PRZYKŁAD WYPROWADZENIA SFORMUŁOWANIA WARIACYJNEGO

Sformułowanie lokalne: *Znaleźć* $u(x) \in C^2$ *, takie że*

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} + u = g \qquad \forall x \in (a,b) \\ \frac{du}{dx}(a) = c \\ u(b) = d \end{cases}$$

W celu wyprowadzenia sformułowania słabego mnożymy obie strony równania różniczkowego przez funkcję testową v i całkujemy

$$\int\limits_a^b (u'' + u)v \,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b gv \,\mathrm{d}x$$

Całkujemy przez części

$$-\int\limits_a^b u'v' \,\mathrm{d}x + u'v|_a^b + \int\limits_a^b uv \,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b gv \,\mathrm{d}x$$

$$-\int\limits_a^b u'v' \,\mathrm{d}x + u'(b)v(b) - u'(a)v(a) + \int\limits_a^b uv \,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b gv \,\mathrm{d}x$$

Po uwzględnieniu warunku brzegowego Neumanna $u'(a) = c$ i przyjęciu $v(b) = 0$ otrzymujemy

$$-\int\limits_a^b u'v' \,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b uv \,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b gv \,\mathrm{d}x + cv(a)$$

Sformułowanie słabe: *Znaleźć* $u(x)$*, takie że* $u(b) = d$ *i*

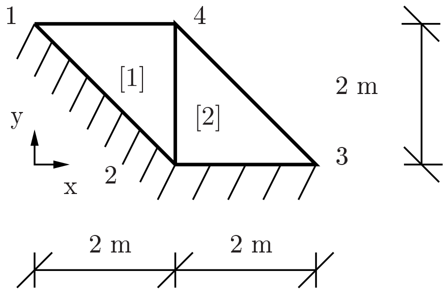
$$-\int\limits_a^b u'v' \,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b uv \,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b gv \,\mathrm{d}x + cv(a) \qquad \forall\, v,\ v(b) = 0$$

Współczynniki macierzy i wektora elementu obliczamy ze wzorów:

$$K_{ij}^{el} = -\int\limits_{el} \psi_i'\psi_j' \,\mathrm{d}x + \int\limits_{el} \psi_i\psi_j \,\mathrm{d}x, \qquad f_i^{el} = \int\limits_{el} g\psi_i \,\mathrm{d}x + c\psi_i(a)$$

OBLICZENIA MES DLA STACJONARNEGO PRZEPŁYWU CIEPŁA

Zastosować MES do rozwiązania zagadnienia Laplace'a (f=0, k=1 W/K/m) w obszarze zdyskretyzowanym dwoma jednakowymi elementami skończonymi ([1], [2]) z węzłami ponumerowanymi jak na rysunku. Przyjąć na części brzegu (1-2-3) warunki typu Dirichleta $\hat{T} = 20(x^2 - y^2)$ [^{o}C], a na pozostałej warunki typu Neumanna $\hat{q} = 100$ W/m^2. Obliczyć temperaturę w punkcie $\boldsymbol{A}(3, 0.5)$ i w środku ciężkości elementu [2].



Macierz incydencji

element	st. swobody
1	2, 4, 1
2	4, 2, 3

Macierze 'sztywności' elementów [1] i [2]:

$$\boldsymbol{K}^1 = \boldsymbol{K}^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Wektory 'obciążenia' elementów [1] i [2] wynikające z naturalnych warunków brzegowych:

$$\boldsymbol{f}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f}^2 = \begin{pmatrix} 141.4 \\ 0 \\ 141.1 \end{pmatrix}$$

Globalna macierz i wektor:

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1.5 & -0.5 & -1 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & -1 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 141.4 \\ 241.4 \end{pmatrix}$$

Uwzględnienie podstawowych warunków brzegowych i rozwiązanie układu równań algebraicznych $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$

$$\begin{pmatrix} \cancel{0.5} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-0.5} \\ \cancel{0} & \cancel{1.5} & \cancel{-0.5} & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & \cancel{-0.5} & \cancel{0.5} & \cancel{0} \\ -0.5 & -1 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 = -80 \\ u_2 = 80 \\ u_3 = 320 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{1000} \\ \cancel{0} \\ \cancel{141.4} \\ 241.4 \end{pmatrix}$$

stąd wektor stopni swobody:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -80 & 80 & 320 & 187.6 \end{pmatrix}^T \; [^o\mathrm{C}]$$

Funkcje kształtu elementu [2]

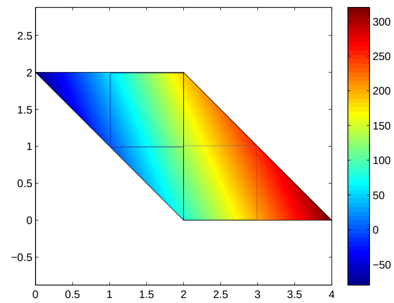
$$\phi_{(1)}(x,y) = y/2, \qquad \phi_{(2)}(x,y) = (x{+}y{-}4)/(2{+}0{-}4), \qquad \phi_{(3)}(x,y) = (x{-}2)/(4{-}2)$$

Dla takich funkcji zachodzi $\phi_{(1)}(x,y){+}\phi_{(2)}(x,y){+}\phi_{(3)}(x,y) = 1 \qquad \forall x,y$

Aproksymacja MES temperatury w elemencie [2]

$$T_h(x,y) = u_{(1)}\phi_{(1)}(x,y){+}u_{(2)}\phi_{(2)}(x,y){+}u_{(3)}\phi_{(3)}(x,y) = 120x{+}53.81y{-}160$$

Po podobnych obliczeniach dla elementu [1] otrzymujemy aproksymację rozw. jak poniżej.



Temperatura w wybranych punktach

$$T_h(\boldsymbol{A}) = 226.9^o\mathrm{C}, \qquad T_h(\boldsymbol{C}) = 195.8^o\mathrm{C}$$

Warto zauważyć, że dla środka ciężkości zachodzi

$$\phi_{(1)}(\boldsymbol{C}) = \phi_{(2)}(\boldsymbol{C}) = \phi_{(3)}(\boldsymbol{C}) = 1/3 \quad \Rightarrow \quad T_h(\boldsymbol{C}) = \frac{u_{(1)} + u_{(2)} + u_{(3)}}{3}$$