Algorytmy analizy nieliniowej i dynamicznej

Wykład 5 z SOKI, specjalość *BIM*

Jerzy Pamin

e-mail: Jerzy.Pamin@pk.edu.pl

Katedra Technologii Informatycznych w Inżynierii

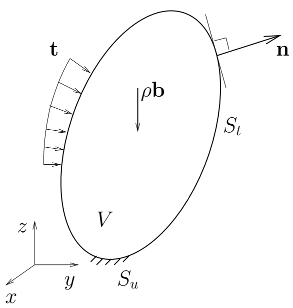
Politechnika Krakowska

Podziękowania dla A. Wosatko i A. Winnickiego

Nieliniowy problem statyki

Wykład 4 z MKwIL: Rozwiązywanie zagadnień nieliniowych cz.1

$$\mathbf{K}_{\mathrm{T}}\, \mathbf{d}\breve{\mathbf{u}} = \mathbf{r}_i = \mathbf{f}_{\mathrm{ext}}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{\mathrm{int},i}^{t+\Delta t}$$



Równowaga (notacja Voigta)

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b} = \mathbf{0} \qquad \text{w } V$$

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{t} \qquad \text{na } S_t$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \qquad \text{na } S_u$$

Zasada prac wirtualnych (liniowe związki kinematyczne)

$$\int_V \delta\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V = \int_V \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\,\mathrm{d}V + \int_S \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}\,\mathrm{d}S \quad \forall\delta\mathbf{u}$$

Dyskretyzacja przemieszczenia $\mathbf{u}$ ($\delta\boldsymbol{u}$ analogicznie, $\delta\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\delta\boldsymbol{u}$)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\breve{\mathbf{u}}$$

Macierzowe równanie równowagi modelu w każdej chwili procesu

$$\mathbf{f}_{\mathrm{int}} = \mathbf{f}_{\mathrm{ext}}$$

Nieliniowy problem statyki [1,2]

Jeśli model liniowo sprężysty $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\epsilon}$

$$\mathbf{f}_{\mathrm{int}}(\check{\mathbf{u}}) = \mathbf{K}\check{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_{\mathrm{ext}} \to \check{\mathbf{u}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}_{\mathrm{ext}}$$

Jeśli model fizycznie nieliniowy:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{\epsilon}\,, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_T\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}^t + \Delta\boldsymbol{\sigma}\,, \quad \Delta\boldsymbol{\sigma}_{i+1} = \Delta\boldsymbol{\sigma}_i + \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

$\Delta\boldsymbol{\sigma}$ - przyrost naprężenia wywołany przyrostem obciążenia
$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ - korekta przyrostu w iteracji

Residuum (nieliniowa funkcja $\check{\mathbf{u}}$; założono, że $\mathbf{f}_{\mathrm{ext}}$ nie zależy od $\check{\mathbf{u}}$)

$$\mathbf{r}(\check{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}_{\mathrm{ext}} - \mathbf{f}_{\mathrm{int}}(\check{\mathbf{u}}) \to \mathbf{0}$$

Część liniowa rozwinięcia w szereg Taylora (metoda Newtona)

$$\mathbf{r}(\check{\mathbf{u}} + \mathrm{d}\check{\mathbf{u}}) \approx \mathbf{r}(\check{\mathbf{u}}) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \check{\mathbf{u}}}\mathrm{d}\check{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}\check{\mathbf{u}} = \mathbf{r}(\check{\mathbf{u}}) \to \mathrm{d}\check{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_{\mathrm{T}}^{-1}\,\mathbf{r}(\check{\mathbf{u}}) \to \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

$\mathbf{K}_{\mathrm{T}} = -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \check{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{int}}}{\partial \check{\mathbf{u}}}$ - macierz styczna

Liniowy problem dynamiki - powtórzenie [3]

Wykład 2 z MKwIL: Równania MES dla dynamiki ośrodka ciągłego cz.2

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{F}(t)$$

plus kinematyczne warunki brzegowe + warunki początkowe

Rozwiązanie w dziedzinie czasu (t_0, t_{u})

Problem drgań własnych bez tłumienia

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{0} \to \left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right)\mathbf{d}_{\mathrm{A}} = \mathbf{0}$$

Rozwiązanie w dziedzinie częstotliwości: $\omega_i, \mathbf{d}_{\mathrm{A}i};\ i = 1, \ldots, n;\ n << N$

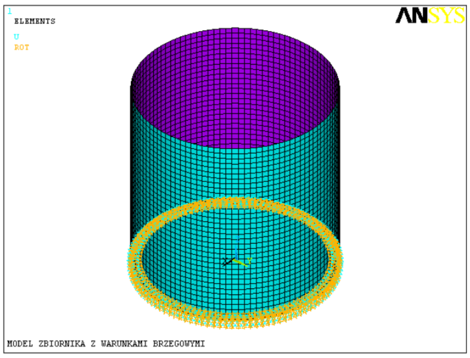
Wykład prof. C. Felippy nt. dynamiki układu o 1 stopniu swobody

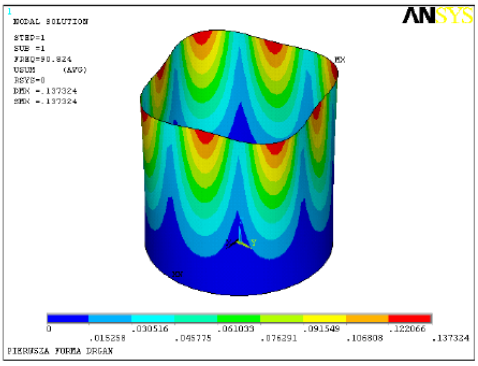
Drgania niepodpartej belki - notatka M. Caresty i prezentacja eksperymentu http://www.youtube.com/watch?v=XkmgMkDKAyU

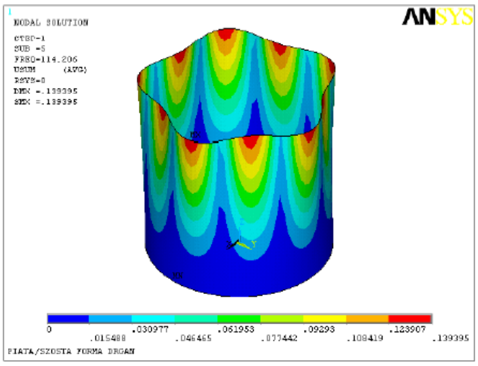
Zmiana oznaczeń:

$$\mathbf{d} = \check{\mathbf{u}}\,, \dot{\mathbf{d}} = \check{\mathbf{v}}\,, \ddot{\mathbf{d}} = \check{\mathbf{a}}\,, \mathbf{F} = \mathbf{f}_{\mathrm{ext}}$$

Drgania własne powłoki walcowej (ANSYS, Bugaj [4])

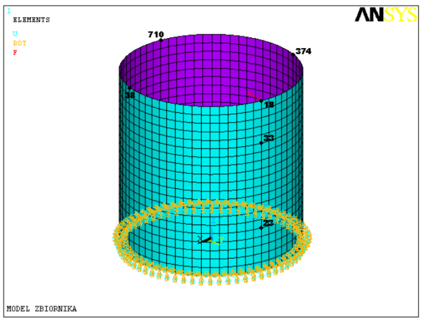


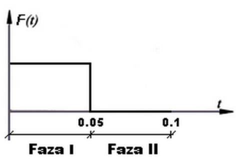


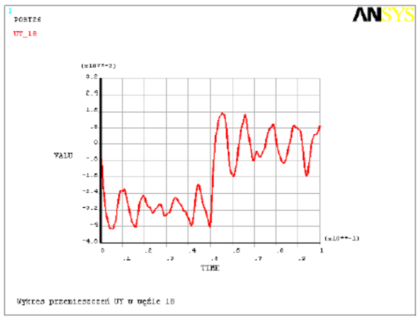


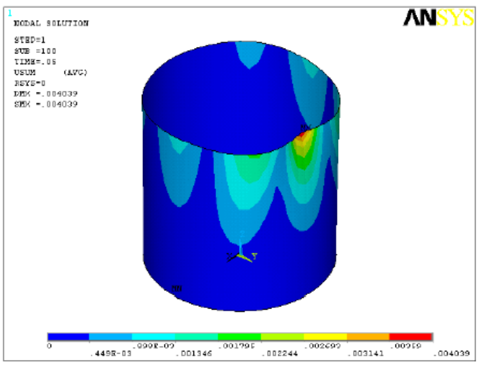
$f_1 = 90.8$ Hz $\quad$ $f_5 = f_6 = 114.2$ Hz

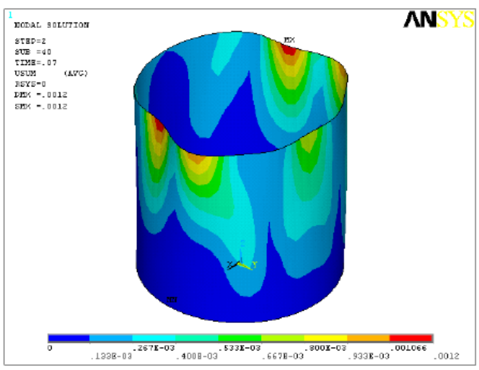
Drgania wymuszone powłoki walcowej (ANSYS, Bugaj [4])



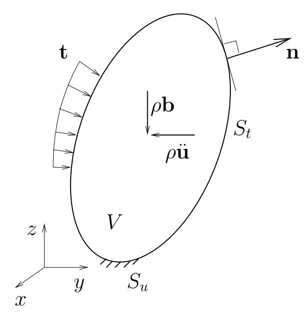








Nieliniowy problem dynamiki [1,2]



Równowaga (pominięte tłumienie)

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}(t) + \rho\mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}}(t) \qquad \text{w } V$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{n} = \mathbf{t}(t) \qquad \text{na } S_t$$

$$\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{u}}(t) \qquad \text{na } S_u$$

$$\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0\,, \quad \dot{\mathbf{u}}(t_0) = \mathbf{v}_0$$

Zasada prac wirtualnych

$$\int_V \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\rho\ddot{\mathbf{u}}\,\mathrm{d}V + \int_V \delta\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V = \int_V \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\,\mathrm{d}V + \int_S \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}\,\mathrm{d}S \quad \forall\delta\mathbf{u}$$

Dyskretyzacja MES

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\breve{\mathbf{u}}^e(t)\,, \quad \breve{\mathbf{u}}^e = \mathcal{A}^e\breve{\mathbf{u}}$$

Równanie bilansu pędu w każdej chwili czasu

$$\mathbf{M}\breve{\mathbf{a}} + \mathbf{f}_{\mathrm{int}} = \mathbf{f}_{\mathrm{ext}}$$

Macierz mas

$$\mathbf{M} = \sum_e (\mathcal{A}^e)^{\mathrm{T}} \int_{V^e} \rho\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}\mathrm{d}V\mathcal{A}^e$$

Nieliniowy problem dynamiki

Algorytm niejawny *(implicit)* całkowania po czasie

Równanie bilansu pędu w chwili $t + \Delta t$

$$\mathbf{M}\breve{\mathbf{a}} + \mathbf{f}_{\mathrm{int}} = \mathbf{f}_{\mathrm{ext}}$$

Wektor sił wewnętrznych

$$\mathbf{f}_{\mathrm{int}} = \sum_e (\mathcal{A}^e)^{\mathrm{T}} \int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t}\mathrm{d}V\,, \quad \mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$$

Przyrost naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}^t + \Delta\boldsymbol{\sigma}\,, \quad \Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{\mathrm{T}}\mathbf{B}\Delta\breve{\mathbf{u}}$$

Układ równań dla przyrostu

$$\mathbf{M}\breve{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} + \mathbf{K}_{\mathrm{T}}\,\Delta\breve{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_{\mathrm{ext}}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{\mathrm{int}}^{t}$$

Macierz styczna

$$\mathbf{K}_{\mathrm{T}} = \sum_e (\mathcal{A}^e)^{\mathrm{T}} \int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathrm{d}V\mathcal{A}^e$$

Nieliniowy problem dynamiki

Algorytm niejawny *(implicit)* całkowania po czasie

Układ równań dla przyrostu w iteracji 1

$$\mathbf{M}\breve{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} + \mathbf{K}_{\mathrm{T}}^{t}\,\Delta\breve{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_{\mathrm{ext}}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{\mathrm{int}}^{t}$$

Algorytm całkowania po czasie (np. Newmark) $\rightarrow \breve{\mathbf{a}}^{t+\Delta t}$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{T}0}\Delta\breve{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{r}_0 = \mathbf{f}_{\mathrm{ext}}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{\mathrm{int},0}^{t+\Delta t} - \mathbf{M}\breve{\mathbf{a}}^{t+\Delta t}$$

$$\Delta\breve{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{K}_{\mathrm{T}0}^{-1}\mathbf{r}_0$$

W kolejnych iteracjach poprawki $\mathrm{d}\breve{\mathbf{u}}_{i+1}$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{T}i}\,\mathrm{d}\breve{\mathbf{u}}_{i+1} = \mathbf{r}_i = \mathbf{f}_{\mathrm{ext}}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{\mathrm{int},i}^{t+\Delta t} - \mathbf{M}\breve{\mathbf{a}}^{t+\Delta t}$$

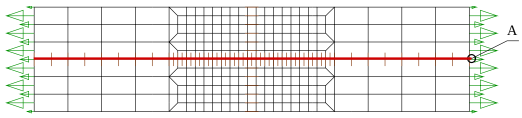
$$\mathrm{d}\breve{\mathbf{u}}_{i+1} = \mathbf{K}_{\mathrm{T}i}^{-1}\mathbf{r}_i$$

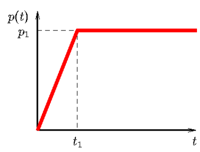
$$\Delta\breve{\mathbf{u}}_{i+1} = \Delta\breve{\mathbf{u}}_i + \mathrm{d}\breve{\mathbf{u}}_{i+1}$$

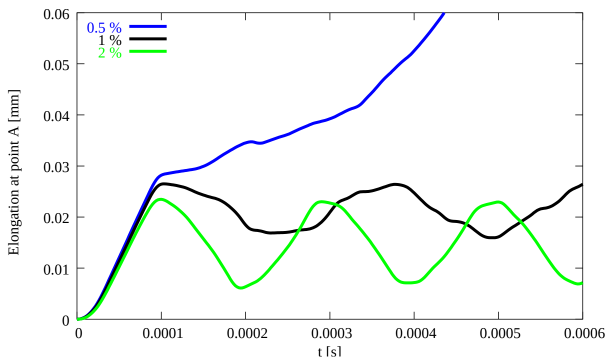
Iteracje wykonywane do spełnienia kryterium zbieżności
(równowaga zachowana z dokładnością do normy błędu).

Rozciąganie pręta żelbetowego - model uszkodzenia (2D)

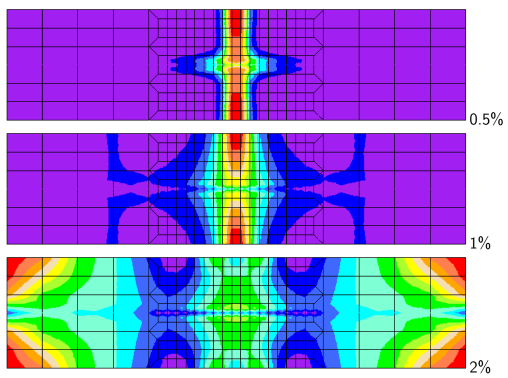
Wpływ procentu zbrojenia







Historia przemieszczenia p. A



Ewolucja miary odkształcenia $\bar{\epsilon}$ dla 1%

Nieliniowy problem dynamiki

Algorytm jawny *(explicit)* dla małych kroków Δt

Równanie bilansu pędu w chwili t

$$\mathbf{M}\breve{\mathbf{a}}^t = \mathbf{f}^t_{\text{ext}} - \mathbf{f}^t_{\text{int}}$$

Wektor sił wewnętrznych przeniesiony na prawą stronę

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \sum_e (\mathcal{A}^e)^{\mathrm{T}} \int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}^t \mathrm{d}V \,, \quad \mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$$

Podstawić wzór z metody różnic skończonych, obliczyć $\breve{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$

$$\breve{\mathbf{a}}^t = \frac{\breve{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - 2\breve{\mathbf{u}}^t + \breve{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2}$$

Stosuje się diagonalną macierz mas skupionych *(lumped)*

$$M_{kk} = \sum_{l=1}^{N} M_{kl} \,, \quad \breve{a}^t_k = \frac{r^t_k}{M_{kk}}$$

Jeśli trzeba uwzględnić tłumienie (np. typu Rayleigha $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$), korzysta się też ze wzoru różnicowego na prędkość $\breve{\mathbf{v}}^t$.

Nieliniowy problem dynamiki

Algorytm jawny *(explicit)* dla małych kroków Δt

Warunek stabilności Couranta na długość kroku czasowego

$$\Delta t < \Delta t_{\text{stab}} = \frac{2}{\omega_{\max}}$$

Krytyczną długość kroku można oszacować dla elementu

$$\Delta t_{\text{stab}} \leq \min_e \frac{h^e}{c} \,, \quad c = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{0.5}$$

Metodę charakteryzuje odejście od ścieżki równowagi.

Zastosowanie: procesy szybkie lub trudno zbieżne.

Literatura

[1] R. de Borst, M.A. Crisfield, J.J.C. Remmers and C.V. Verhoosel. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures.* Second Edition, J. Wiley & Sons, Chichester 2012.

[2] T. Belytschko, W.K. Liu and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures.* John Wiley & Sons, Chichester 2000.

[3] G. Rakowski, Z. Kacprzyk. *Metoda elementow skończonych w mechanice kostrukcji.* Oficyna Wyd. PW, Warszawa, 2005.

[4] I. Bugaj. *Analiza numeryczna drgań wybranych płyt i powłok MES.* Praca dyplomowa, Politechnika Krakowska, 2006.

Zadania i pytania

1. Jaka jest definicja sił niezrównoważonych w problemie nieliniowym mechaniki? Wyprowadzić wzór na operator styczny w metodzie Newtona-Raphsona.
2. Jak oblicza się wektor sił wewnętrznych $\mathbf{f}_{\mathrm{int}}$ w elemencie izoparametrycznym, dla którego element macierzysty jest opisany funkcjami kształtu $N_k(\xi, \eta, \zeta)$?
3. Zapisać macierzowe równanie różniczkowe drgań układu zdyskretyzowanego MES z przykładowymi warunkami brzegowymi i początkowymi. Objaśnić występujące w nim wielkości. Jak się je rozwiązuje numerycznie?
4. Dla układu o 1 stopniu swobody zapisać równanie drgania wywołanego ruchem podłoża.
5. Dla układu o 1 stopniu swobody zapisać równanie drgań własnych tłumionych. Przedstawić możliwe rozwiązania tego równania.