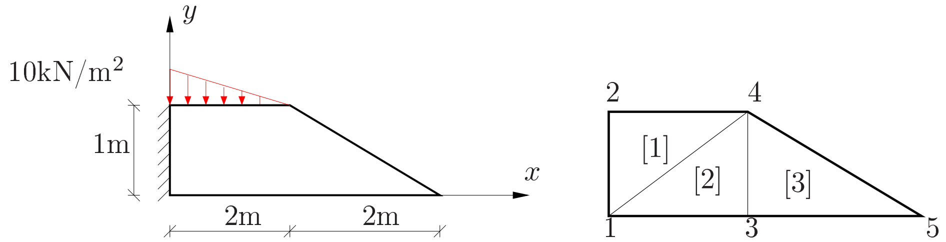
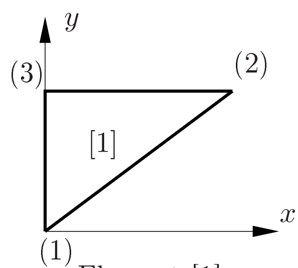
OBLICZANIE WEKTORA OBCIĄŻENIA ELEMENTU - ZAGADNIENIE PSO



Obszar i dyskretyzacja

$$P_i^{(e)} = \int_{\partial e \cap \partial \Omega_N} \boldsymbol{N}_i \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \, \mathrm{d}s, \qquad \hat{\boldsymbol{t}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5x - 10 \end{pmatrix}, \quad x \in [0, 2], \ y = 1$$



Element [1]

Skalarne funkcje kształtu w globalnym układzie współrzednych:

$$\phi_1 = 1 - y, \qquad \phi_2 = \tfrac{x}{2}, \qquad \phi_3 = y - \tfrac{x}{2}$$

Wektorowe funkcje kształtu i aproksymacja rozwiązania:

$$\boldsymbol{N}_1 = \begin{pmatrix} 1 - y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - y \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{N}_3 = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots, \qquad \boldsymbol{u}_h = \sum_{i=1}^{6} \boldsymbol{N}_i(x, y) u_i$$

Wektor obciążenia:

$$P_1^{(1)} = \int_0^2 \boldsymbol{N}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \, \mathrm{d}x = 0$$

$$P_2^{(1)} = \int_0^2 \boldsymbol{N}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \, \mathrm{d}x = \int_0^2 (1 - 1)(5x - 10) \, \mathrm{d}x = 0$$

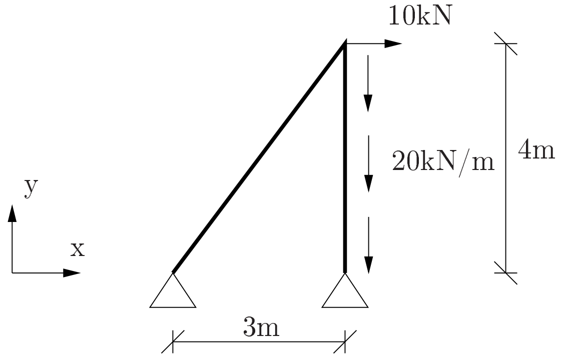
$$P_3^{(1)} = \int_0^2 \boldsymbol{N}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \, \mathrm{d}x = 0$$

$$P_4^{(1)} = \int_0^2 \boldsymbol{N}_4 \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \, \mathrm{d}x = \int_0^2 \tfrac{x}{2}(5x - 10) \, \mathrm{d}x = -3\tfrac{1}{3} \, \mathrm{kN/m}$$

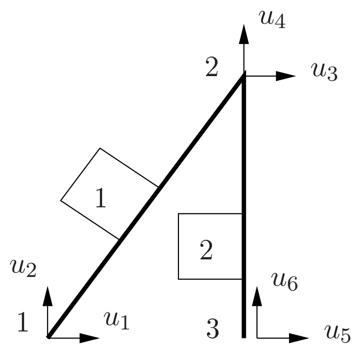
$$P_5^{(1)} = \int_0^2 \boldsymbol{N}_5 \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \, \mathrm{d}x = 0$$

$$P_6^{(1)} = \int_0^2 \boldsymbol{N}_6 \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \, \mathrm{d}x = \int_0^2 (1 - \tfrac{x}{2})(5x - 10) \, \mathrm{d}x = -6\tfrac{2}{3} \, \mathrm{kN/m}$$

PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA MES DO KRATOWNICY



EA = 100MN



Dyskretyzacja

numer elementu	numery węzłów	st. swobody	długość L	α	s=sinα	c=cosα
1	1, 2			>0	4/5	
2	2, 3			-90^o		

Macierz sztywności i wektor obciążenia (dla q=const!) elementu:

$$\boldsymbol{K}^e = \frac{EA}{L}\begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^e = \frac{qL}{2}\begin{pmatrix} c \\ s \\ c \\ s \end{pmatrix}$$

Element 1:

$$\boldsymbol{K}^1 = 100\begin{pmatrix} 72 & 96 & -72 & -96 \\ 96 & 128 & -96 & -128 \\ -72 & -96 & 72 & 96 \\ -96 & -128 & 96 & 128 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Element 2:

$$\boldsymbol{K}^2 = 100\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 0 & -250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -250 & 0 & 250 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -40 \\ 0 \\ -40 \end{pmatrix}$$

Globalna macierz sztywności i wektor obciążenia:

$$
\boldsymbol{K} = 100 \begin{pmatrix} 72 & 96 & -72 & -96 & 0 & 0 \\ 96 & 128 & -96 & -128 & 0 & 0 \\ -72 & -96 & 72 & 96 & 0 & 0 \\ -96 & -128 & 96 & 378 & 0 & -250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -250 & 0 & 250 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ -40 \end{pmatrix}
$$

Uwzględnienie warunków kinematycznych i rozwiązanie układu równań

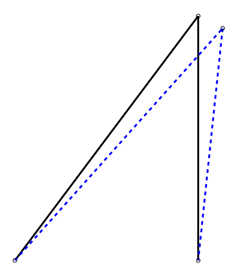
$$
\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{W}
$$

$$
100 \begin{pmatrix} \cancel{72} & \cancel{96} & \cancel{-72} & \cancel{-96} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{96} & \cancel{128} & \cancel{-96} & \cancel{-128} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -72 & -96 & 72 & 96 & 0 & 0 \\ -96 & -128 & 96 & 378 & 0 & -250 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-250} & \cancel{0} & \cancel{250} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 = 0 \\ u_6 = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ \cancel{0} \\ 0 \\ -40 \\ \cancel{0} \\ \cancel{-40} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ \cancel{0} \\ 10 \\ 0 \\ \cancel{0} \\ \cancel{0} \end{pmatrix}
$$

stąd oblicza się wektor stopni swobody:

$$
\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.00423 & -0.00213 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \ [m]
$$

Deformacja:



Obliczenie sił węzłowych (w tym reakcji):

$$
\boldsymbol{W} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{P}
$$

$$
100 \begin{pmatrix} 72 & 96 & -72 & -96 & 0 & 0 \\ 96 & 128 & -96 & -128 & 0 & 0 \\ -72 & -96 & 72 & 96 & 0 & 0 \\ -96 & -128 & 96 & 378 & 0 & -250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -250 & 0 & 250 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -13.333 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 93.333 \end{pmatrix}
$$

Tu należy narysować reakcje oraz sprawdzić czy rozwiązanie spełnia równania równowagi oraz czy przemieszczenia są sensowne.

Siły na końcach elementów (przywęzłowe):

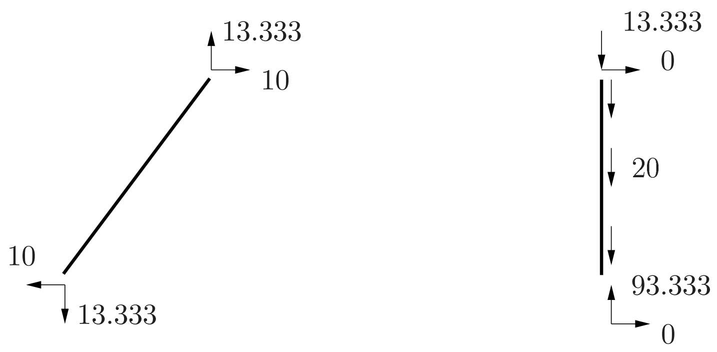
$$\boldsymbol{K}^{el}\boldsymbol{u}^{el} - \boldsymbol{P}^{el} = \boldsymbol{Q}^{el}$$

Element 1:

$$100\begin{pmatrix} 72 & 96 & -72 & -96 \\ 96 & 128 & -96 & -128 \\ -72 & -96 & 72 & 96 \\ -96 & -128 & 96 & 128 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} * \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -13.333 \\ 10 \\ 13.333 \end{pmatrix}$$

Element 2:

$$100\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 0 & -250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -250 & 0 & 250 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} * \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13.333 \\ 0 \\ 93.333 \end{pmatrix}$$

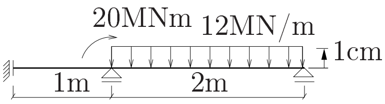


Na tej podstawie siły w prętach:

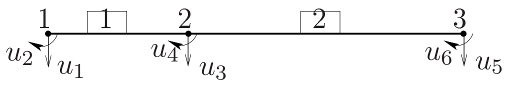
$N_1 = 16.667\,kN$
$N_2 = -13.333 - 20\,L\,\xi_2 \;\; [kN]$

Na zakończenie należy sprawdzić równowagę w węzłach.

PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA MES DLA BELKI



EI = 400MN



Dyskretyzacja

Macierz sztywności i wektor obciążenia (dla q=const!) elementu:

$$\boldsymbol{K}^e = \frac{2EI}{L^3}\begin{pmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^e = \begin{pmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{pmatrix}$$

Element 1:

$$\boldsymbol{K}^1 = 100\begin{pmatrix} 48 & 24 & -48 & 24 \\ 24 & 16 & -24 & -8 \\ -48 & -24 & 48 & -24 \\ 24 & 8 & -24 & 16 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Element 2:

$$\boldsymbol{K}^2 = 100\begin{pmatrix} 6 & 6 & -6 & 6 \\ 6 & 8 & -6 & 4 \\ -6 & -6 & 6 & -6 \\ 6 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Globalna macierz sztywności i wektor obciążeń przęsłowych:

$$
\boldsymbol{K} = 100 \begin{pmatrix} 48 & 24 & -48 & 24 & 0 & 0 \\ 24 & 16 & -24 & -8 & 0 & 0 \\ -48 & -24 & 54 & -18 & -6 & 6 \\ 24 & 8 & -18 & 24 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}
$$

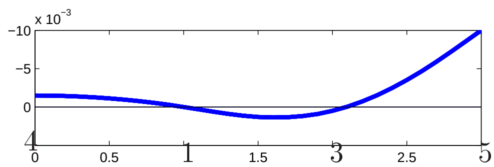
Uwzględnienie warunków kinematycznych i rozwiązanie układu równań

$$
\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{W}
$$

$$
100 \begin{pmatrix} 48 & 24 & -48 & 24 & 0 & 0 \\ \cancel{24} & \cancel{16} & \cancel{-24} & \cancel{-8} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{-48} & \cancel{-24} & \cancel{54} & \cancel{-18} & \cancel{-6} & \cancel{6} \\ 24 & 8 & -18 & 24 & -6 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-6} & \cancel{-6} & \cancel{6} & \cancel{-6} \\ 0 & 0 & 6 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ u_4 \\ u_5 = -0.01 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{0} \\ \cancel{12} \\ 4 \\ \cancel{12} \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{0} \\ \cancel{0} \\ 20 \\ \cancel{0} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Z dwóch równań, które zostały po uwzględnieniu warunków kinematycznych, oblicza się wektor stopni swobody:

$$
\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -0.0115 & 0 & 0 & 0.0230 & -0.0100 & -0.0240 \end{pmatrix}^T \; [m, -]
$$



Obliczenie sił węzłowych (w tym reakcji):

$$
\boldsymbol{W} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{P}
$$

$$
100 \begin{pmatrix} 48 & 24 & -48 & 24 & 0 & 0 \\ 24 & 16 & -24 & -8 & 0 & 0 \\ -48 & -24 & 54 & -18 & -6 & 6 \\ 24 & 8 & -18 & 24 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9.20 \\ -6.60 \\ 20.0 \\ -17.4 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Tu należy narysować reakcje i sprawdzić czy rozwiązanie spełnia równania równowagi oraz czy przemieszczenia są sensowne.

Siły na końcach elementów (przywęzłowe):

$$\boldsymbol{K}^{el}\boldsymbol{u}^{el} - \boldsymbol{P}^{el} = \boldsymbol{Q}^{el}$$

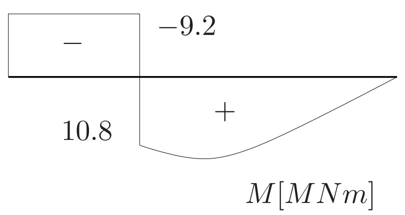
Element 1:

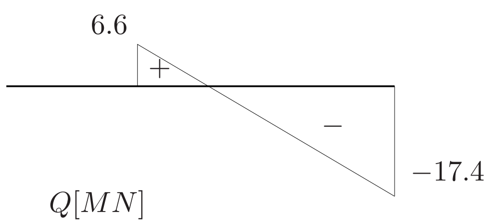
$$100\begin{pmatrix} 48 & 24 & -48 & 24 \\ 24 & 16 & -24 & -8 \\ -48 & -24 & 48 & -24 \\ 24 & 8 & -24 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} * \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9.20 \\ 0 \\ 9.20 \end{pmatrix}$$

Element 2:

$$100\begin{pmatrix} 6 & 6 & -6 & 6 \\ 6 & 8 & -6 & 4 \\ -6 & -6 & 6 & -6 \\ 6 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} * \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6.60 \\ 10.8 \\ -17.4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Na tej podstawie wykresy momentu zginającego i siły poprzecznej





Na zakończenie należy sprawdzić równowagę w węzłach.

OBLICZANIE WSKAŹNIKA BŁĘDU JAWNĄ METODĄ RESIDUALNĄ

Zagadnienie brzegowe:

$$\begin{cases} -AEu'' = q & \forall x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0.01 \end{cases}$$

$AE = 1000\text{kN}$
$q = AE(6x-4)/100$

Rozwiązanie MES (odcinkowo liniowe)

x_i	0	0.5	1
u_i	0	0.00375	0.01

Residuum we wnętrzach elementów $R = q + AEu_h'' = 60x - 40\ [\text{kN/m}]$

Wskaźniki błędu:

$$\eta_1 = h_1 \sqrt{\int_0^{1/2} R^2\, \mathrm{d}x} = 9.344\,\text{kNm}^{\frac{1}{2}}$$

$$\eta_2 = h_2 \sqrt{\int_{1/2}^{1} R^2\, \mathrm{d}x} = 3.536\,\text{kNm}^{\frac{1}{2}}$$

Są to duże wartości w porównaniu z $l||q||_0 = 20\,\text{kNm}^{\frac{1}{2}}$

Ponieważ (wyjątkowo) znane jest rozwiązanie dokładne:
$u(x) = x^2(2-x)/100$

można obliczyć błąd $e(x) = u(x) - u_h(x)\,[\text{m}]$

$$e(x) = \begin{cases} [x^2(2-x) - \frac{3}{4}x]/100 & dla\ \ x \in [0, 0.5] \\ [x^2(2-x) - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}]/100 & dla\ \ x \in [0.5, 1] \end{cases}$$

oraz jego (semi)normę energetyczną ($\sqrt{\int AE(e')^2\, \mathrm{d}x}$) w elementach:
$$||e||_{E,(0,0.5)} = 0.08165\,(\text{kNm})^{\frac{1}{2}}, ||e||_{E,(0.5,1)} = 0.02041\,(\text{kNm})^{\frac{1}{2}}$$

PREZENTACJA OBLICZANIA WSKAŹNIKA BŁĘDU METODĄ WYGŁADZANIA