

**Współczesna mechanika konstrukcji
w projektowaniu inżynierskim**

**Modern structural mechanics
with applications to civil engineering**

Andrzej Garstecki, Wojciech Gilewski, Zbigniew Pozorski, eds.

IX

**Obliczeniowe modele
materiałów:
sprężystość,
plastyczność,
zarysowanie**

str. 237-256

IX

**Computational models
of materials:
elasticity,
plasticity,
cracking**

pp. 237-256

Jerzy Pamin

Politechnika Krakowska

Wydział Inżynierii Lądowej

Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej

Andrzej Winnicki

Politechnika Krakowska

Wydział Inżynierii Lądowej

Instytut Materiałów i Konstrukcji Budowlanych

Słowa kluczowe: sprężystość,
plastyczność, zarysowanie, metoda
elementów skończonych

Keywords: elasticity, plasticity,
cracking, finite element method

IX OBLICZENIOWE MODELE MATERIAŁÓW: SPRĘŻYSTOŚĆ, PLASTYCZNOŚĆ, ZARYSOWANIE

Jerzy PAMIN, Andrzej WINNICKI

Wstęp

Rozdział przedstawia przegląd podstawowych modeli materiałów inżynierskich, obejmujący ogólne sformułowania trójwymiarowe, pewne aspekty modeli dla zagadnień dwuwymiarowych i proste jednoosiowe reprezentacje. Omówione zostały sprężystość, plastyczność i zarysowanie.

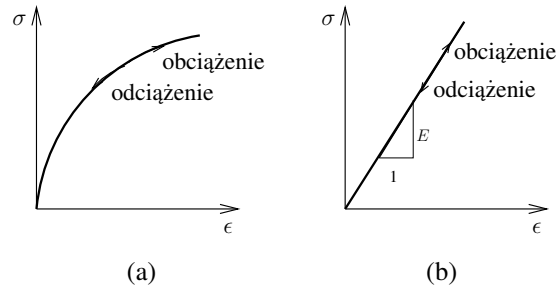
Słowa kluczowe: *sprężystość, plastyczność, zarysowanie, metoda elementów skończonych*

1. Wprowadzenie

Rozdział przedstawia przegląd podstawowych modeli materiałów inżynierskich, ze szczególnym uwzględnieniem betonu. Skupiono się na ogólnych sformułowaniach trójwymiarowych, pewnych aspektach modeli dwuwymiarowych i jednoosiowej reprezentacji modeli. Opracowanie ma stanowić pomoc dla projektantów działających w zakresie inżynierii lądowej. Dlatego też autorzy starali się przedstawiać problemy w sposób prosty, kładąc raczej nacisk na jasność wykładu niż na precyzję sformułowań. Dla celów dydaktycznych każdy prezentowany model przedstawiono w reprezentacji jednowymiarowej. Z bardzo szerokiego zakresu wiedzy dotyczącego poszczególnych modeli starano się wybrać elementy przydatne w inżynierii lądowej. I tak świadomie ograniczono się w całym opracowaniu tylko do sformułowań dla małych odkształceń, uważając, że sformułowanie dla skończonych odkształceń jest niezbędne np. dla specjalistów od przeróbki plastycznej metali, ale rzadko znajduje zastosowanie w inżynierii lądowej. Przy omawianiu modeli rys rozmytych starano się dokładniej omówić sformułowania dwuwymiarowe, gdyż są one najczęściej używane w praktyce – głównie dla płyt i powłok przy zastosowaniu warstwowych elementów skończonych.

W p. 2 omówiono najczęściej stosowany model teorii sprężystości. W p. 3 przedstawiona została teoria płynięcia plastycznego, adekwatna w modelowaniu metali i ośrodka gruntowego, a także, w pewnym zakresie, betonu. W p. 4 podano podstawowe informacje nt. modeli zarysowania, używanych przede wszystkim w symulacjach zachowania się betonu.

Rozdział stanowi całość wraz z Rozdziałem X, gdzie omówione zostaną teoria uszkodzenia i związany z modelowaniem osłabienia i zniszczenia struktury materiałów problem lokalizacji odkształceń. Ponadto zostaną tam przedstawione dwa przykłady nieliniowych analiz konstrukcji żelbetowych, przebicia płyty i zarysowania chłodni kominowej, wraz z podsumowaniem obu rozdziałów.



Rysunek 2.1. Wykresy zależności naprężenia od odkształcenia dla sprężystości

2. Sprężystość

Najczęściej stosowanym modelem materiału jest model sprężysty. W tym opracowaniu ograniczymy się do teorii hipersprężystości, por. [1–5].

Rozpocznijmy od przypomnienia definicji wielkości potrzebnych do zapisania związków konstytutywnych, charakteryzujących mechaniczną odpowiedź materiału. Są nimi tensor odkształcenia $\epsilon = \{\epsilon_{ij}\}$ i tensor naprężenia $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$. W klasycznej teorii są to tensory symetryczne. W jednowymiarowej reprezentacji związków dla zagadnienia rozciągania pręta będziemy korzystać z odkształcenia liniowego (wydłużenia względnego) ϵ i naprężenia rozciągającego σ .

Odpowiedź materiału jest definiowana jako sprężysta jeśli naprężenie jest funkcją jedynie odkształcenia

$$\sigma = \sigma(\epsilon) \quad (2.1)$$

i nie zależy od historii deformacji, której nie towarzyszy dyssypacja energii. Oznacza to, że na rys. 2.1(a), przedstawiającym jednowymiarową zależność naprężenia od odkształcenia i reprezentującym nieliniową sprężystość, materiał zachowuje się tak samo przy obciążeniu i przy odciążeniu.

Rys. 2.1(b) pokazuje szczególny, ale najczęściej wykorzystywany przypadek liniowej sprężystości czyli prawo Hooke'a.

Budując ogólną teorię hipersprężystości postulujemy istnienie potencjału energii odkształcenia $W(\epsilon)$ i obliczamy naprężenie jako pochodną tego potencjału

$$\sigma = \frac{\partial W(\epsilon)}{\partial \epsilon} \quad (2.2)$$

Ograniczając się do teorii liniowej przedstawiamy prawo Hooke'a w postaci

$$\sigma = D^e : \epsilon \quad (2.3)$$

w którym $D^e = \{D^e_{ijkl}\}$ jest tensorem czwartego rzędu opisującym sztywność sprężystą materiału i spełniającym warunki symetrii. W artykule stosujemy notację tensorową i dwukropek : oznacza skrótowiec po dwóch wskaźnikach, tzn. równ. (2.3) w zapisie wskaźnikowym ma postać $\sigma_{ij} = D^e_{ijkl} \epsilon_{kl}$, w której sumowanie jest wykonywane po wskaźnikach k i l zgodnie z konwencją sumacyjną Einsteina. Jeśli materiał odkształca się inaczej w różnych kierunkach poddany takiemu samemu obciążeniu, nazywany jest anizotropowym i wówczas $D^e = D^e(\mathbf{a})$ (\mathbf{a} oznacza wektor kierunku).

Przyjmując energię odkształcenia w postaci

$$W = \frac{1}{2} \epsilon : D^e : \epsilon \quad (2.4)$$

równ. (2.2) prowadzi do związku fizycznego (2.3). Jeśli ograniczymy rozważania przez założenie izotropii materiału, energia odkształcenia jest funkcją 3 niezmienników tensora odkształcenia, por. [4], a tensory naprężenia i odkształcenia mają te same kierunki główne. Dla izotropowej liniowej sprężystości można wyprowadzić prawo Hooke'a w postaci

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \epsilon_{\text{vol}} \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.5)$$

gdzie λ i G to stałe sprężystości (Lamego), $\epsilon_{\text{vol}} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ oznacza część objętościową tensora odkształcenia (dylatację), a \mathbf{I} to tensor jednostkowy drugiego rzędu.

Powyższy związek można przedstawić w postaci dwóch zależności obowiązujących dla części dewiatorowych i objętościowych tensorów naprężenia i odkształcenia. Przypominamy definicję dewiatora odkształcenia

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\text{dev}} = \boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{3} \epsilon_{\text{vol}} \mathbf{I} \quad (2.6)$$

i oznaczamy analogicznie obliczony dewiator naprężenia przez $\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}$. Prawo Hooke'a można zapisać jako 2 równania

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} = 2G \boldsymbol{\epsilon}_{\text{dev}}, \quad \sigma_{\text{vol}} = 3K \epsilon_{\text{vol}} \quad (2.7)$$

przy czym K oznacza moduł sprężystości objętościowej. W równaniach liniowej teorii sprężystości dla materiału izotropowego występują zawsze 2 stałe Lamego. Można stałą λ , moduł Kirchhoffa G i stałą K wyrazić przez moduł Younga E i współczynnik Poissona ν

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.8)$$

W przypadku jednowymiarowym prawo Hooke'a wyraża się zależnością przedstawioną na rys. 2.1(b)

$$\sigma = E \epsilon \quad (2.9)$$

gdzie E to moduł Younga. Zwracamy jeszcze uwagę na szczególny przypadek ważny z punktu widzenia dalszej analizy: dla materiałów nieściśliwych $\epsilon_{\text{vol}} = 0$ moduł Poissona zmierza do 0.5 $\nu \rightarrow 0.5$, a moduł ściśliwości do nieskończoności $K \rightarrow \infty$.

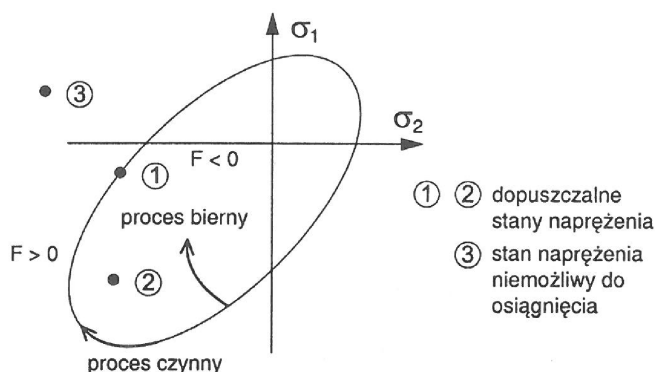
Jeśli założymy, że zachowanie sprężyste materiału zależy od temperatury (temperaturę absolutną będziemy oznaczać przez T), należałoby uwzględnić zależność od niej parametrów materiału (np. modułu Younga) i rozszerzalność cieplną. Przy założeniu izotropii otrzymujemy związek termosprężystości w postaci:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e(T) : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^0), \quad \boldsymbol{\epsilon}^0 = \alpha \Delta T \quad (2.10)$$

gdzie α jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej, a ΔT jest przyrostem temperatury ponad temperaturę w stanie początkowym, charakteryzującym się zerowymi odkształceniami i naprężeniami.

3. Plastyczność

Przedstawioną w tym punkcie tematykę można znaleźć między innymi w pracach [3, 6–10]. Szczegółowe omówienie zagadnień algorytmicznych wraz z rozszerzeniem na przypadek dużych odkształceń zawierają np. prace [4, 11]. Zagadnienia lepkoplastyczności prezentowane są między innymi w pracach [8, 11, 12].



Rysunek 3.1. Proces czynny i bierny w teorii plastyczności

Podstawowym założeniem przyjmowanym w sprężysto-plastycznym opisie materiału przy założeniu małych odkształceń jest addytywne rozbitcie prędkości odkształceń na część sprężystą i plastyczną

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (3.1)$$

W powyższym zapisie kropka oznacza różniczkowanie po czasie $\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$. W przypadku opisu sprężysto-plastycznego bez elementów lepkich czas ma charakter wyłącznie umowny i służy do jednoznacznego zdefiniowania programu obciążenia. Otrzymane wyniki nie są zależne od czasu i końcowa relacja $\sigma = \sigma(\epsilon)$ otrzymana w wyniku scałkowania omówionych poniżej równań prędkościowych nie będzie zależała od czasu fizycznego.

Podstawowy związek fizyczny dla części sprężystej prędkości odkształceń pozostaje taki sam jak dla opisu sprężystego

$$\dot{\sigma} = D^e : \dot{\epsilon}^e \quad (3.2)$$

Cała teoria plastyczności sprowadza się w zasadzie do sformułowania odpowiednich związków definiujących część plastyczną prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}^p$. W tym celu wprowadzamy pojęcie potencjału plastycznego $g(\sigma)$ sformułowanego w przestrzeni naprężeń jako funkcja wypukła i postulujemy, że część plastyczna prędkości odkształcenia musi być w przestrzeni naprężeń prostopadła do powierzchni potencjału plastycznego

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma} = \lambda m, \quad m = \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma} \quad (3.3)$$

Należy zauważyć, że gradient powierzchni potencjału plastycznego jest obliczany dla aktualnego stanu naprężenia, czyli, że punkt reprezentujący aktualny stan naprężenia w przestrzeni naprężeń musi należeć do powierzchni potencjału plastycznego. Stąd wynika, że potencjał plastyczny jest zdefiniowany z dokładnością do stałej i nie można sformułować zależności $g(\sigma) = 0$. Równanie (3.3) określa wyłącznie kierunek części plastycznej prędkości odkształcenia. Jej wartość wynika z postulatu, że w trakcie procesu plastycznego aktualny stan naprężenia powinien znajdować się na powierzchni plastyczności – rys. 3.1.

W sposób najbardziej ogólny powierzchnię plastyczności można zdefiniować jako wypukłą funkcję skalarną stanu naprężenia zależną od wektora zmiennych wewnętrznych κ opisujących ewolucję powierzchni. Dla procesu plastycznego jej wartość równa się zero

$$F(\sigma, \kappa) = 0 \quad (3.4)$$

Sformułowanie powierzchni plastyczności według równ. (3.4) jest ogólne. Często wystarczające jest wprowadzenie tylko jednego parametru wzmocnienia/osłabienia κ i powierzchnia pla-

styczności z izotropowym wzmocnieniem/osłabieniem ma formę

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = f(\boldsymbol{\sigma}) - f_y \delta(\kappa) = 0 \quad (3.5)$$

gdzie f_y jest początkową granicą plastyczności przy jednoosiowym ściskaniu i/lub rozciąganiu, $\delta(\kappa)$ jest bezwymiarową funkcją wzmocnienia/osłabienia rosnącą lub malejącą wraz ze wzrostem κ . Początkowa wartość funkcji wzmocnienia/osłabienia wynosi $\delta(0) = 1$. Przypadek tzw. wzmocnienia kinematycznego, kiedy to powierzchnia plastyczności przesuwa się ruchem sztywnym w przestrzeni naprężeń bez zmiany wymiarów jest opisywany wzorem

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0(\kappa)) - f_y = 0 \quad (3.6)$$

gdzie tensor naprężeń wstecznych $\boldsymbol{\sigma}_0(\kappa)$ opisuje przesunięcie powierzchni. Większość powierzchni plastyczności formułowanych dla materiałów quasi-kruchych (w szczególności dla betonu), dla których charakterystyczne są wyraźne różne początkowe wartości wytrzymałości na ściskanie f_c i rozciąganie f_t , a także różna jest ich ewolucja w procesie wzmocnienia/osłabienia materiału ma postać

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = f(\boldsymbol{\sigma}, f_c \delta_c(\kappa), f_t \delta_t(\kappa)) - 1 = 0 \quad (3.7)$$

Wprowadzone w równ. (3.7) dwie niezależne funkcje wzmocnienia/osłabienia δ_c i δ_t pozwalają opisać w niezależny sposób różny charakter wzmocnienia/osłabienia przy odpowiednio ściskaniu i rozciąganiu. Należy podkreślić, że nazwa wzmocnienie izotropowe odnosi się wyłącznie do ewolucji powierzchni plastyczności i nie ma nic wspólnego z izotropią materiału. Użycie teorii plastyczności zawsze prowadzi do naprężeniowo indukowanej anizotropii materiału. Jeżeli materiał nie ma wyróżnionych kierunków i jest początkowo izotropowy, to funkcja plastyczności $F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)$ nie może w sposób dowolny zależeć od tensora naprężenia, tylko musi się dać wyrazić poprzez niezmienniki tensora naprężenia lub naprężenia główne. Przeciwnie, w przypadku opisu materiału o wyróżnionych kierunkach materialnych funkcja plastyczności może w arbitralny sposób zależeć od poszczególnych składowych stanu naprężenia podanych w ustalonym układzie odniesienia. Przykładowo funkcja plastyczności o formie

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \sigma_{11} - f_y \delta(\kappa) = 0 \quad (3.8)$$

będzie opisywała materiał mający granicę plastyczności f_y na ściskanie i rozciąganie w kierunku zdefiniowanym przez wersor o składowych $(1, 0, 0)$ w ustalonym materialnie układzie odniesienia i jednocześnie mający nieskończenie wielką wytrzymałość we wszystkich innych kierunkach.

Ewolucja zmiennych stanu wewnętrznego jest związana z wartością mnożnika plastycznego według wzoru

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \mathbf{p}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (3.9)$$

Całkowite wartości zmiennych stanu wewnętrznego, występujące w definicji powierzchni plastyczności w równ. (3.4), dla danej chwili czasowej t otrzymujemy drogą całkowania po czasie

$$\boldsymbol{\kappa} = \int_0^t \dot{\boldsymbol{\kappa}} dt \quad (3.10)$$

Dla procesu plastycznego, kiedy to naprężenia pozostają na powierzchni plastyczności przez pewien czas $t_1 \leq t \leq t_2$ (tzn. kiedy w tym przedziale czasu spełniona jest zależność (3.4))

z warunku stacjonarności funkcji plastyczności wynika bezpośrednio skalarny tzw. warunek Prandtla nazywany też warunkiem konsystencji

$$\dot{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \dot{\lambda} = 0 \quad (3.11)$$

Wprowadza się pojęcie uogólnionego modułu plastycznego definiowanego jako

$$H = -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (3.12)$$

i jednocześnie definiuje się gradient do powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń jako

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.13)$$

Wykorzystując uogólniony moduł plastyczny H możemy skalarny warunek Prandtla zapisać w formie

$$\boldsymbol{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H \dot{\lambda} = 0 \quad (3.14)$$

Jednocześnie trzy pierwsze równania dotyczące plastyczności (3.1-3.3) mogą być przedstawione w formie

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}^e : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \boldsymbol{m}) \quad (3.15)$$

Należy zauważyć, że układ równań (3.14-3.15) stanowi w formie prędkościowej kompletny układ równań konstytutywnych opisu sprężysto-plastycznego. Dla zadanej prędkości odkształcenia $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ poszukujemy prędkości naprężenia $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ i mnożnika plastycznego $\dot{\lambda}$. Mamy więc 7 niewiadomych (uwzględniając symetrię tensora naprężeń) i 7 równań.

W celu wyeliminowania mnożnika plastycznego $\dot{\lambda}$ i uzyskania wyłącznie równań łączących $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ z $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ wygodnie jest odwrócić zależność (3.15), co prowadzi do wzoru

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = (\boldsymbol{D}^e)^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda} \boldsymbol{m} \quad (3.16)$$

Rozwiązując równ. (3.14) z uwagi na mnożnik plastyczny $\dot{\lambda}$ i podstawiając wynik do równ. (3.16) otrzymujemy prędkościowe równanie podatności w formie

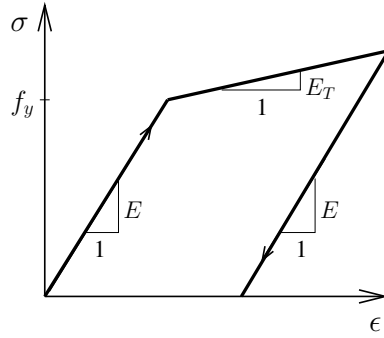
$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \left[(\boldsymbol{D}^e)^{-1} + \frac{1}{H} \boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{n} \right] : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.17)$$

gdzie \otimes oznacza iloczyn tensorowy. Zastosowanie wzoru Shermana-Morrisona do odwrócenia równania podatności prowadzi do wzoru na prędkościowe równanie sztywności

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \boldsymbol{D}^{ep} = \boldsymbol{D}^e - \frac{(\boldsymbol{D}^e : \boldsymbol{m}) \otimes (\boldsymbol{n} : \boldsymbol{D}^e)}{H + \boldsymbol{n} : \boldsymbol{D}^e : \boldsymbol{m}} \quad (3.18)$$

Podane wyżej wzory dotyczą ogólnego przypadku tzw. plastyczności niestowarzyszonej gdzie odrębnie definiuje się powierzchnie plastyczności $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = 0$ i potencjału plastycznego $g(\boldsymbol{\sigma})$. Przypadek specjalny stanowi tzw. plastyczność stowarzyszona, gdzie definiuje się wyłącznie powierzchnię plastyczności $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = 0$, oblicza się jej gradient $\boldsymbol{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$, a następnie przyjmuje się, że kierunek części plastycznej prędkości odkształceń w przestrzeni naprężeń jest prostopadły do powierzchni plastyczności co prowadzi do utożsamienia tensora \boldsymbol{m} z gradientem \boldsymbol{n} , czyli $\boldsymbol{m} \equiv \boldsymbol{n}$. Wówczas sprężysto-plastyczny operator styczny dany równ. (3.18) jest symetryczny.

Powyższe wzory są prawdziwe wyłącznie dla procesu czynnego, tzn. takiego w którym w pewnym okresie czasowym zachodzi tożsamość $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \equiv 0$. Dla takiego procesu mnożnik



Rysunek 3.2. Zależność naprężenie-odkształcenie dla przypadku jednowymiarowego

plastyczny przyjmuje wartości nieujemne $\dot{\lambda} \geq 0$. W przypadku procesu biernego (odciążenie), gdy $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) < 0$, z definicji przyjmuje się $\dot{\lambda} = 0$, prędkość odkształceń plastycznych jest równa zero $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \mathbf{0}$, a związek prędkościowy naprężenie-odkształcenie ma charakter czysto sprężysty

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.19)$$

Wymogi stawiane dozwolonym wartościom funkcji plastyczności i mnożnika plastycznego często zapisuje się formalnie jako warunki Kuhna-Tuckera

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \leq 0, \quad \dot{\lambda} F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = 0 \quad (3.20)$$

W przypadku skalarnego wzmocnienia/osłabienia parametr κ jest zwykle definiowany w formie prędkościowej jako zastępcze odkształcenie plastyczne (parametr Odqvista) [13]

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{m} : \mathbf{m}} \quad (3.21)$$

lub jako praca plastyczna

$$\dot{\kappa} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \dot{\lambda} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{m} \quad (3.22)$$

Równania (3.21) i (3.22) są prostymi przykładami równania ewolucji zmiennych stanu wewnętrznych (3.9).

Związki sprężysto-plastyczne przybierają bardzo proste formy dla przypadku jednowymiarowego, patrz rys. 3.2. Wówczas nie ma rozróżnienia pomiędzy plastycznością stowarzyszoną, a niestowarzyszoną. Najprostsza forma funkcji plastyczności z liniowym wzmocnieniem ma postać

$$F(\sigma, \kappa) = \sigma - (f_y + h\kappa) = 0 \quad (3.23)$$

Odpowiadająca równ. (3.23) funkcja wzmocnienia ma postać

$$\delta(\kappa) = 1 + \frac{h}{f_y} \kappa \quad (3.24)$$

Zakłada się równoważność parametru κ z mnożnikiem plastycznym $\dot{\kappa} = \dot{\lambda}$. Gradienty funkcji plastyczności i potencjału plastycznego mają postać $m = n = 1$, a prędkość odkształcenia plastycznego wynosi $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \dot{\lambda}$. W efekcie prędkościowy związek podatności (3.17) ma postać

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{h} \right] \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.25)$$

a jego odwrotność (3.18) to

$$\dot{\sigma} = \left[E - \frac{E \cdot E}{h + E} \right] \dot{\epsilon} = E_T \dot{\epsilon}, \quad E_T = \frac{E \cdot h}{h + E} \quad (3.26)$$

Postać związku sprężysto-plastycznego dla przypadku jednowymiarowego jednoznacznie wskazuje, że element sprężysty z modułem sprężystości E jest szeregowo połączony z elementem plastycznym o module wzmocnienia/osłabienia h . Szeregowość połączenia elementów wynika w oczywisty sposób z podstawowego założenia, że odkształcenie jest sumą części sprężystej i plastycznej, por. równ. (3.1).

Związek sprężysto-plastyczny można łatwo rozszerzyć na przypadek oddziaływania temperatury wprowadzając podobnie jak w sprężystości dodatkowe odkształcenia swobodne termiczne $\epsilon^0(T)$ i dodatkowo zakładając, że powierzchnia plastyczności jest również funkcją temperatury $F(\sigma, \kappa, T)$, co umożliwi opis termicznego osłabienia/wzmocnienia materiału. Otrzymujemy wówczas podstawowy układ równań

$$\mathbf{n} : \dot{\sigma} - H\dot{\lambda} + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} = 0 \quad (3.27)$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}^e : (\dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \mathbf{m} - \dot{\epsilon}^0(T)) \quad (3.28)$$

Równie łatwo można rozszerzyć sformułowanie sprężysto-plastyczne na sformułowanie sprężysto-lepkoplastyczne zakładając wprowadzenie dodatkowych zmiennych stanu o charakterze lepkiem η , których prędkości zależne są od pochodnej po czasie mnożnika plastycznego

$$\dot{\eta} = \ddot{\lambda} \mathbf{q}(\sigma, \eta) \quad (3.29)$$

Wówczas równanie Prandtla przybiera postać

$$\mathbf{n} : \dot{\sigma} - H\dot{\lambda} - S\ddot{\lambda} = 0 \quad (3.30)$$

gdzie uogólniony moduł lepkoplastyczny S ma postać

$$S = -\frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \mathbf{q}(\sigma, \eta) \quad (3.31)$$

Równanie (3.30) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu na $\dot{\lambda}$ i musi zostać odpowiednio scałkowane na danym kroku przyrostowym. Jednocześnie prędkościowe równania naprężenie-odkształcenie (3.15)

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}^e : (\dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \mathbf{m}) \quad (3.32)$$

pozostają bez zmian – oznacza to, że człon lepki wpływa na wartość prędkości odkształcenia lepkoplastycznego (poprzez wartość $\dot{\lambda}$), ale nie na kierunek, który jest standardowo definiowany poprzez tensor \mathbf{m} . Przedstawione tutaj podejście lepkoplastyczne nosi nazwę lepkoplastycznego modelu konsyistentnego (z uwagi na wykorzystanie w nim równania Prandtla). Dalsze informacje na jego temat można znaleźć w [8, 14]. Oprócz modelu konsyistentnego istnieją dwa bardzo znane i szeroko używane opisy lepkoplastyczne – teoria lepkoplastyczności Perzyny i teoria lepkoplastyczności Duvaut-Lionsa [8, 12].

W niniejszym opracowaniu nie opisujemy szczegółowych algorytmów całkowania numerycznego równań prędkościowych sprężysto-plastycznych. Poniżej podajemy tylko w zwartej formie standardowy algorytm w przypadku procesu czynnego. Pominięto początkowy fragment

Tablica 3.1. Algorytm całkowania równań przyrostowych naprężenie-odkształcenie

1. Obliczanie residuów dla naprężeń, zmiennych wewnętrznych i funkcji plastyczności

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\sigma &= \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} - \boldsymbol{\sigma}^t - \mathbf{D}^e : (\Delta \boldsymbol{\epsilon} - \Delta \lambda \mathbf{m}^{t+\Delta t}) \\ \mathbf{r}_\kappa &= \boldsymbol{\kappa}^{t+\Delta t} - \boldsymbol{\kappa}^t + \Delta \lambda \mathbf{p} \\ r_F &= F(\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t}, \boldsymbol{\kappa}^{t+\Delta t}) \end{aligned}$$

2. Prowadzenie iteracji Newtona-Raphsona dla kolejnych wartości $\Delta \mathbf{a}^k$ aż do spełnienia warunków $\mathbf{r}_\sigma \approx \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_\kappa \approx \mathbf{0}$ i $r_F \approx 0$

$$\mathbf{r}^T = (\mathbf{r}_\sigma, \mathbf{r}_\kappa, r_F)$$

$$\mathbf{a}^T = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, F)$$

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k + \left(\frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \mathbf{a}} \right) \cdot \Delta \mathbf{a}^k = \mathbf{0}$$

3. Obliczenie algorytmicznego operatora sztywności

$$\mathbf{D}_{alg}^{ep} = \mathbf{Q}^{-1} : \mathbf{D}^e - \frac{(\mathbf{Q}^{-1} : \mathbf{D}^e : \mathbf{m}) \otimes (\mathbf{n} : \mathbf{Q}^{-1} : \mathbf{D}^e)}{H + \mathbf{m} : \mathbf{Q}^{-1} : \mathbf{D}^e : \mathbf{n}}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \Delta \lambda \mathbf{D}^e : \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}}$$

gdzie \mathbf{I} jest tensorem jednostkowym czwartego rzędu

algorytmu służący do rozróżnienia czy dla zadanego skończonego przyrostu odkształceń $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$ proces ma charakter czynny czy bierny. Należy zauważyć, że dla uzyskania kwadratowej zbieżności algorytmu iteracyjnego dla przyrostu obciążenia na poziomie analizy konstrukcji za pomocą MES globalna macierz sztywności powinna być budowana przy użyciu algorytmicznego operatora sztywności \mathbf{D}_{alg}^{ep} , a nie stycznego operatora sztywności według równ. (3.18).

Poniżej podamy kilka powszechnie stosowanych i przydatnych w praktyce powierzchni plastyczności. Do opisu metali przydatna jest powierzchnia Hubera-von Misesa przedstawiona na rys. 3.3(a)

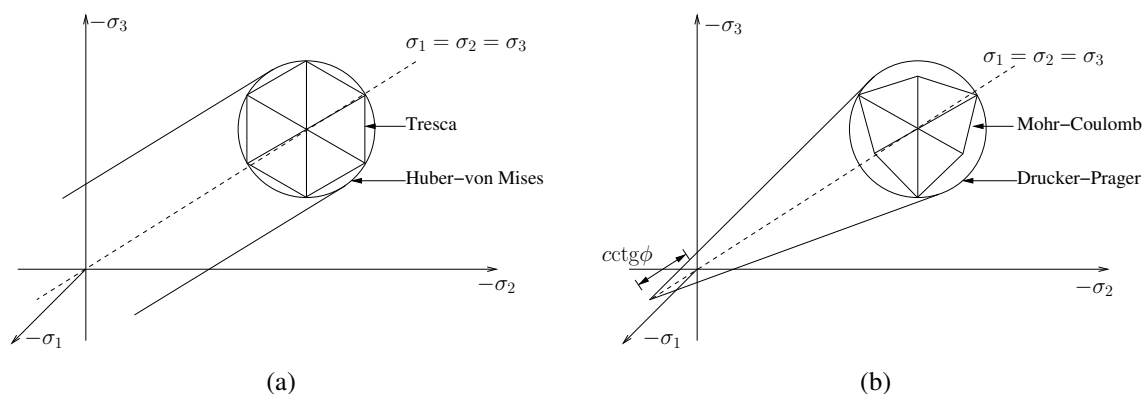
$$\sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_{dev} : \boldsymbol{\sigma}_{dev}} - f_y \delta(\kappa) = 0 \quad (3.33)$$

i powierzchnia Treski-Guesta (wyrażona w naprężeniach głównych z uporządkowaniem $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$)

$$|\sigma_1 - \sigma_3| - f_y \delta(\kappa) = 0 \quad (3.34)$$

gdzie f_y oznacza początkową granicę plastyczności przy jednoosiowym ściskaniu/rozciąganiu. W obu przypadkach stosuje się zwykle plastyczność stowarzyszoną. Może być również celowe użycie potencjału plastycznego w postaci Hubera-von Misesa dla warunku plastyczności Treski-Guesta w celu uniknięcia problemów numerycznych związanych z występowaniem krawędzi powierzchni plastyczności powodujących nieciągłość gradientu.

Dla opisu gruntów i materiałów quasi-kruchoch (w szczególności betonu) bardziej przydat-



Rysunek 3.3. Powierzchnie: a) Hubera-von Misesa i Treski-Guesta, b) Mohra-Coulomba i Druckera-Pragera

na jest dwuparametrowa powierzchnia Coulomba-Mohra przedstawiona na rys. 3.3(b)

$$\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - \cos \phi c \delta(\kappa) = 0 \quad (3.35)$$

W przypadku gruntów wartości kąta tarcia wewnętrznego ϕ i początkowej kohezji c są zwykle znane z doświadczenia. Dla betonu standardowo dane są wytrzymałości na jednoosiowe ściskanie f_c i na rozciąganie f_t . W takim przypadku można posłużyć się wzorami

$$\sin \phi = \frac{f_c - f_t}{f_c + f_t}, \quad c = \frac{1}{2} \sqrt{f_c f_t} \quad (3.36)$$

Powierzchnia Druckera-Pragera jest powierzchnią stożkową w przestrzeni naprężeń (rys. 3.3) daną wzorem

$$\sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}} + \frac{1}{3} \alpha \sigma_{\text{vol}} - \beta \delta(\kappa) = 0 \quad (3.37)$$

Dwa parametry α i β mogą być dobierane na różne sposoby. Jeśli znamy wartości kąta tarcia wewnętrznego ϕ i kohezji c to można użyć wzorów

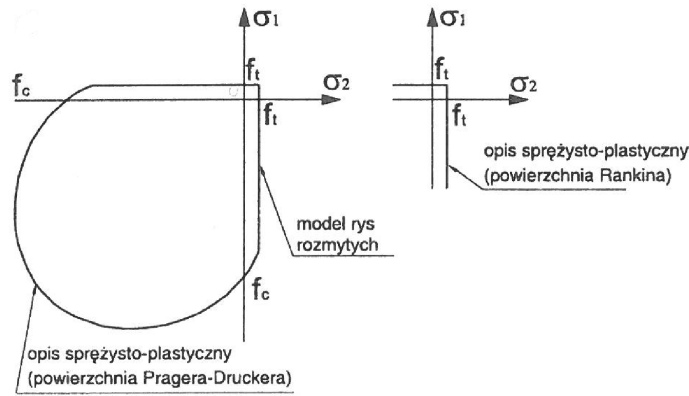
$$\alpha = \frac{6 \sin \phi}{3 - \sin \phi}, \quad \beta = \frac{6 \cos \phi}{3 - \sin \phi} c \quad (3.38)$$

W tym przypadku stożek Druckera-Pragera jest zewnętrznie opisany na powierzchni Coulomba-Mohra, tak jak to przedstawiono na rys. 3.3. Wymusza to zgodność wytrzymałości na jednoosiowe ściskanie f_c i dwuosiowe rozciąganie f_{tt} w płaskim stanie naprężenia dla obu hipotez. Jednakże wytrzymałości na jednoosiowe rozciąganie f_t i dwuosiowe ściskanie f_{cc} w płaskim stanie naprężenia nie leżą na wspólnych krawędziach i ich wartości są różne dla obu hipotez.

Dla betonu w płaskim stanie naprężenia, kiedy znane są wytrzymałości na ściskanie f_c i na rozciąganie f_t parametry α i β można wyznaczyć ze wzorów

$$\alpha = 3 \frac{f_c - f_t}{f_c + f_t}, \quad \beta = 2 \frac{f_c f_t}{f_c + f_t} \quad (3.39)$$

Dla tak dobranych parametrów powierzchnia Druckera-Pragera przechodzi dokładnie przez punkty w przestrzeni naprężeń opisujące jednoosiowe wytrzymałości na ściskanie f_c i na rozciąganie f_t . W tych punktach przecina się z powierzchnią Mohra-Coulomba o parametrach danych



Rysunek 3.4. Powierzchnia Druckera-Pragera w płaskim stanie naprężenia dopasowana do wytrzymałości f_c i f_{cc} oraz dwa sposoby reprezentacji rozciągania

równ. (3.36). W tym przypadku nie zachodzi zgodność wartości kohezji i kąta tarcia wewnętrznego dla hipotez Druckera-Pragera i Mohra-Coulomba. Każda z powierzchni ma inny wierzchołek w przestrzeni naprężeń i obie powierzchnie przecinają się wzajemnie bez wspólnych krawędzi stycznych – rys. 3.3(b) nie oddaje w tym przypadku rzeczywistości. Wadą hipotezy Druckera-Pragera z parametrami zdefiniowanymi równ. (3.39) jest znaczne przeszacowanie nośności w zakresie dwuosiowego ściskania w płaskim stanie naprężenia. W związku z tym jako rozwiązanie alternatywne proponuje się dopasowanie powierzchni Druckera-Pragera do jednoosiowej f_c i dwuosiowej f_{cc} wytrzymałości na ściskanie w płaskim stanie naprężenia. Prowadzi to do wzorów

$$\alpha = 3 \frac{f_{cc} - f_c}{2f_{cc} - f_c}, \quad \beta = \frac{f_{cc}f_c}{2f_{cc} - f_c} \quad (3.40)$$

Ponieważ tak dobrana powierzchnia w sposób nieakceptowalny przeszacowuje wytrzymałość na jednoosiowe rozciąganie f_t konieczne jest jej uzupełnienie od strony rozciągań hipotezą Rankine’a

$$\sigma_1 - f_t \delta_t(\kappa) = 0 \quad (3.41)$$

lub modelem rys rozmytych [15]. Powierzchnia plastyczności zdefiniowana równ. (3.37) wraz z (3.40) i (3.41) posiada w przestrzeni naprężeń 4 płaty – jeden powierzchni Druckera-Pragera i trzy płaszczyzny według hipotezy Rankine’a. Istnienie wielu płatów powierzchni (taki sam problem związany jest z powierzchniami Treski-Guesta i Mohra-Coulomba) wymaga zastosowania specjalnego podejścia dla punktów leżących na krawędziach. Właściwy sposób postępowania w takim przypadku można znaleźć między innymi w [8, 11].

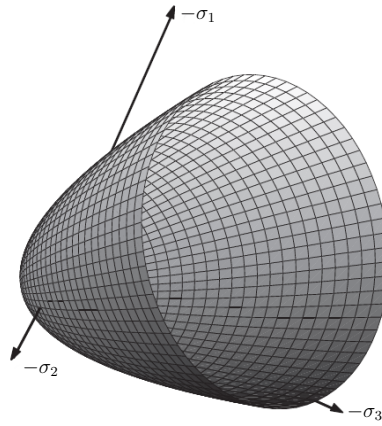
Powierzchnią opisującą dość dobrze właściwości betonu zarówno przy ściskaniu, jak i przy rozciąganiu, a przy tym gładką jest powierzchnia Hoffmana (rys. 3.5)

$$\frac{3}{2} \sigma_{\text{dev}} : \sigma_{\text{dev}} + a_1 \sigma_{\text{vol}} - a_2 = 0 \quad (3.42)$$

W powyższym równaniu występują dwa parametry a_1 , a_2 dobrane tak aby powierzchnia była dopasowana do jednoosiowych wytrzymałości na ściskanie f_c i na rozciąganie f_t . Prowadzi to do wzorów

$$a_1 = f_c \delta_c(\kappa) - f_t \delta_t(\kappa), \quad a_2 = f_c \delta_c(\kappa) f_t \delta_t(\kappa) \quad (3.43)$$

Zaletą tak sformułowanej powierzchni jest wprowadzenie odrębnych funkcji wzmocnienia /osłabienia dla zachowania się betonu przy ściskaniu i rozciąganiu $\delta_c(\kappa)$ i $\delta_t(\kappa)$, co lepiej opisuje rzeczywistość niż przyjęcie dla betonu pojedynczej powierzchni Druckera-Pragera, gdzie funkcja



Rysunek 3.5. Powierzchnia Hoffmana

wzmocnienia/osłabienia jest związana wyłącznie z parametrem $\delta(\kappa)$ [14]. To ostatnie podejście prowadzi do podobieństwa krzywych wzmocnienia/osłabienia przy ścisaniu i rozciąganiu, co nie odwzorowuje dobrze rzeczywistych cech betonu. Powierzchnia Hoffmana może być również dopasowana do jednoosiowej f_c i dwuosiowej f_{cc} wytrzymałości na ścisaniu w płaskim stanie naprężenia – w tym przypadku konieczne jest jej uzupełnienie o powierzchnię Rankine’a, równ. (3.41), od strony rozciągań. W odróżnieniu od powierzchni Druckera-Pragera, która w przestrzeni naprężeń jest stożkiem o prostych tworzących, por. rys. 3.3(b), powierzchnia Hoffmana ma tworzące paraboliczne, co lepiej opisuje wytrzymałość przy trójosiowym ścisaniu.

Należy pamiętać, że używanie powierzchni Mohra-Coulomba, Druckera-Pragera i Hoffmana w wersji stowarzyszonej prowadzi dla betonu i gruntów zwykle do znacznego przeszacowania dylatacji plastycznej. W związku z tym celowe jest ich stosowanie w wersji niestowarzyszonej z potencjałem plastycznym danym wzorem

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} + \frac{1}{3} \bar{\alpha} \sigma_{\text{vol}}} \quad (3.44)$$

Parametr opisujący dylatację $\bar{\alpha}$ jest związany z kątem dylatacji ψ wzorem

$$\bar{\alpha} = \frac{6 \sin \psi}{3 - \sin \psi} \quad (3.45)$$

Wyczerpującą dyskusję dotyczącą kąta dylatacji ψ dla gruntów i betonu zawiera praca [16].

Przegląd modeli plastycznych przydatnych w analizie konstrukcji betonowych i żelbetonowych można znaleźć w pracach [10, 17–19]. Szczególne powodzenie w praktyce zyskał model betonu oparty na sprzężonej teorii plastyczności i uszkodzenia zaimplementowany w pakiecie MES ABAQUS, nazwany *concrete damaged plasticity* (w skrócie CDP), por. [20]. Model ten skupia się na reprezentacji mechanizmów zniszczenia charakterystycznych dla materiałów quasi-kruchych, opisując w osobny sposób wzmocnienie/osłabienie i degradację sztywności przy rozciąganiu i ścisaniu. Model uwzględnia ewolucję sztywności przy obciążeniu cyklicznym i zależność odpowiedzi od prędkości obciążenia. Podstawy teoretyczne modelu pochodzą z prac [21, 22]. Parametr uszkodzenia izotropowego (patrz Rozdział X, punkt poświęcony teorii uszkodzenia) jest funkcją naprężenia efektywnego $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ (wartości z daszkami $\hat{\cdot}$ dotyczą naprężeń efektywnych) i dwóch osobno zdefiniowanych parametrów uszkodzenia dla rozciągania i ścisania $\omega_t(\kappa_t)$ i $\omega_c(\kappa_c)$, co prowadzi do wzoru $\omega = \omega(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \omega_t(\kappa_t), \omega_c(\kappa_c))$, por. [21]. Użycie dwóch niezależnych parametrów uszkodzenia dla rozciągania i ścisania pozwala na różny opis degradacji sztywności przy rozciąganiu i ścisaniu.

Funkcja plastyczności w przestrzeni naprężeń efektywnych to uogólniona powierzchnia Druckera-Pragera [20]

$$F\left(\sqrt{\frac{3}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{dev}} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{dev}}}, \frac{1}{3}\hat{\sigma}_{\text{vol}}, \hat{\sigma}_{\text{max}}, \sigma_t, \sigma_c\right) = 0 \quad (3.46)$$

gdzie $\hat{\sigma}_{\text{max}}$ to maksymalna wartość własna tensora naprężeń efektywnych. Oczywiście różne funkcje reprezentują odpowiednio ewoluującą wytrzymałość materiału przy rozciąganiu i ścisaniu

$$\sigma_t = f_t \delta_t(\kappa_t, \dot{\kappa}_t), \quad \sigma_c = f_c \delta_c(\kappa_c, \dot{\kappa}_c) \quad (3.47)$$

Pierwsza z tych funkcji wykazuje osłabienie, a druga najpierw wzmocnienie, a następnie osłabienie. Niestowarzyszone prawo płynięcia związane z hiperboliczną funkcją potencjału plastycznego zawiera 3 parametry modelu: kąt dylatacji ψ , tzw. mimośród (określający odstępstwo od linii prostej na płaszczyźnie $\frac{1}{3}\hat{\sigma}_{\text{vol}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{dev}} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{dev}}$ i początkową wytrzymałość na jednoosiowe rozciąganie f_t .

4. Rysy rozmyte

Przedstawiona w tym punkcie tematyka jest opisana między innymi w [8, 23]. Modele rys rozmytych stanowią alternatywę w stosunku do modeli sprężysto-plastycznych przy opisie materiałów wykazujących osłabienie. Podstawowym założeniem jest przyjęcie, że w punkcie materialnym, który ulega zarysowaniu pojawiają się rysy rozmyte prostopadłe do kierunku głównego odkształcenia rozciągającego – rys. 4.1.

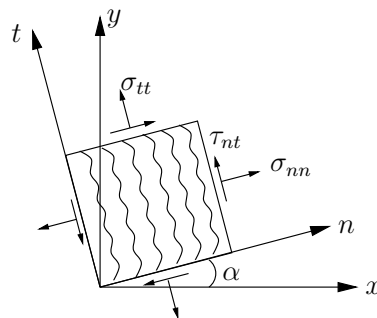
Przez rysy rozmyte rozumie się lokalne osłabienie materiału bez naruszenia ciągłości przemieszczeń. Takie podejście powoduje, że pomimo rozmytego zarysowania pozostajemy przy kontinuum materialnym i nie musimy używać podejść znanych z mechaniki pękania [24]. Różnicą pomiędzy opisem sprężysto-plastycznym a opisem rys rozmytych jest używanie całkowitych wartości odkształceń, a nie ich prędkości. Powoduje to, że w przypadku odciążenia (podobnie jak w kontynualnej mechanice uszkodzeń) nie pojawiają się odkształcenia resztkowe – rys. 4.2.

Zakłada się, że całkowite odkształcenia są sumą części sprężystej ϵ^e i części zarysowanej ϵ^{cr} (*cr* jest skrótem od angielskiego słowa *crack* - rysa)

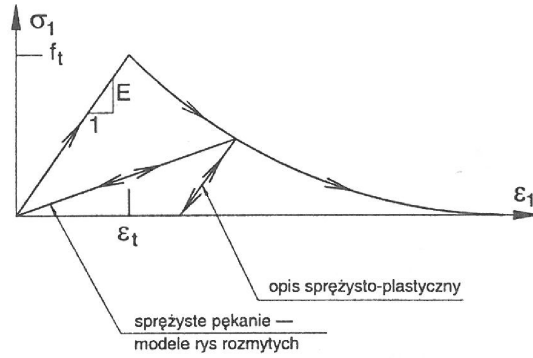
$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^{cr} \quad (4.1)$$

Dla części sprężystej obowiązuje prawo Hooke'a

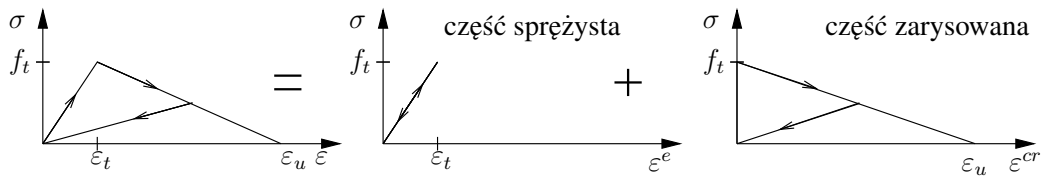
$$\boldsymbol{\epsilon}^e = (\boldsymbol{D}^e)^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}^e : \boldsymbol{\sigma} \quad (4.2)$$



Rysunek 4.1. Rysy rozmyte



Rysunek 4.2. Obciążenie i odciażenie



Rysunek 4.3. Podział odkształceń na część sprężystą i zarysowaną

Podstawowym problemem w sformułowaniu rys rozmytych jest właściwe sformułowanie macierzy podatności C^{cr} dla części zarysowanej

$$\epsilon^{cr} = C^{cr} : \sigma \quad (4.3)$$

Końcowa postać macierzy podatności jest otrzymywana jako suma podatności części sprężystej i części zarysowanej

$$\epsilon = (C^e + C^{cr}) : \sigma = C : \sigma \quad (4.4)$$

Związek konstytutywny w formie sztywnościowej jest otrzymywany jako odwrotność

$$\sigma = (C^e + C^{cr})^{-1} : \epsilon = D : \epsilon \quad (4.5)$$

Dekompozycję odkształceń dla przypadku jednowymiarowego przedstawia rys. 4.3.

Poniżej przedstawimy szczegółowe postacie wzorów dla przypadku płaskiego stanu naprężenia. W układzie współrzędnych lokalnych związanych z kierunkiem rysy naprężenia i odkształcenia mają następujące składowe (w zapisie wektorowym Voigta)

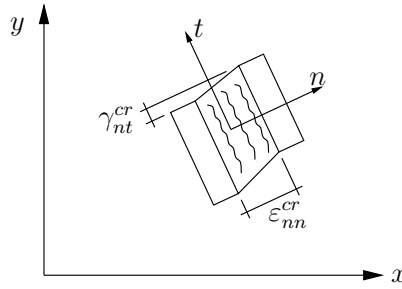
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \tau_{nt} \end{bmatrix}, \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{nn} \\ \epsilon_{tt} \\ \gamma_{nt} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Operator podatności sprężystej ma postać (stosując dalej zapis Voigta)

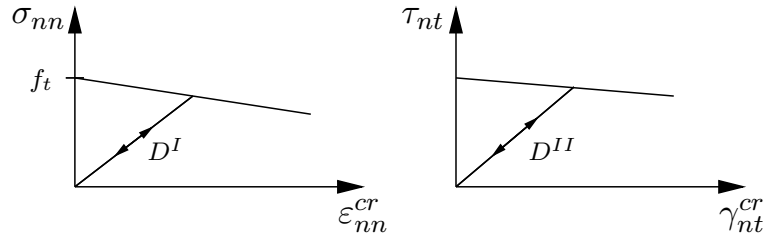
$$C^e = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Dla części zarysowanej bazując na obserwacjach eksperymentalnych można określić związki konstytutywne osobno dla składowych normalnych i stycznych stanu naprężenia i odkształcenia (rys. 4.4). Odpowiednie moduły sieci są przedstawione na rys. 4.5.

$$\sigma_{nn} = D^I \epsilon_{nn}^{cr}, \quad \tau_{nt} = D^{II} \gamma_{nt}^{cr} \quad (4.8)$$



Rysunek 4.4. Składowe normalne i styczne stanu odkształcenia w rysie



Rysunek 4.5. Moduły sieczne normalne i styczne w rysie

Odształcenia całkowite w rysie w zapisie Voigta mają tylko dwie niezerowe składowe, a operator podatności ma formę

$$\epsilon^{cr} = \begin{bmatrix} \epsilon_{nn}^{cr} \\ 0 \\ \gamma_{nt}^{cr} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{cr} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D^I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D^{II}} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Całkowity operator podatności jest sumą części sprężystej i zarysowanej

$$\mathbf{C} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{D^I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D^{II}} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

W przypadku jednowymiarowym (podobnie jak dla modelu sprężysto-plastycznego) zależność odkształcenie -naprężenie i jej odwrotność mają charakter związków szeregowych łączących część sprężystą z częścią zarysowaną

$$\epsilon = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{D^I} \right) \sigma \quad (4.11)$$

$$\sigma = \frac{ED^I}{E + D^I} \epsilon \quad (4.12)$$

Dla płaskiego stanu naprężenie wygodnie jest wprowadzić moduł ścinania (Kirchhoffa), podany w równ. (2.8)₂, oraz dwa dodatkowe parametry materiałowe μ i β definiowane jako

$$\mu = \frac{D^I}{E + D^I}, \quad \beta = \frac{D^{II}}{G + D^{II}} \quad (4.13)$$

Przy ich wykorzystaniu finalna postać operatora podatności w płaskim stanie naprężenia w zapisie Voigta ma formę

$$\mathbf{C} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1-\mu}{\mu E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\beta}{\beta G} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Odwrotność operatora podatności czyli operator sztywności daje się przedstawić w jawnej postaci jako

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\mu E}{1-\mu\nu^2} & \frac{\mu\nu E}{1-\mu\nu^2} & 0 \\ \frac{\mu\nu E}{1-\mu\nu^2} & \frac{E}{1-\mu\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Wraz z maleniem sztywności normalnej D^I przy otwieraniu się rysy (tzn. zwiększaniu się odkształcenia normalnego w rysie ϵ_{nn}^{cr}) maleje również wartość parametru μ . Zmniejszenie się wartości μ prowadzi nie tylko do zmniejszenia się sztywności normalnej, ale również do osłabienia sprzężenia pomiędzy kierunkiem normalnym i poprzecznym poprzez zmniejszenie się iloczynu $\mu\nu$ w wyrazach poza diagonalą w operatorze sztywności.

Należy podkreślić, że przedstawione powyżej postacie operatorów dotyczą lokalnego układu współrzędnych definiowanego przez płaszczyznę rysy i wektor normalny do niej. W celu uzyskania związku naprężenie-odkształcenie w globalnym układzie współrzędnych należy dokonać standardowej transformacji

$$\sigma_{gl} = (\mathbf{T}^T : \mathbf{D} : \mathbf{T}) : \epsilon_{gl} \quad (4.16)$$

gdzie tensor czwartego rzędu \mathbf{T} stanowi operator transformacji dla tensorów naprężenia i odkształcenia przy przejściu z układu globalnego do lokalnego, a σ_{gl} i ϵ_{gl} oznaczają odpowiednio naprężenia i odkształcenia w układzie globalnym.

Powyżej opisany model jest właściwie najprostszym modelem rys rozmytych o tzw. ustalonym kierunku rysy [25]. Jego odpowiednikiem na gruncie teorii plastyczności jest ortotropowa funkcja plastyczności dana równ. (3.8). W modelu rys o ustalonym kierunku zakłada się, że kierunek normalny do rysy jest niezmienny w przestrzeni i zostaje ustalony za pierwszym razem, kiedy wartość największego odkształcenia głównego ϵ_1 przekroczy wartość odkształcenia rysującego ϵ_t (rys. 4.3). Założenie to prowadzi do stosunkowo prostej postaci związku prędkościowego w układzie globalnym

$$\dot{\sigma}_{gl} = (\mathbf{T}^T : \mathbf{D}_{tang} : \mathbf{T}) : \dot{\epsilon}_{gl} \quad (4.17)$$

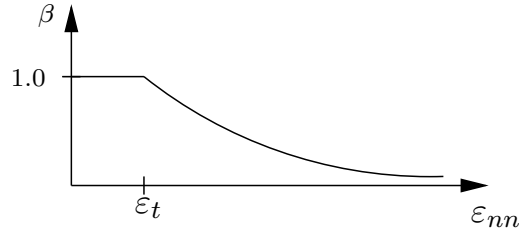
gdzie styczny operator sztywności w układzie lokalnym wynika po prostu z różniczkowania naprężenia względem odkształcenia

$$\mathbf{D}_{tang} = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \quad (4.18)$$

W zapisie Voigta dla płaskiego stanu naprężenia styczny operator sztywności w układzie lokalnym ma postać

$$\mathbf{D}_{tang} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \epsilon_{nn}} & \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \epsilon_{tt}} & \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \gamma_{nt}} \\ \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \epsilon_{nn}} & \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \epsilon_{tt}} & \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \gamma_{nt}} \\ \frac{\partial \tau_{nt}}{\partial \epsilon_{nn}} & \frac{\partial \tau_{nt}}{\partial \epsilon_{tt}} & \frac{\partial \tau_{nt}}{\partial \gamma_{nt}} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Jednocześnie jednak założenie o niezmiennym w przestrzeni kierunku rysy prowadzi do tego, że jeśli w procesie obciążenia w danym punkcie zmieniają się przestrzenne kierunki odkształceń głównych to kierunek normalny do rysy przestanie się pokrywać z kierunkiem największego odkształcenia głównego ϵ_1 . Wówczas w układzie lokalnym rysy pojawią się odkształcenie i naprężenie styczne. Ich wzajemna relacja jest opisana poprzez sieczną sztywność βG . Parametr β nazywa się często współczynnikiem retencji ścinania (rys. 4.6). Jego poprawny dobór jest ważny z uwagi na wyniki obliczeń numerycznych. Zbyt duża wartość β może prowadzić do



Rysunek 4.6. Współczynnik retencji ścinania β

sytuacji, kiedy to w rysie wypadkowa wartość naprężenia będzie znacznie większa od wytrzymałości betonu na rozciąganie f_t , co w efekcie może prowadzić do przeszacowania nośności na szczeblu konstrukcji.

Rozwiązaniem alternatywnym dla modelu rys rozmytych o ustalonym kierunku jest tzw. model rys obracających się. W tym podejściu zakłada się, że kierunek normalny do płaszczyzny rysy nie jest stały w przestrzeni, tylko zawsze jest współosiowy z przestrzennym kierunkiem największego odkształcenia głównego ϵ_1 . Model ten ograniczony do stanu dwuwymiarowego jest opisany w [15, 26]. Sformułowanie trójwymiarowe jest przedstawione w [27]. W modelu rys obracających się w rysie nie występują odkształcenia i naprężenia styczne, lokalne tensory naprężenia i odkształcenia w rysie mają tylko dwa składniki, co w zapisie Voigta przybiera postać

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{nn} \\ \epsilon_{tt} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Konsekwentnie operatory podatności dla rys obracających się mają postacie

$$\mathbf{C}^e = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{cr} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D^T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Finalny operator podatności dla rys obracających się będący sumą części sprężystej i zarysowanej ma formę

$$\mathbf{C} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{D^T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Operator sztywności otrzymuje się poprzez odwrócenie operatora podatności co prowadzi do wzoru

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\mu E}{1-\mu\nu^2} & \frac{\mu\nu E}{1-\mu\nu^2} \\ \frac{\mu\nu E}{1-\mu\nu^2} & \frac{E}{1-\mu\nu^2} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Przedstawione powyżej formy operatorów są prawdziwe dla lokalnego układu współrzędnych definiowanego przez wersor prostopadły do płaszczyzny rysy (tj. wersor wpółosiowy z kierunkiem największego odkształcenia głównego ϵ_1). Przejście do globalnego układu współrzędnych dokonuje się analogicznie jak w przypadku rys o ustalonym kierunku – równ. (4.16). W tym przypadku jednak operator T transformuje 3 składowe naprężenia i odkształcenia w układzie globalnym do 2 składowych w układzie kierunków głównych (brak odkształceń i naprężeń stycznych).

Związki naprężenie-odkształcenie w formie prędkościowej dla modelu rys obracających się dla układu lokalnego mają standardową formę

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_{tang} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.24)$$

gdzie styczny operator sztywności przybiera postać

$$\mathbf{D}_{tang} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \epsilon_{nn}} & \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \epsilon_{tt}} \\ \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \epsilon_{nn}} & \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \epsilon_{tt}} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Przy wyprowadzeniu związku prędkościowego w globalnym układzie odniesienia należy pamiętać, że macierz transformacji nie jest stała w procesie obciążenia tylko zmienia swoje składniki wraz ze zmianą kierunków głównych tensora odkształceń. Prowadzi to do związku transformacyjnego dla prędkości odkształcenia w postaci

$$\dot{\epsilon} = \dot{\mathbf{T}}\epsilon_{gl} + \mathbf{T}\dot{\epsilon}_{gl} \quad (4.26)$$

Okazuje się jednak, że związek prędkościowy naprężenie-odkształcenie można zapisać w układzie globalnym dla modelu rys obracających się dokładnie w takiej samej formie jak dla modelu rys o ustalonym kierunku, tzn.

$$\dot{\sigma}_{gl} = \mathbf{T}^T \mathbf{D}_{tang} \mathbf{T} \dot{\epsilon}_{gl} \quad (4.27)$$

pod warunkiem zapisania lokalnego operatora sztywności w specjalnej formie, która w zapisie Voigta przybiera postać [15, 26]

$$\mathbf{D}_{tang} = \begin{bmatrix} \frac{d\sigma_{nn}}{d\epsilon_{nn}} & \frac{d\sigma_{nn}}{d\epsilon_{tt}} & 0 \\ \frac{d\sigma_{tt}}{d\epsilon_{nn}} & \frac{d\sigma_{tt}}{d\epsilon_{tt}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{nn} - \sigma_{tt}}{2(\epsilon_{nn} - \epsilon_{tt})} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

W stycznym operatorze sztywności danym równ. (4.28) wprowadza się trzecią kolumnę i wiersz mimo, że wartości prędkości naprężenia i odkształcenia są zadane w układzie odkształceń głównych, co powoduje, że składowe styczne z definicji są zerowe. Wprowadzenie modułu sztywności stycznej wiążącej ze sobą składowe styczne prędkości odkształcenia i naprężenia w formie

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_{nn} - \sigma_{tt}}{2(\epsilon_{nn} - \epsilon_{tt})} \gamma_{nt} \quad (4.29)$$

zapewnia ogólnie, że całkowite wartości odkształcenia i naprężenia mają zawsze te same kierunki główne (tzn. że układy lokalne dla odkształceń i naprężeń głównych pokrywają się). Moduł sztywności dany równ. (4.29) może w zaawansowanych stanach obciążenia mieć wartość ujemną.

W modelu rys obracających się wypadkowe naprężenie w rysie nigdy nie przekracza wartości f_t co sprawia, że na szczeblu konstrukcji otrzymuje się zwykle niższą nośność niż w przypadku zastosowania modelu rys o ustalonym kierunku. Nie można w ogólny sposób odpowiedzieć, który z dwóch przedstawionych powyżej modeli rys (o ustalonym kierunku i obracających się) lepiej odwzorowuje rzeczywiste zachowanie się elementów z betonu. Jak przedstawiono wyżej w modelu rys o ustalonym kierunku może dojść do przeszacowania wartości naprężenia w rysie. Z drugiej strony model rys obracających się jest modelem bez pamięci przestrzennej, gdzie pierwotny kierunek rysy nie jest pamiętany. Rozwiązaniem kompromisowym łączącym zalety obu modeli (tzn. pamięć kierunków poprzednich zarysowań i rozwój nowych kierunków rys w procesie obciążenia) jest tzw. model wielokierunkowych, nieortogonalnych rys rozmytych o ustalonych kierunkach [28]. W cytowanej pracy można również znaleźć rozszerzenie modelu rys rozmytych na przypadek oddziaływania temperatury.

Jak wspomniano wyżej rysy rozmyte można również opisywać używając modeli sprężysto-plastycznych przyjmując odpowiedni moduł osłabienia. Używając modelu z powierzchnią plastyczności Rankine'a – równ. (3.41), można na szczeblu punktu materialnego dla procesu

czynnego dostać wyniki zbieżne dokładnie z modelem rys obracających się. Jak jednak wspomniano na początku bieżącego punktu modele rys rozmytych różnią się od modeli sprężysto-plastycznych w opisie odciążenia. Powoduje to, że na szczeblu konstrukcji użycie modelu plastycznego Rankine'a i modelu rys obracających się może prowadzić do znacznie różniących się wyników.

Bibliografia

- [1] Nowacki W.: Teoria sprężystości. PWN, Warszawa, 1970.
- [2] Sokołowski M., redaktor: Sprężystość. PWN, Warszawa, Mechanika Techniczna, T. IV, 1978.
- [3] Lemaitre J., Chaboche J.-L.: Mechanics of Solid Materials. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [4] Ottosen N., Ristinmaa M.: The Mechanics of Constitutive Modeling. Elsevier, 2005.
- [5] Jemioło S., Gajewski M.: Hipersprężystoplastyczność. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2014.
- [6] Lubliner J.: Plasticity Theory. Macmillan Publishing Company, New York, 1990.
- [7] Jirasek M., Bažant Z. P.: Inelastic Analysis of Structures. J. Wiley & Sons, Chichester, 2002.
- [8] de Borst R., Crisfield M.A., Remmers J.J.C., Verhoosel C.V.: Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Wiley, Second Edition, 2012.
- [9] Sawczuk A.: Wprowadzenie do mechaniki konstrukcji plastycznych. PWN, Warszawa, 1982.
- [10] Chen W.F., Han D.J.: Plasticity for Structural Engineers. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [11] Simo J.C., Hughes T.J.R.: Computational Inelasticity. Interdisciplinary Applied Mathematics Vol. 7. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [12] Perzyna P.: Teoria lepkoplastyczności. PWN, Warszawa, 1966.
- [13] Życzkowski M.: Obciążenia złożone w teorii plastyczności. PWN, Warszawa, 1973.
- [14] Winnicki A.: Viscoplastic and internal discontinuity models in analysis of structural concrete. Series Civil Engineering, Cracow University of Technology, Cracow, 2007.
- [15] Feenstra P.H.: Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete. Ph.D. dissertation, Delft University of Technology, Delft, 1993.
- [16] Vermeer P.A., de Borst R.: Non-associated plasticity for soils, concrete and rock. Heron, 29(3), 1984.
- [17] Mang H.A., Hofstetter G.: Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures. Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1995.
- [18] Chen W.F.: Plasticity in Reinforced Concrete. McGraw-Hill, New York, 1982.
- [19] fib - Fédération internationale du béton: Code-type models for concrete behaviour. Background of MC2010. fib, 2013. Bulletin No 70.
- [20] SIMULIA: Abaqus Theory Manual (6.10). Raport instytutowy, Dassault Systemes, Providence, RI, USA, 2010.
- [21] Lee J., Fenves G.: Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. ASCE J. Eng. Mech., 124(8), 1998, 892–900.
- [22] Lubliner J., Oliver J., Oller S., Oñate E.: A plastic-damage model for concrete. Int. J. Solids Struct., 25(3), 1989, 299–326.
- [23] Szarliński J., Winnicki A., Podleś K.: Konstrukcje z betonu w płaskich stanach. Komputerowe wspomaganie analizy i projektowania. Politechnika Krakowska, Kraków, 2002.
- [24] Neimitz A.: Mechanika pękania. PWN, Warszawa, 1998.

- [25] Bažant Z. P., Oh B.: Crack band theory for fracture of concrete. RILEM Materials and Structures, 16, 1983, 155–177.
- [26] Rots J. G.: Computational modeling of concrete fracture. Ph.D. dissertation, Delft University of Technology, Delft, 1988.
- [27] Selby R., Vecchio F.: Three-dimensional constitutive relations for reinforced concrete. Institute Report 93-02, Univ. of Toronto, Dept. Civil Eng., Toronto, Canada, 1993.
- [28] de Borst R.: Smearred cracking, plasticity, creep and thermal loading – a unified approach. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 62, 1987, 89–110.