

Termosprężystość

Wykład 1 z SOKI, specjalność BIM

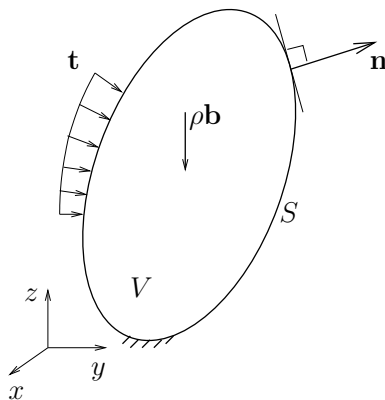
Jerzy Pamin

e-mail: Jerzy.Pamin@pk.edu.pl

Katedra Technologii Informatycznych w Inżynierii
Politechnika Krakowska

SOKI, BIM, 2020   

Stan naprężenia



Wektor gęstości sił masowych

$$\rho \mathbf{b} = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

Wektor gęstości sił powierzchniowych

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

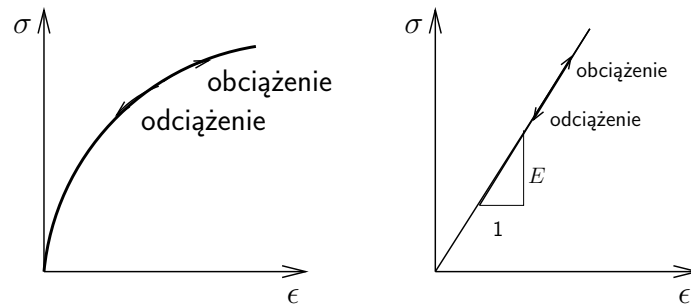
Przemieszczenie, odkształcenie, naprężenie (notacja Voigta)

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

SOKI, BIM, 2020   

Sprężystość w warunkach izotermicznych

Założono liniowe związki kinematyczne.



Hipersprężystość

$$\sigma = \sigma(\epsilon) \quad \text{i} \quad \mathcal{D} = 0$$

Naprężenie nie zależy od historii deformacji.

Odształceniu nie towarzyszy dysypacja energii \mathcal{D} .

Sprężystość w warunkach izotermicznych

Istnieje potencjał energii odkształcenia $W(\epsilon)$. Naprężenie jest obliczane jako pochodna tego potencjału.

$$\sigma = \frac{\partial W(\epsilon)}{\partial \epsilon}, \quad W = \frac{1}{2} \epsilon : \mathbf{D}^e : \epsilon$$

Prawo Hooke'a:

$$\sigma = \mathbf{D}^e : \epsilon$$

$\mathbf{D}^e = \{D_{ijkl}^e\}$ opisuje sztywność sprężystą materiału ($\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e \epsilon_{kl}$).
Dla materiału anizotropowego $\mathbf{D}^e(\mathbf{a})$ (\mathbf{a} – wektor kierunku).

Prawo Hooke'a dla materiału izotropowego:

$$\sigma = \lambda \epsilon_{\text{vol}} \mathbf{I} + 2G \epsilon$$

λ , G – stałe sprężystości (Lamego)

$$\epsilon_{\text{vol}} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$$

\mathbf{I} – tensor jednostkowy drugiego rzędu

Sprężystość w warunkach izotermicznych

Dewiator odkształcenia:

$$\epsilon_{\text{dev}} = \epsilon - \frac{1}{3}\epsilon_{\text{vol}}\mathbf{I}$$

Związki dewiatorowy i objętościowy liniowej sprężystości:

$$\sigma_{\text{dev}} = 2G\epsilon_{\text{dev}}, \quad \sigma_{\text{vol}} = 3K\epsilon_{\text{vol}}$$

Stałe Lamego: moduł Younga E , współczynnik Poissona ν , moduł sztywności objętościowej K , moduł Kirchhoffa G , stała λ

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

Dla materiału nieściśliwego: $\epsilon_{\text{vol}} = 0$, $\nu \rightarrow 0.5$, $K \rightarrow \infty$.

Sprężystość w warunkach nieizotermicznych

Prawo Hooke'a dla termosprężystości:

$$\sigma = \mathbf{D}^e(T) : (\epsilon - \epsilon^\theta), \quad \epsilon^\theta = \alpha\theta\mathbf{I}$$

ϵ^θ – odkształcenie wstępne termiczne (objętościowe)

α – współczynnik rozszerzalności cieplnej

$\theta \equiv \Delta T \equiv T - T_0$ – przyrost temperatury względem temperatury w stanie początkowym, charakteryzującym się zerowymi odkształceniami i naprężeniami

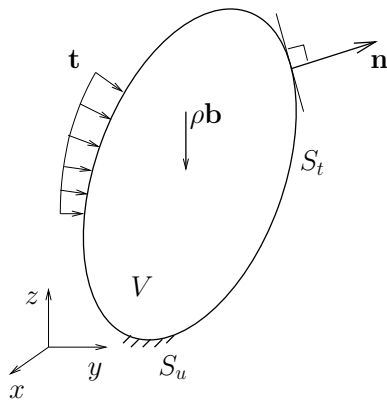
W ogólności od temperatury zależą wszystkie parametry modelu materiału. Dalej dla uproszczenia pominięto ten fakt, czyli uwzględniono w modelu sprężonym tylko rozszerzalność cieplną.

$$\sigma = \mathbf{D}^e : (\epsilon - \epsilon^\theta), \quad \epsilon^\theta = \alpha\theta\mathbf{I}$$

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^\theta, \quad \epsilon^e = \mathbf{C}^e : \sigma$$

$\mathbf{C}^e = (\mathbf{D}^e)^{-1}$ – tensor podatności sprężystej

Termosprężystość



Równowaga (bilans pędu)

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{w } V$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{na } S_t$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{na } S_u$$

Założono, że \mathbf{b} , \mathbf{t} , $\hat{\mathbf{u}}$ nie zależą od temperatury.

Liniowa sprężystość + rozszerzalność cieplna (notacja Voigta)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^\theta, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^\theta)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^\theta = \alpha \theta \mathbf{I}, \quad \mathbf{I} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Równowaga

Równanie równowagi:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{D}^e \mathbf{L} \mathbf{u} - \mathbf{L}^T \mathbf{D}^e \alpha \theta \mathbf{I} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

MRW → Forma słaba ($\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$, $\mathbf{v}_u = 0$ na S_u)

$$\int_V (\mathbf{L} \mathbf{v}_u)^T \mathbf{D}^e \mathbf{L} \mathbf{u} dV - \int_V (\mathbf{L} \mathbf{v}_u)^T \mathbf{D}^e \alpha \theta \mathbf{I} dV = \int_V \mathbf{v}_u^T \rho \mathbf{b} dV + \int_{S_t} \mathbf{v}_u^T \mathbf{t} dS \quad \forall \mathbf{v}_u$$

Dyskretyzacja przemieszczenia \mathbf{u} (\mathbf{v}_u analogicznie) i temperatury θ

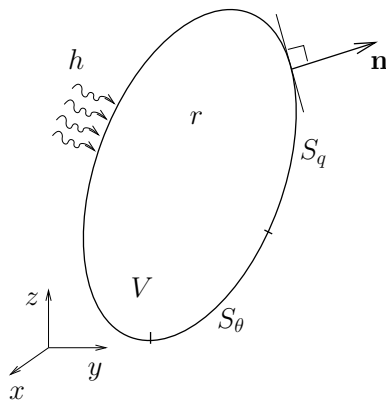
$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \check{\mathbf{u}}, \quad \theta = \mathbf{N}_\theta \check{\boldsymbol{\theta}}$$

Macierzowe równanie równowagi modelu:

$$\mathbf{K} \check{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_\theta \check{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{f}$$

Transport ciepła (niestacjonarny)

Bilans energii w chwili t



$$\rho c \dot{\theta} + \nabla^T \mathbf{q} = r \quad \text{w } V$$

$$\mathbf{q}^T \mathbf{n} = h \quad \text{na } S_q$$

$$\theta = \hat{\theta} \quad \text{na } S_\theta$$

War. początkowy $\theta = \theta_0$ dla $t = 0$

c – pojemność cieplna

r – gęstość źródła ciepła

h – gęstość strumienia przez brzeg

Zał.: r, h nie zależą od temperatury

Prawo Fouriera

$$\mathbf{q} = -\Lambda \nabla \theta$$

Materiał anizotropowy $\Lambda(\mathbf{a})$ (\mathbf{a} – wektor kierunku)

Materiał izotropowy

$$\mathbf{q} = -k \nabla \theta$$

Transport ciepła

Bilans cieplny

$$\rho c \dot{\theta} - \nabla^T \Lambda \nabla \theta = r$$

MRW \rightarrow Forma słaba ($\theta = \hat{\theta}, v_\theta = 0$ na S_θ)

$$\int_V v_\theta \rho c \dot{\theta} dV + \int_V (\nabla v_\theta)^T \Lambda \nabla \theta dV = \int_V v_\theta r dV - \int_{S_q} v_\theta h dS \quad \forall v_\theta$$

Konieczna dyskretyzacja przedziału czasu $(0, t_u)$

$$t_i \in (0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t, t + \Delta t, \dots, t_u)$$

$$\theta^{t+\Delta t} = \theta^t + \Delta \theta$$

Całkowanie po czasie (generalized midpoint rule)

$$(1 - \gamma) \dot{\theta}^t + \gamma \dot{\theta}^{t+\Delta t} = \frac{\theta^{t+\Delta t} - \theta^t}{\Delta t}$$

Dla $\gamma = 1$ algorytm Eulera wstecz (backward Euler)

$$\dot{\theta}^{t+\Delta t} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

Transport ciepła i problem sprzężony

$$\int_V v_\theta \rho c \frac{\Delta \theta}{\Delta t} dV + \int_V (\nabla v_\theta)^T \mathbf{\Lambda} \nabla \theta dV = \int_V v_\theta r dV - \int_{S_q} v_\theta h dS \quad \forall v_\theta$$

Dyskretyzacja θ (v_θ analogicznie)

$$\theta = \mathbf{N}_\theta \check{\theta}$$

Macierzowe równanie bilansu cieplnego:

$$\mathbf{C} \Delta \check{\theta} + \mathbf{H} \check{\theta} = h(t)$$

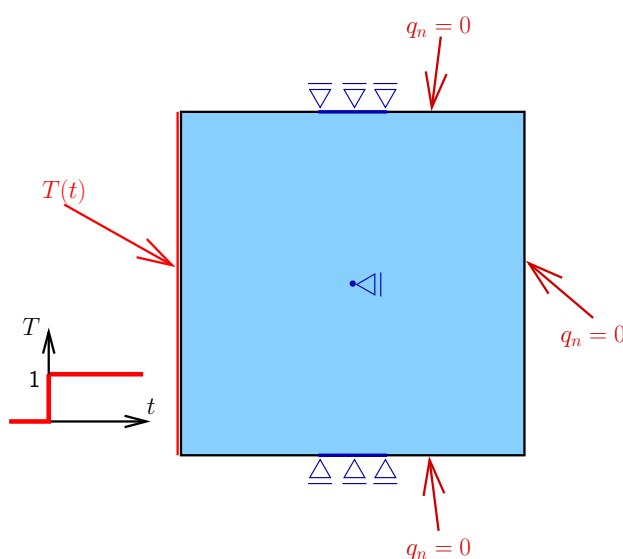
Po dyskretyzacji dla każdej chwili $t + \Delta t$ należy spełnić równanie:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \check{\mathbf{u}} \\ \Delta \check{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_\theta \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{\mathbf{u}} \\ \check{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ h \end{bmatrix}$$

Zazwyczaj rozwiązanie sekwencyjne, a nie monolityczne.

Symulacja pożaru w FDS-SMV (M. Kwapisz)

Kwadratowa konfiguracja pod obciążeniem termicznym



Mechanika:

- gęstość $\rho = 2$
- moduł Younga $E = 20000$
- współczynnik Poissona $\nu = 0.2$

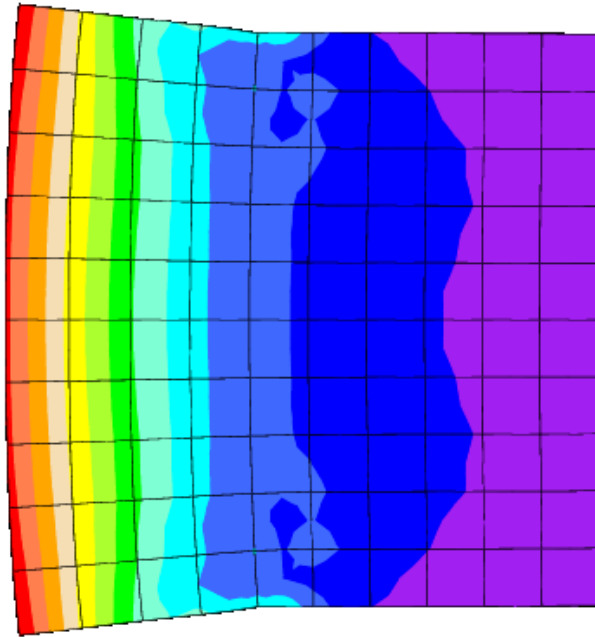
Przepływ ciepła
(niestacjonarny):

- temperatura początkowa $T_0 = 0$
- przewodność cieplna $k = 10$
- pojemność cieplna $c = 1$
- współczynnik rozszerzalności $\alpha = 0.01$

Ewolucja zastępczego naprężenia (FEAP)

Konfiguracja pod obciążeniem termicznym (FEAP)

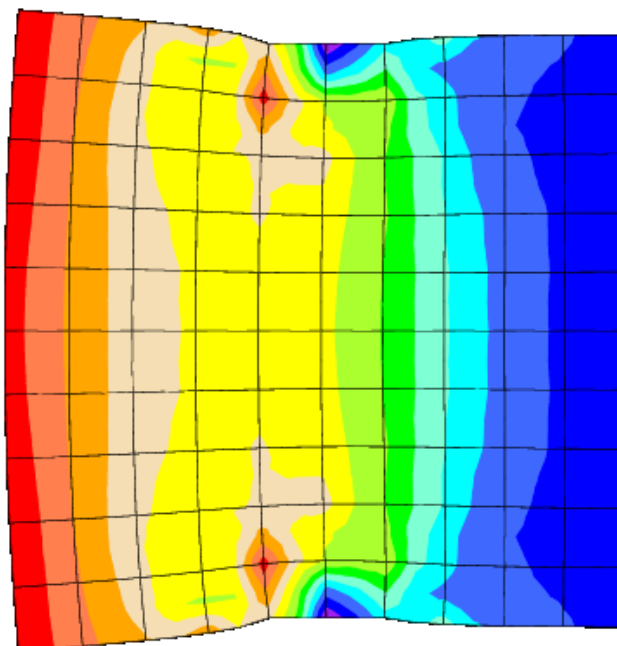
Naprężenie zastępcze



SOKI, BIM, 2020   

Konfiguracja pod obciążeniem termicznym (FEAP)

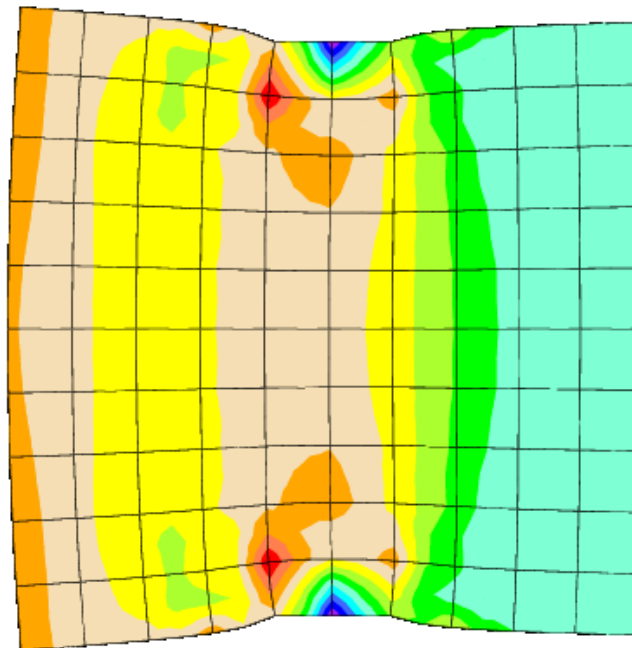
Naprężenie zastępcze



SOKI, BIM, 2020   

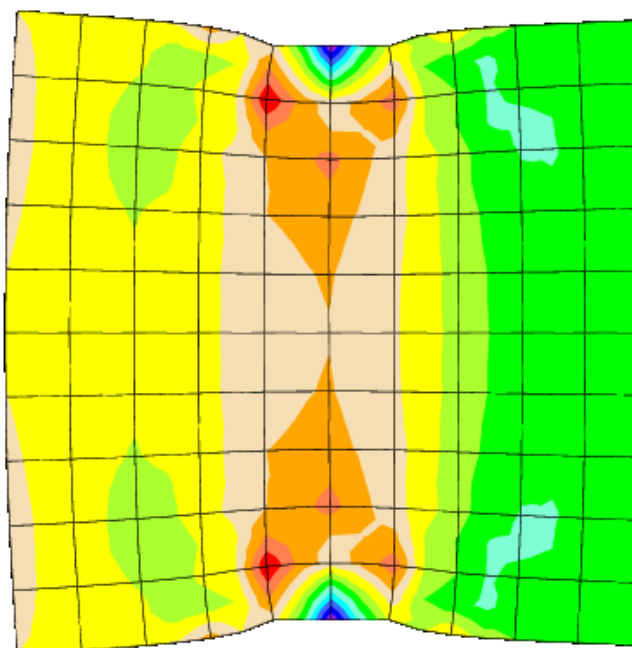
Konfiguracja pod obciążeniem termicznym (FEAP)

Naprężenie zastępcze



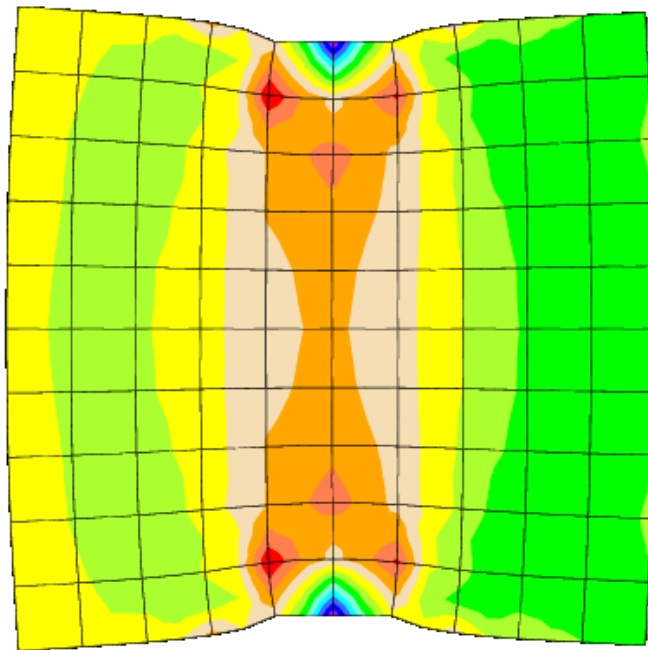
Konfiguracja pod obciążeniem termicznym (FEAP)

Naprężenie zastępcze



Konfiguracja pod obciążeniem termicznym (FEAP)

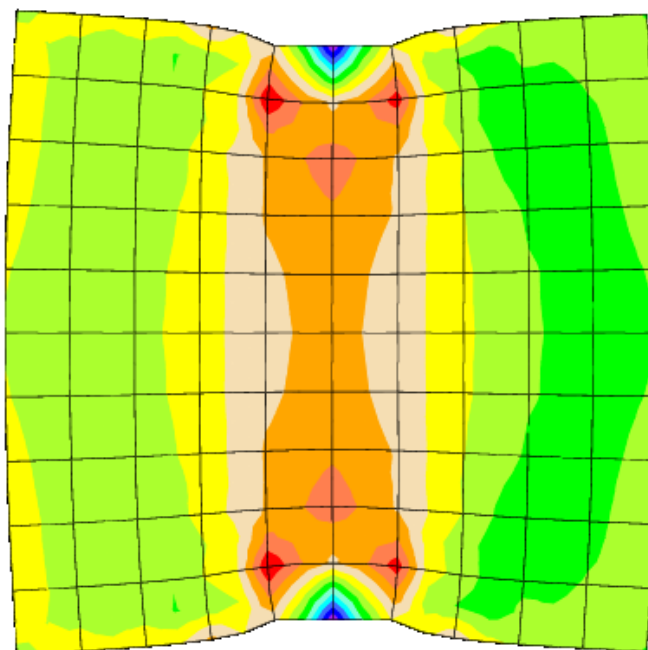
Naprężenie zastępcze



SOKI, BIM, 2020   

Konfiguracja pod obciążeniem termicznym (FEAP)

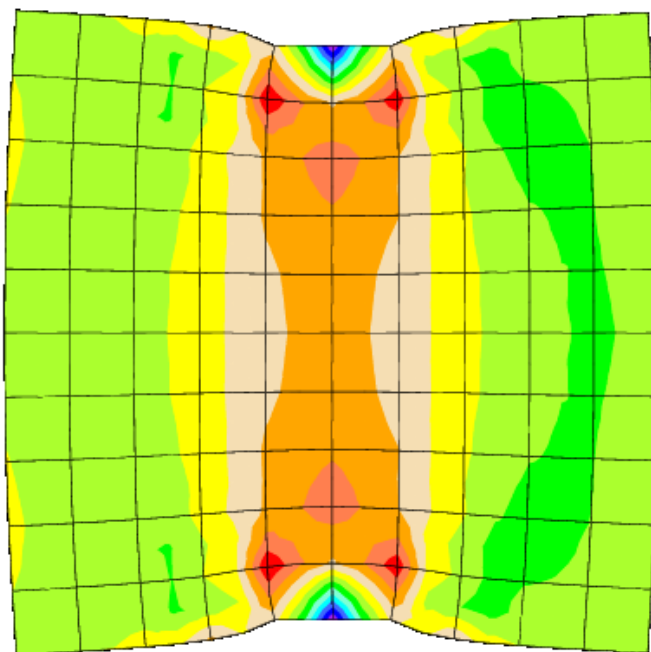
Naprężenie zastępcze



SOKI, BIM, 2020   

Konfiguracja pod obciążeniem termicznym (FEAP)

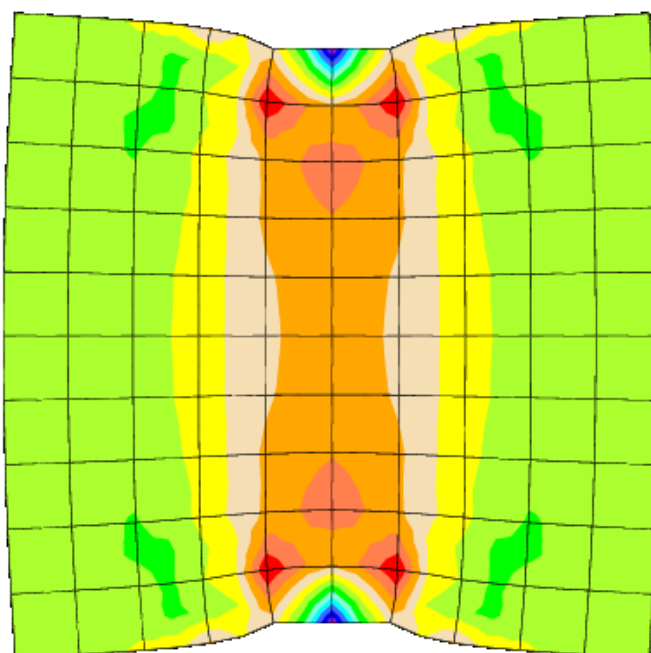
Naprężenie zastępcze



SOKI, BIM, 2020   

Konfiguracja pod obciążeniem termicznym (FEAP)

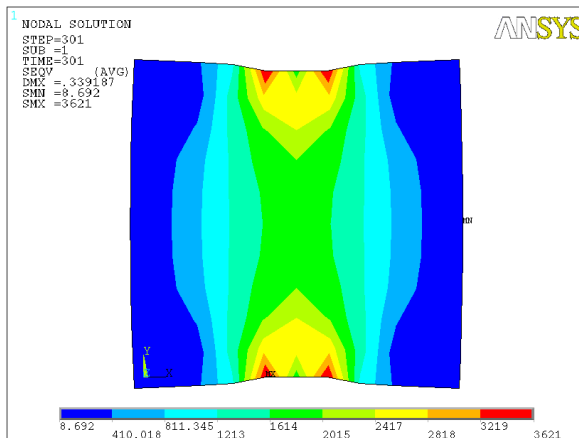
Naprężenie zastępcze



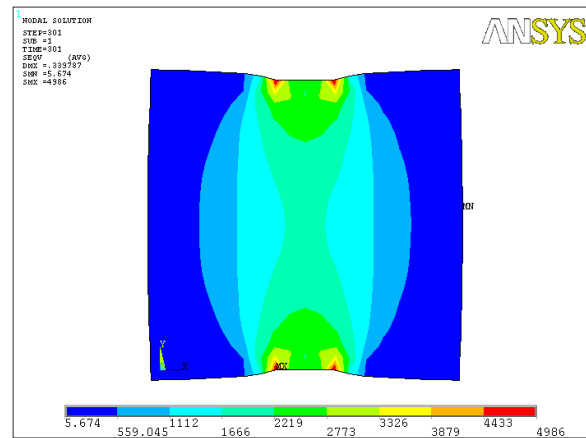
SOKI, BIM, 2020   

Konfiguracja pod obciążeniem termicznym (ANSYS)

Naprężenie zastępcze



rzadka siatka



gęsta siatka

Uwaga: wyniki są wrażliwe na dyskretyzację przestrzenną i czasową.

Zadania i pytania

1. Jakie są rodzaje równań różniczkowych dla zagadnienia statyki i (nie)stacjonarnego transportu ciepła?
2. Zapisać związek fizyczny dla termosprężystości przy założeniu małych deformacji. Jakie wielkości w nim zależą od temperatury?
3. Obliczyć naprężenie normalne w przekroju o polu powierzchni $A=10 \text{ cm}^2$ rury stalowej, wywołane wzrostem temperatury o 100 K. Założyć segment rury o długości 50 m i rozważyć wpływ na naprężenie kompensatora sprężystego o stałej sprężystości $k=800 \text{ N/mm}$.
4. Dla jakich zagadnień mechaniki konstrukcji wystarcza w MES ciągłość C^0 funkcji aproksymacyjnych na granicach międzyelementowych, a kiedy należy spełnić wymaganie klasy C^1 ?