Modelowanie zagadnień wyboczenia

Wykład 6 z SOKI, specjalość *BIM*

Jerzy Pamin
e-mail: Jerzy.Pamin@pk.edu.pl

Katedra Technologii Informatycznych w Inżynierii
Politechnika Krakowska

Podziękowania dla M. Radwańskiej i P. Plucińskiego

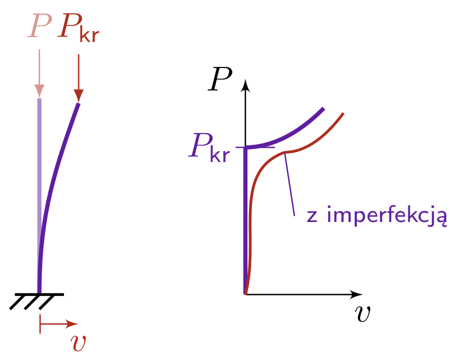
Wyboczenie konstrukcji prętowej - powtórzenie

Sztywność giętna jest zwiększana przez siłę rozciągającą, a zmniejszana przez ściskającą. Dostatecznie duża siła ściskająca redukuje sztywność na zginanie do zera powodując wyboczenie.

Założenia liniowej teorii Eulera:

- obciążenie statyczne jednoparametrowe
- liniowa sprężystość
- układ idealny (bez imperfekcji)

Nie zakłada się zasady zesztywnienia (równowaga w konfiguracji odkształconej).



$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_\sigma^*)\mathbf{v} = \mathbf{0} \;\to\; \lambda_{\min}\,, \mathbf{v}$

$\mathbf{K}_\sigma^*$ - macierz wstępnych naprężeń (geometryczna)

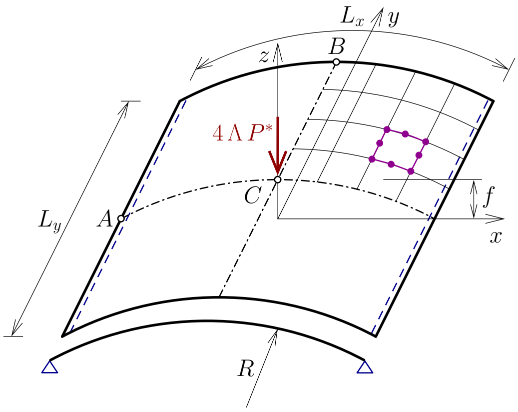
Algorytm:

1. Stan przedwyboczeniowy dla obciążenia konfiguracyjnego $\mathbf{p}^*$
   $\mathbf{K}\mathbf{d}^* = \mathbf{p}^* \;\to\; \mathbf{d}^*, N^{e*}, \mathbf{K}_\sigma^{e*}, \mathbf{K}_\sigma^*$
2. Problem własny do wyznaczenia obciążenia krytycznego $\mathbf{p}_{kr} = \lambda_{kr}\mathbf{p}^*$
   i formy wyboczenia $\mathbf{v} = \Delta\mathbf{d}$

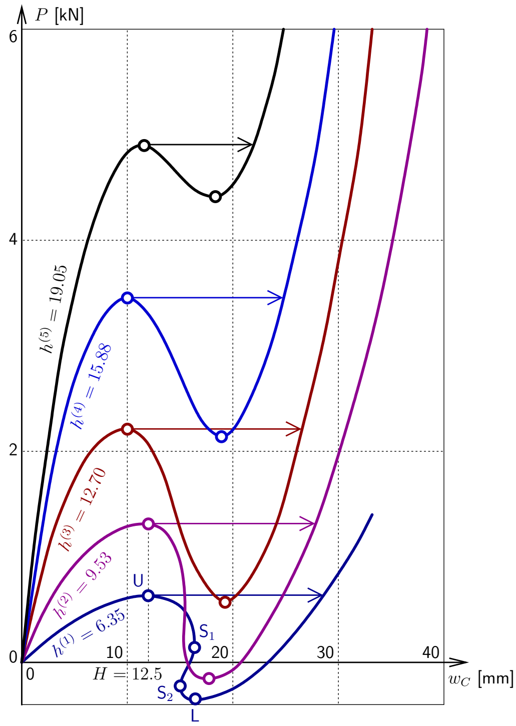
Wykład 3 z MKwIL: Zagadnienie wyboczenia (cz.2)

Utrata stateczności segmentu powłoki cylindrycznej [1]

Zagadnienie silnie nieliniowe - przeskok



Powłoka sprężysta mało wyniosła



Zagadnienie geometrycznie nieliniowe w MES [2]

Równowaga układu zdyskretyzowanego

$$\mathbf{K}_{\mathrm{T}}\,\Delta\breve{\mathbf{u}} = \Delta\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathrm{ext}}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{\mathrm{int}}^{t}$$

Styczna macierz sztywności

$$\mathbf{K}_{\mathrm{T}} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_\sigma$$

$\mathbf{K}_0$ - macierz sztywności liniowej

$\mathbf{K}_u$ - macierz sztywności przemieszczeniowej (macierz dyskretnych związków kinematycznych $\mathbf{B}$ zależna od przemieszczeń)

$\mathbf{K}_\sigma$ - macierz sztywności naprężeniowej (zależna od naprężeń uogólnionych)

Założono sprężystość materiału

Równowaga układu zdyskretyzowanego

$$\mathbf{K}_\mathrm{T}\,\Delta\breve{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_\mathrm{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_\mathrm{int}^{t} \;\rightarrow\; \Delta\breve{\mathbf{u}}$$

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\,\Delta\breve{\mathbf{u}} = [\mathbf{B}_\mathrm{L} + \mathbf{B}_\mathrm{N}(\breve{\mathbf{u}})]\;\Delta\breve{\mathbf{u}}\,, \quad \Delta\mathbf{g} = \boldsymbol{\Gamma}\,\Delta\breve{\mathbf{u}}$$

$\mathbf{g}$ - gradient przemieszczenia

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\Delta\boldsymbol{\epsilon}\,, \quad \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}^{t} + \Delta\boldsymbol{\sigma}$$

Wzory na macierze elementowe

$$\mathbf{K}_\mathrm{T}^e = \mathbf{K}_0^e + \mathbf{K}_u^e + \mathbf{K}_\sigma^e$$

$$\mathbf{K}_0^e = \int_{V^e} \mathbf{B}_\mathrm{L}^\mathrm{T}\,\mathbf{D}\,\mathbf{B}_\mathrm{L}\,\mathrm{d}V\,, \quad \mathbf{K}_\sigma^e = \int_{V^e} \boldsymbol{\Gamma}^\mathrm{T}\,\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma})\,\boldsymbol{\Gamma}\,\mathrm{d}V$$

$$\mathbf{K}_u^e = \mathbf{K}_{u1}^e(\breve{\mathbf{u}}) + \mathbf{K}_{u2}^e(\breve{\mathbf{u}},\breve{\mathbf{u}}) =$$

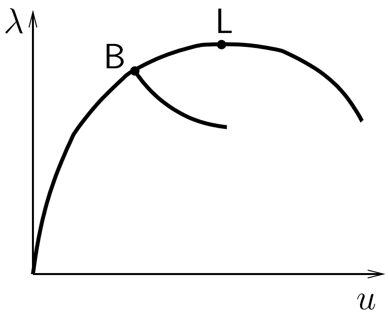
$$= \int_{V^e} \left(\mathbf{B}_\mathrm{L}^\mathrm{T}\,\mathbf{D}\,\mathbf{B}_\mathrm{N} + \mathbf{B}_\mathrm{N}^\mathrm{T}\,\mathbf{D}\,\mathbf{B}_\mathrm{L}\right)\,\mathrm{d}V + \int_{V^e} \mathbf{B}_\mathrm{N}^\mathrm{T}\,\mathbf{D}\,\mathbf{B}_\mathrm{N}\,\mathrm{d}V$$

$$\mathbf{f}_\mathrm{int}^e = \int_{V^e} (\mathbf{B}_\mathrm{L} + \mathbf{B}_\mathrm{N})^\mathrm{T}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V$$

Warunki utraty stateczności

Dla jakiego λ wystąpi stan krytyczny na ścieżce równowagi

$$\mathbf{K}_\mathrm{T}\,\Delta\breve{\mathbf{u}} = \Delta\mathbf{f} = \Delta\lambda\mathbf{f}^*$$



Standardowy probem własny

$(\mathbf{K}_\mathrm{T} - \kappa\mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{0} \rightarrow \kappa_1, \mathbf{w}_1$

$\kappa_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_{kr}$

Warunki stanów krytycznych

Obc. gran. L $\Delta\lambda = 0,\ \mathbf{w}_1^\mathrm{T}\mathbf{f}^* \neq 0$

P. bifurk. B $\Delta\lambda \neq 0,\ \mathbf{w}_1^\mathrm{T}\mathbf{f}^* = 0$

Bifurkacja stanów równowagi - uogólniony problem własny

$$-\left\{\begin{array}{l} \mathbf{K}_\mathrm{T}\Delta\breve{\mathbf{u}}_1 = \Delta\lambda\mathbf{f}^* \\ \mathbf{K}_\mathrm{T}\Delta\breve{\mathbf{u}}_2 = \Delta\lambda\mathbf{f}^* \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}_\mathrm{T}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Kryterium stanu krytycznego ($\mathbf{v} \neq 0$) $\rightarrow \det\mathbf{K}_\mathrm{T} = 0$

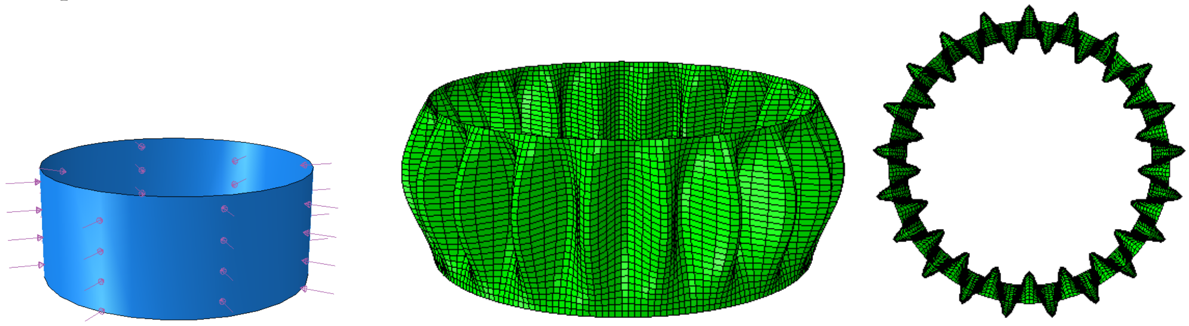
Zał. liniowe rozwiązanie odniesienia $\breve{\mathbf{u}}^* = \mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{f}^*$, $\breve{\mathbf{u}} = \lambda\breve{\mathbf{u}}^*$, $\boldsymbol{\sigma} = \lambda\boldsymbol{\sigma}^*$

Zlinearyzowany warunek wyboczenia

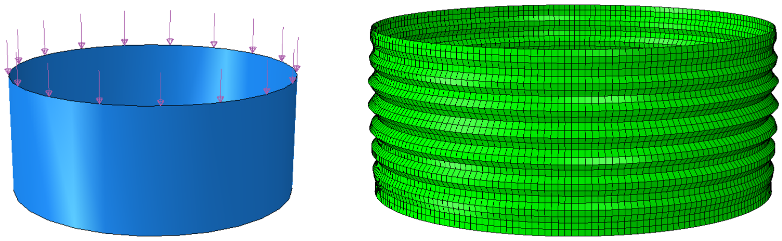
$$[\mathbf{K}_0 + \lambda(\mathbf{K}_\sigma^* + \mathbf{K}_{u1}^*)]\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Analiza wyboczenia powłoki walcowej z żebrem pierścieniowym pakietem ABAQUS (Chojnacki [3])

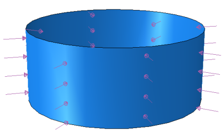
$p^* = 1$ kPa, $\lambda_{kr} = 2.62$

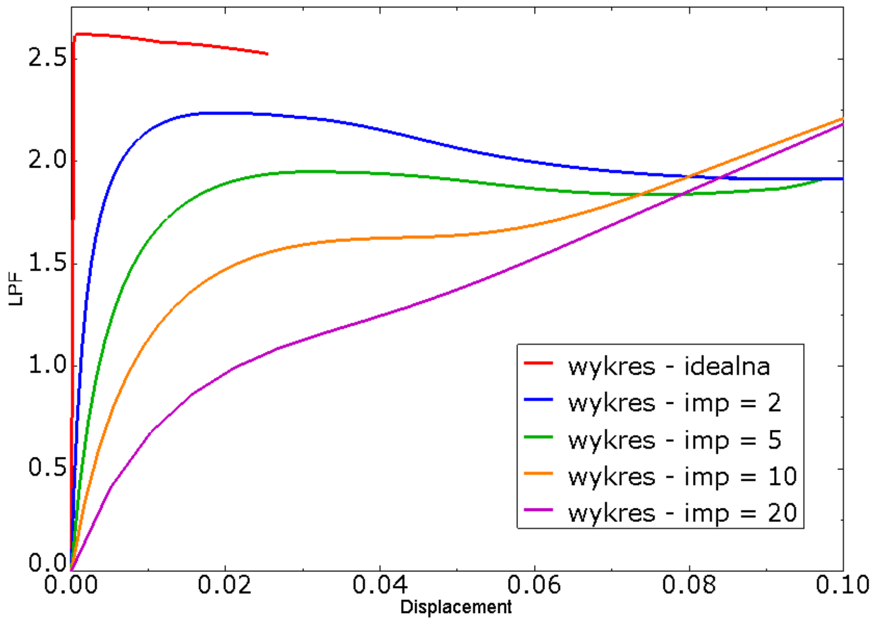


$p^* = 1$ kN/m, $\lambda_{kr} = 766$



Analiza wyboczenia powłoki walcowej (Chojnacki [3])

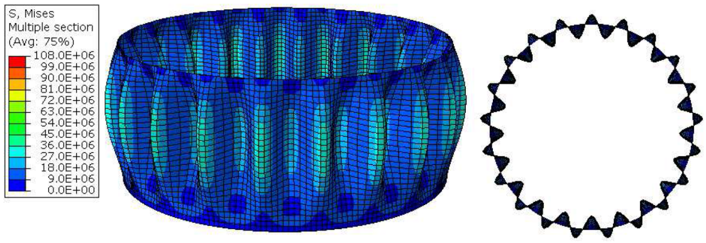




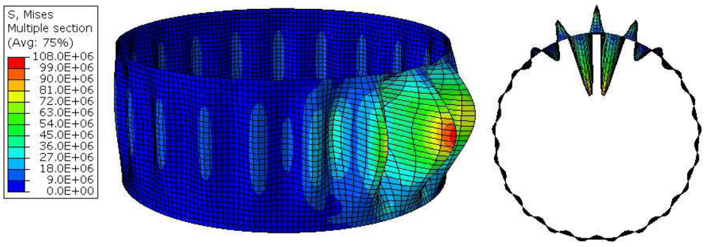
Wyboczenie powłoki idealnej

Analiza wyboczenia powłoki walcowej (Chojnacki [3])

Przed punktem granicznym



Pod koniec ścieżki równowagi



Rozkłady naprężenia zastępczego HMH

Wyboczenie powłoki z imperfekcją o amplitudzie 2 mm

Literatura i pytania

Literatura

[1] M. Radwańska, A. Stankiewicz, A. Wosatko, J. Pamin. *Plate and Shell Structures. Selected Analytical and Finite Element Solutions*. John Wiley & Sons, 2017.

[2] Z. Waszczyszyn, C. Cichoń, M. Radwańska. *Stability of Structures by Finite Elements Methods*. Elsevier, 1994.

[3] M. Chojnacki. *Projekt zbiornika stalowego i nieliniowa analiza wyboczenia powłoki z imperfekcjami*. Praca dyplomowa, Politechnika Krakowska, Kraków, 2014.

Pytania

1. Podać założenia liniowej teorii wyboczenia. Jakim wzorem wyraża się początkowy problem wyboczenia? Co stanowi rozwiązanie tego problemu? Jaki jest wpływ imperfekcji na analizę wyboczenia?
2. Z jakich macierzy składa się w analizie geometrycznie nieliniowej operator styczny? Jak wyprowadza się problem własny wyboczenia z warunku bifurkacji stanów równowagi?