}_u \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_u \mathbf{T}^e \mathbf{d}, \quad w(x)^e = \mathbf{N}_w \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_w \mathbf{T}^e \mathbf{d}$$

Energia sprężysta układu zdyskretyzowanego

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left(EA^e u^{e\prime 2} + EI_y^e w^{e\prime\prime 2} + N^e(x) w^{e\prime 2} \right) dx^e \right\}$$

$$u(x)^e = \mathbf{N}_u \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_u \mathbf{T}^e \mathbf{d}, \quad w(x)^e = \mathbf{N}_w \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_w \mathbf{T}^e \mathbf{d}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left(EA^e \mathbf{d}^T \mathbf{T}^{eT} \mathbf{N}'_u{}^T \mathbf{N}'_u \mathbf{T}^e \mathbf{d} + EI_y^e \mathbf{d}^T \mathbf{T}^{eT} \mathbf{N}''_w{}^T \mathbf{N}''_w \mathbf{T}^e \mathbf{d} \right. \right. \\ \left. \left. + N^e(x) \mathbf{d}^T \mathbf{T}^{eT} \mathbf{N}'_w{}^T \mathbf{N}'_w \mathbf{T}^e \mathbf{d} \right) dx^e \right\}$$

Energia sprężysta układu zdyskretyzowanego

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left(EA^e u^{e'2} + EI_y^e w^{e''2} + N^e(x) w^{e'2} \right) dx^e \right\}$$

$$u(x)^e = \mathbf{N}_u \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_u \mathbf{T}^e \mathbf{d}, \quad w(x)^e = \mathbf{N}_w \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_w \mathbf{T}^e \mathbf{d}$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left(EA^e \mathbf{T}^{eT} \mathbf{N}'_u{}^T \mathbf{N}'_u \mathbf{T}^e + EI_y^e \mathbf{T}^{eT} \mathbf{N}''_w{}^T \mathbf{N}''_w \mathbf{T}^e + N^e(x) \mathbf{T}^{eT} \mathbf{N}'_w{}^T \mathbf{N}'_w \mathbf{T}^e \right) dx^e \right\} \mathbf{d}$$

Energia sprężysta układu zdyskretyzowanego

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left(EA^e u^{e\prime 2} + EI_y^e w^{e\prime\prime 2} + N^e(x) w^{e\prime 2} \right) dx^e \right\}$$

$$u(x)^e = \mathbf{N}_u \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_u \mathbf{T}^e \mathbf{d}, \quad w(x)^e = \mathbf{N}_w \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_w \mathbf{T}^e \mathbf{d}$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \left\{ \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \int_0^{l^e} \left(EA^e \mathbf{N}'_u{}^T \mathbf{N}'_u + EI_y^e \mathbf{N}''_w{}^T \mathbf{N}''_w \right) dx^e \mathbf{T}^e + \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \int_0^{l^e} N^e(x) \mathbf{N}'_w{}^T \mathbf{N}'_w dx^e \mathbf{T}^e \right\} \mathbf{d}$$

Energia sprężysta układu zdyskretyzowanego

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left(EA^e u^{e'2} + EI_y^e w^{e''2} + N^e(x) w^{e'2} \right) dx^e \right\}$$

$$u(x)^e = \mathbf{N}_u \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_u \mathbf{T}^e \mathbf{d}, \quad w(x)^e = \mathbf{N}_w \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_w \mathbf{T}^e \mathbf{d}$$

\mathbf{K}^e – liniowa macierz sztywności

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \left\{ \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \int_0^{l^e} \left(EA^e \mathbf{N}'_u{}^T \mathbf{N}'_u + EI_y^e \mathbf{N}''_w{}^T \mathbf{N}''_w \right) dx^e \mathbf{T}^e + \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \int_0^{l^e} N^e(x) \mathbf{N}'_w{}^T \mathbf{N}'_w dx^e \mathbf{T}^e \right\} \mathbf{d}$$

\mathbf{K}_σ^e – macierz wstępnych naprężeń

Energia sprężysta układu zdyskretyzowanego

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left(EA^e u'^2 + EI_y^e w''^2 + N^e(x) w'^2 \right) dx^e \right\}$$

$$u(x)^e = \mathbf{N}_u \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_u \mathbf{T}^e \mathbf{d}, \quad w(x)^e = \mathbf{N}_w \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_w \mathbf{T}^e \mathbf{d}$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \left(\sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{T}^e + \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}_\sigma^e \mathbf{T}^e \right) \mathbf{d}$$

Energia sprężysta układu zdyskretyzowanego

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left(EA^e u^{e\prime 2} + EI_y^e w^{e\prime\prime 2} + N^e(x) w^{e\prime 2} \right) dx^e \right\}$$

$$u(x)^e = \mathbf{N}_u \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_u \mathbf{T}^e \mathbf{d}, \quad w(x)^e = \mathbf{N}_w \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_w \mathbf{T}^e \mathbf{d}$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \left(\underbrace{\sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{T}^e}_{\mathbf{K}} + \underbrace{\sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}_\sigma^e \mathbf{T}^e}_{\mathbf{K}_\sigma} \right) \mathbf{d}$$

Energia sprężysta układu zdyskretyzowanego

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_0^{l^e} \left(EA^e u^{e\prime 2} + EI_y^e w^{e\prime\prime 2} + N^e(x) w^{e\prime 2} \right) dx^e \right\}$$

$$u(x)^e = \mathbf{N}_u \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_u \mathbf{T}^e \mathbf{d}, \quad w(x)^e = \mathbf{N}_w \mathbf{d}^e = \mathbf{N}_w \mathbf{T}^e \mathbf{d}$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d}$$

Równanie MES dla zagadnienia wyboczenia

Całkowita energia

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{f}$$

Równanie MES dla zagadnienia wyboczenia

Całkowita energia

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{f}$$

Minimalizacja energii

$$\delta\Phi = 0 \implies (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d} - \mathbf{f} = 0$$

Równanie MES dla zagadnienia wyboczenia

Całkowita energia

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{f}$$

Minimalizacja energii

$$\delta\Phi = 0 \implies (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d} - \mathbf{f} = 0$$

Równania dla dwóch sąsiednich stanów równowagi – przed i po wyboczeniu – **problem własny**

$$\begin{array}{l} (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d}^1 = \mathbf{f} \\ (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d}^2 = \mathbf{f} \end{array} \bigg/ - \implies (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \Delta \mathbf{d} = 0$$

Równanie MES dla zagadnienia wyboczenia

Całkowita energia

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{f}$$

Minimalizacja energii

$$\delta\Phi = 0 \implies (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d} - \mathbf{f} = 0$$

Równania dla dwóch sąsiednich stanów równowagi – przed i po wyboczeniu – **problem własny**

$$\begin{array}{l} (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d}^1 = \mathbf{f} \\ (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d}^2 = \mathbf{f} \end{array} \Bigg/ - \implies (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \Delta \mathbf{d} = 0$$

To równanie jest spełnione dla

$$\det(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) = 0 \text{ albo } \Delta \mathbf{d} = 0$$

Równanie MES dla zagadnienia wyboczenia

Całkowita energia

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{f}$$

Minimalizacja energii

$$\delta\Phi = 0 \implies (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d} - \mathbf{f} = 0$$

Równania dla dwóch sąsiednich stanów równowagi – przed i po wyboczeniu – **problem własny**

$$\begin{array}{l} (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d}^1 = \mathbf{f} \\ (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d}^2 = \mathbf{f} \end{array} \Bigg/ - \implies (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \Delta \mathbf{d} = 0$$

To równanie jest spełnione dla

$$\det(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) = 0$$

Stateczność pręta w MES

Macierz sztywności liniowej – element ramowy

$$\mathbf{K}^e = \int_0^{l^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e dx^e$$

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u^e \\ \mathbf{N}_w^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^e = \mathbf{L} \mathbf{N}^e, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx^e} \\ \frac{d^2}{dx^{e2}} \\ -\frac{d}{dx^{e2}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^e = \begin{bmatrix} EA^e & 0 \\ 0 & EI^e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^e$$

Stateczność pręta w MES

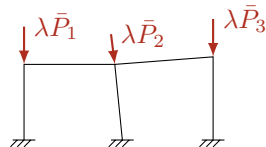
Macierz wstępnych naprężeń – element ramowy

$$\mathbf{K}_\sigma^e = \int_0^{l^e} N^e(x) \mathbf{N}'_w{}^T \mathbf{N}'_w dx^e$$

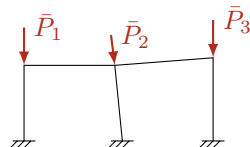
$$\mathbf{K}_\sigma^e = \frac{N^e(x)}{30l^e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix}^e$$

$$\mathbf{f} = \lambda \bar{\mathbf{f}} \implies \mathbf{K}_\sigma^e = \lambda \bar{\mathbf{K}}_\sigma^e$$

Obciążenie jednoparametrowe \mathbf{f}



Obciążenie konfiguracyjne $\bar{\mathbf{f}}$



Algorytm MES

- 1 Statyka – wyznaczenie sił podłużnych

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \bar{\mathbf{f}} \implies N^e \implies \bar{\mathbf{K}}_\sigma^e$$

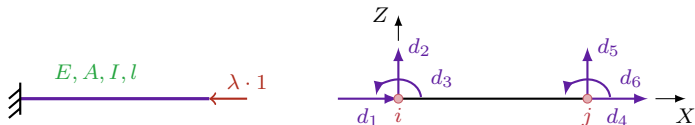
- 2 Wyboczenie – problem własny

$$(\mathbf{K} + \lambda \bar{\mathbf{K}}_\sigma) \Delta \mathbf{d} = \mathbf{0} \implies \lambda_{kr} \implies \Delta \mathbf{d} - \text{forma utraty stateczności}$$

Statyka

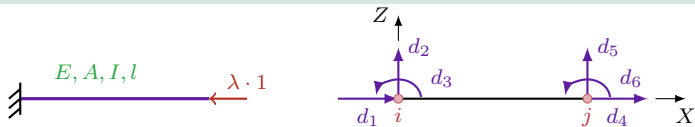
Po obliczeniach dla stanu przedwyboczeniowego:

$$N(x) = -1$$



Wyboczenie

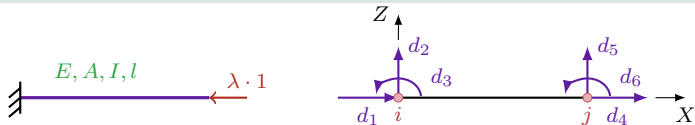
$$(\mathbf{K} + \lambda \bar{\mathbf{K}}_{\sigma}) \Delta \mathbf{d} = \mathbf{0}$$



Wyboczenie

$$(\mathbf{K} + \lambda \bar{\mathbf{K}}_{\sigma}) \Delta \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

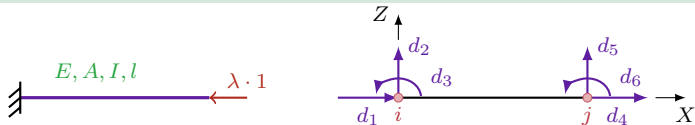
$$\left(\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \lambda \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_1 \\ \Delta \mathbf{d}_2 \\ \Delta \mathbf{d}_3 \\ \Delta \mathbf{d}_4 \\ \Delta \mathbf{d}_5 \\ \Delta \mathbf{d}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Wyboczenie

$$(\mathbf{K} + \lambda \bar{\mathbf{K}}_{\sigma}) \Delta \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

$$\left(\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \lambda \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \mathbf{d}_4 \\ \Delta \mathbf{d}_5 \\ \Delta \mathbf{d}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

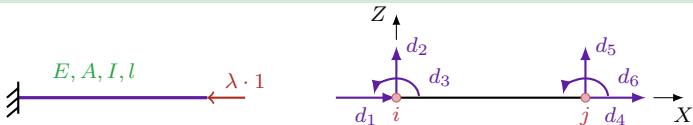


Wyboczenie

$$(\mathbf{K} + \lambda \bar{\mathbf{K}}_\sigma) \Delta \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

$$\left(\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \lambda \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \mathbf{d}_4 \\ \Delta \mathbf{d}_5 \\ \Delta \mathbf{d}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6l \\ 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \lambda \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -3l \\ 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_4 \\ \Delta \mathbf{d}_5 \\ \Delta \mathbf{d}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



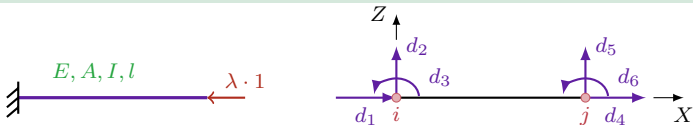
Wyboczenie

$$(\mathbf{K} + \lambda \bar{\mathbf{K}}_\sigma) \Delta \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

$$\left(\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \lambda \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \mathbf{d}_4 \\ \Delta \mathbf{d}_5 \\ \Delta \mathbf{d}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6l \\ 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \lambda \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -3l \\ 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_4 \\ \Delta \mathbf{d}_5 \\ \Delta \mathbf{d}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left| \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6l \\ 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \lambda \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -3l \\ 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right| = 0$$



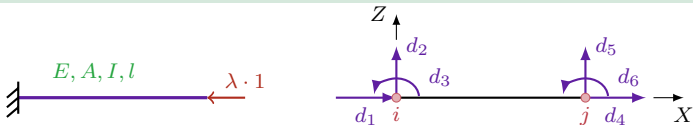
Wyboczenie

$$(\mathbf{K} + \lambda \bar{\mathbf{K}}_\sigma) \Delta \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

$$\left(\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \lambda \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \mathbf{d}_4 \\ \Delta \mathbf{d}_5 \\ \Delta \mathbf{d}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6l \\ 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \lambda \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -3l \\ 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_4 \\ \Delta \mathbf{d}_5 \\ \Delta \mathbf{d}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left| \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6l \\ 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \lambda \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -3l \\ 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= 2.486 \frac{EI}{l^2} \\ \lambda_2 &= 32.181 \frac{EI}{l^2} \end{aligned}$$



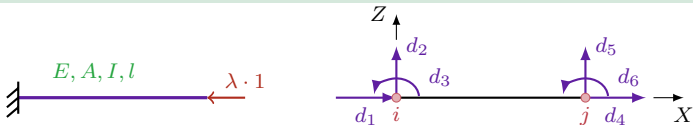
Wyboczenie

$$(\mathbf{K} + \lambda \bar{\mathbf{K}}_\sigma) \Delta \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

$$\left(\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \lambda \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \mathbf{d}_4 \\ \Delta \mathbf{d}_5 \\ \Delta \mathbf{d}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6l \\ 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \lambda \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -3l \\ 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_4 \\ \Delta \mathbf{d}_5 \\ \Delta \mathbf{d}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left| \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6l \\ 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \lambda \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -3l \\ 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= 2.486 \frac{EI}{l^2} \Rightarrow P_{cr}^{anal} = 2.467 \frac{EI}{l^2} \\ \lambda_2 &= 32.181 \frac{EI}{l^2} \end{aligned}$$



Formy utraty stateczności

Formy wyboczenia są wyznaczane z jednego z dwóch równań liniowo zależnych po podstawieniu odpowiedniej wartości własnej

