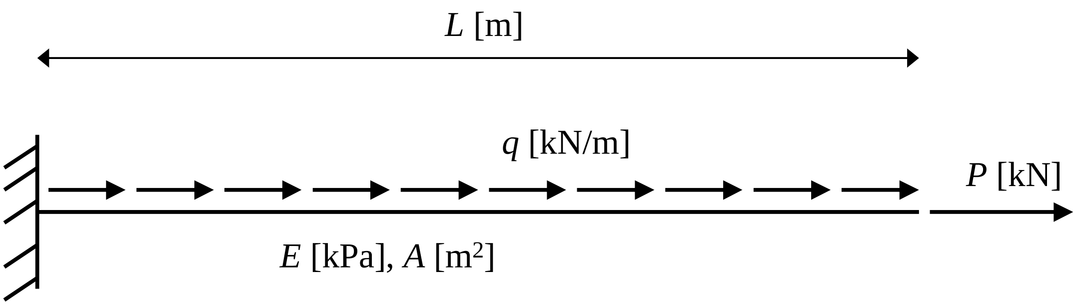
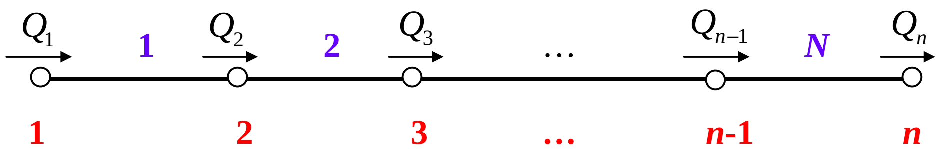
Ćwiczenie 1a: Statyka rozciąganego pręta - interpolacja liniowa

Dany jest pręt o długości L, zamocowany na lewym końcu, obciążony w sposób jednorodny ciągły (obciążenie q) i skupiony (siła P na prawym swobodnym końcu). Pręt wykonany jest z materiału sprężystego (moduł E), o prostokątnym przekroju poprzecznym (wymiary b i d).

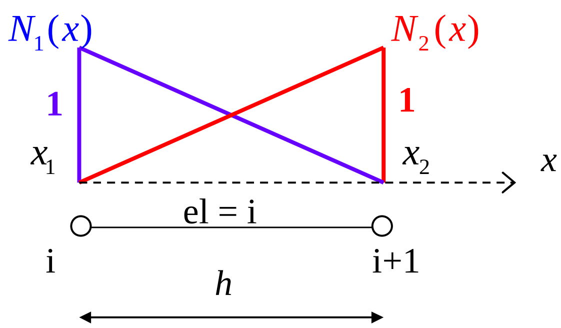


Zastosować MES do znalezienia przemieszczeń Q i rozkładu sił podłużnych pręta S.

Dyskretyzacja MES: n węzłów, N elementów, $N_{ss} = n$ stopni swobody (przemieszczenia poziome węzłów).



Aproksymacja MES: dwie linowe funkcje kształtu, $N_1(x)$, $N_2(x)$, o własnościach $N_1(x_1)=1$, $N_1(x_2)=0$ oraz $N_2(x_1)=0$, $N_2(x_2)=1$



Wzór na macierz sztywności elementu

$$\underset{[2\times 2]}{\boldsymbol{K}^e} = E \cdot A \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left(\boldsymbol{B}^e\right)^T \boldsymbol{B}^e dx \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{B}^e$ - macierz pochodnych funkcji kształtu

$$\underset{[1\times 2]}{\boldsymbol{B}^e} = \begin{bmatrix} \dfrac{dN_1(x)}{dx} & \dfrac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Wzór na wektor obciążenia elementu (zastępników obciążenia elementowego)

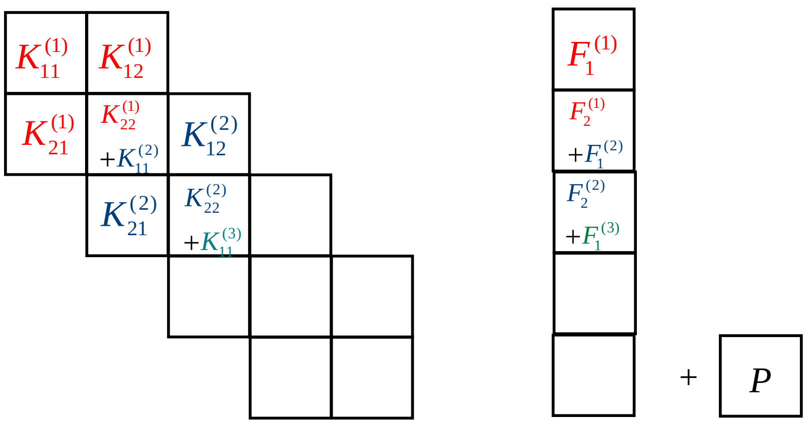
$$\underset{[2\times 1]}{\boldsymbol{F}^e} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\boldsymbol{N}^e \right)^T q \cdot dx \tag{3}$$

gdzie $\boldsymbol{N}^e$ - macierz funkcji kształtu elementu

$$\underset{[1\times 2]}{\boldsymbol{N}^e} = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \tag{4}$$

oraz q - obciążenie ciągłe (stałe lub zmienne) wzdłuż elementu.

Schemat agregacji globalnej macierzy sztywności $\underset{[N_{ss}\times N_{ss}]}{\boldsymbol{K}}$ i globalnego wektora obciążenia $\underset{[N_{ss}\times 1]}{\boldsymbol{F}}$ (z uwzględnieniem obciążenia skupionego P)



Uwzględnienie warunków brzegowych $Q_1 = 0$

Rozwiązanie układu równań (wyznaczenie przemieszczeń węzłowych)

$$\underset{[N_{ss}\times 1]}{\boldsymbol{Q}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F} \tag{5}$$

Wyznaczenie węzłowych sił podłużnych S dla każdego elementu

$$\underset{[2\times 1]}{\boldsymbol{S}^e} = \boldsymbol{K}^e \cdot \boldsymbol{Q}^e - \boldsymbol{F}^e \tag{6}$$

Wyznaczenie przemieszczenia i siły podłużnej w dowolnym punkcie elementu

$$u(x) = N_1(x) \cdot Q_1^e + N_2(x) \cdot Q_2^e \tag{7}$$

$$s(x) = E \cdot A \cdot \left(\frac{dN_1(x)}{dx} \cdot Q_1^e + \frac{dN_2(x)}{dx} \cdot Q_2^e \right) \tag{8}$$

Zadanie

Przyjąć dane: L = 1 m, E = 207 GPa, b = d = 5 cm, q = $10e2 \cdot x$ kN/m (obciążenie rozciągające, liniowo zmienne), P = - 1e2 kN (siła ściskająca) Wykonać obliczenia komputerowe w programie Matlab dla dowolnej liczby elementów. Wyświetlić wyniki dla N = 10.

Wskazówki

W programie w Matlabie wykorzystać pętlę *for* oraz następujące funkcje:

- do obliczeń symbolicznych: *syms*, *diff*, *int*, *subs*, *eval*
- do obliczeń macierzowych: *zeros*
- do grafiki: *figure*, *plot*, *title*, *axis*, *xlabel*, *ylabel*, *legend*, *hold*
- do obliczeń MES (z przybornika Calfem): *assem*, *solveq*.

Składnia funkcji *assem*: [K,F]=assem(edof,K,Ke,F,Fe)
Składnia funkcji *solveq*: [Q,R]=solveq(K,F,bc)

Schemat programu:

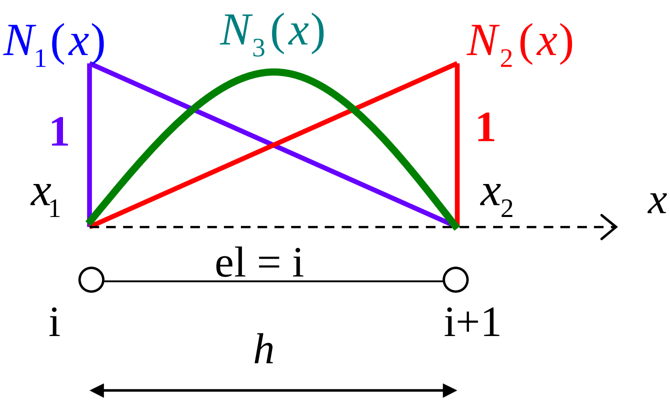
- otworzyć nowy plik, wyczyścić pamięć (*clear all*), okno Command Window (*clc*) oraz zamknąć okna graficzne (*close all*),
- zdefiniować zmienną symboliczną x,
- zdefiniować dane do zadania (E, A, L, q, P),
- określić liczbę elementów (N)
- obliczyć: liczbę węzłów (n), liczbę stopni swobody (Nss), długość elementu (h)
- wygenerować współrzędne węzłów (X)
- wyzerować globalną macierz sztywności (K)
- wyzerować globalny wektor obciążeń (F)
- wpisać wartość siły skupionej do odpowiedniego elementu wektora F
- uruchomić pętlę po elementach (i)
  - określić współrzędną pierwszego węzła i-tego elementu (x1)
  - określić współrzędną drugiego węzła i-tego elementu (x2)
  - zapisać wzór na pierwszą funkcję kształtu (N1)
  - zapisać wzór na drugą funkcję kształtu (N2)
  - obliczyć wektor funkcji kształtu (Ne) [1x2]
  - obliczyć macierz pochodnych funkcji kształtu (Be) [1x2]
  - obliczyć macierz sztywności elementu (Ke) [2x2]
  - obliczyć wektor obciążenia elementu (Fe) [2x1]
  - określić wektor [1x3] zawierający: numer elementu oraz numery jego ss (edof)
  - dokonać agregacji
- zamknąć pętlę po elementach

- określić wektor warunków brzegowych (bc) [1x2] - numer zablokowanego ss i wartość przemieszczenia
- rozwiązać układ równań MES (wyznaczyć przemieszczenia i reakcje)
- otworzyć pierwsze okno graficzne
- narysować przemieszczenia
- wstawić tytuł wykresu, umieścić legendę i opisy osi x i y
- przetestować działanie programu dla różnej liczby elementów N
- otworzyć drugie okno graficzne, włączyć funkcję *hold*
- zdefiniować liczbę punktów pośrednich w elemencie M = 10
- uruchomić pętlę po elementach
    - powtórzyć proces obliczenia macierzy sztywności elementu (z poprzedniej pętli)
    - wybranie przemieszczeń węzłowych i-tego elementu (Qe)
    - obliczenie sił przywęzłowych (Se)
    - generacja punktów pośrednich w elemencie (xe)
    - obliczenie wartości siły podłużnej w punktach pośrednich
    - rysunek siły podłużnej w elemencie
- zamknąć pętlę
- wstawić tytuł wykresu oraz opisy osi x i y
- przetestować działanie programu

Ćwiczenie 1b: Statyka rozciąganego pręta - interpolacja kwadratowa

Program w obecnej formie (dla statyki) rozszerzyć o interpolację kwadratową w elemencie skończonym za pomocą hierarchicznych funkcji kształtu $N_1(x)$, $N_2(x)$ i $N_3(x)$, gdzie $N_1(x)$ i $N_2(x)$ - liniowe funkcje kształtu z poprzedniego wariantu, a $N_3(x)$ - "bąbelkowa" kwadratowa funkcja kształtu:

$$N_3(x) = (x - x_1)(x - x_2) \tag{9}$$

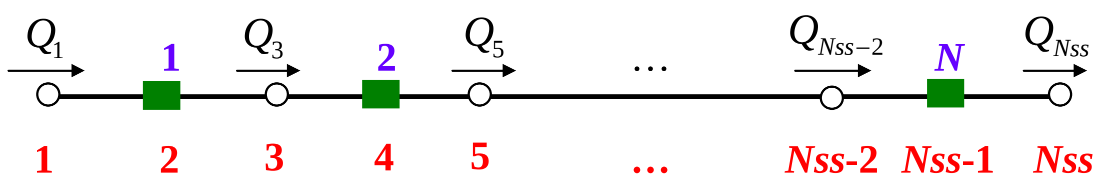


Aproksymacja w elemencie wygląda następująco (α_3^e - dodatkowy stopień swobody):

$$u(x) = N_1(x) \cdot Q_1^e + N_2(x) \cdot Q_2^e + N_3(x) \cdot \alpha_3^e \tag{10}$$

$$s(x)=E\cdot A\cdot\left(\frac{dN_1(x)}{dx}\cdot Q_1^e+\frac{dN_2(x)}{dx}\cdot Q_2^e+\frac{dN_3(x)}{dx}\cdot \alpha_3^e\right) \tag{11}$$

Zmiany w algorytmie sprowadzają się do większych rozmiarów macierzy ($[3\times3]$) i wektorów elementowych ($[1\times3]$ lub $[3\times1]$). Natomiast na poziomie całego układu konieczne jest wprowadzenie dodatkowego matematycznego (bez interpretacji fizycznej) stopnia swobody α w środku każdego z elementów.



Wskazówki
Wykonać kopię pliku, w którym znajduje się poprzednio napisany i poprawnie działający program dla interpolacji liniowej (za pomocą dwóch liniowych funkcji kształtu). Kopię pliku zapisać pod odpowiednią inną nazwą i dokonać niezbędnych zmian. Wykonać obliczenia dla określonej liczby elementów N, porównać rezultaty obliczeń dla zadania 1a i 1b.

Ćwiczenie 1c: Dynamika rozciąganego pręta - drgania swobodne

Pręt z poprzedniego zadania poddany jest podłużnym drganiom swobodnym (bez obciążenia zewnętrznego). Znaleźć cztery pierwsze częstotliwości drgań własnych oraz odpowiadające im postacie drgań. Obliczenia wykonać dla dwóch wariantów rozłożenia masy pręta - masy skupionej oraz rozłożonej w sposób ciągły.

W analizie MES wykorzystywana jest najczęściej konsystentna (pełna) macierz mas, obliczania według wzoru (dla elementu)

$$\underset{[2\times2]}{\mathbf{M}^e}=\rho\cdot A\cdot\int_{x_1}^{x_2}\left(\mathbf{N}^e\right)^T\mathbf{N}^e dx \tag{12}$$

gdzie ρ oznacza gęstość masy elementu (pręta). Macierze mas poszczególnych elementów podlegają agregacji podobnie jak macierze sztywności.

Oprócz macierzy konsystentnej (czyli posiadającej elementy pozaprzekątniowe), można stosować diagonalne macierze mas, wynikające z punktowego rozłożenia masy (podobnie jak w zagadnieniach mechaniki budowli)

$$\underset{[2\times2]}{\mathbf{M}^{pun}}=\rho\cdot A\cdot\frac{h^e}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \tag{13}$$

Agregacja macierzy sztywności i mas prowadzi do uogólnionego problemu własnego na poziomie całego układu (pręta)

$$\left(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{Q} = 0 \tag{14}$$

gdzie ω - częstość drgań własnych. Z częstości drgań własnych można wyliczyć częstotliwość f oraz okres drgań własnych T

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{15}$$

Zadania

Dla pręta z zadania 1a (interpolacja liniowa) przyjąć gęstość masy $\rho = 7500\,\frac{kg}{m^3}$. Do istniejącego programu dopisać procedury znajdujące pierwsze częstotliwości i postacie drgań własnych, w oparciu o macierze mas MES (pełne) oraz skupione. Narysować postacie drgań dla wyników MES.

Wskazówki

Obliczenia dla macierzy mas można zorganizować w tej samej pętli, co dla macierzy sztywności - przed pętlą należy przygotować (wyzerować) odpowiednie globalne macierze

```
Mkons = zeros(
Mdiag = zeros(
```

a następnie wewnątrz pętli zbudować odpowiednie macierze elementowe na podstawie wzorów (12), (13) i zagregować je do macierzy globalnych (funkcja *assem*).

W dalszej części programu, oprócz wymienionych poprzednio funkcji, wykorzystać do obliczeń MES (z przybornika Calfem) funkcję *eigen*, rozwiązującą uogólniony problem własny.
Składnia funkcji: **[L, Q]=eigen(K,M,bc)** (L - wartości własne, Q - wektory własne (w kolumnach), K - globalna macierz sztywności, M - globalna macierz mas, bc - **wektor** zawierający numery zablokowanych stopni swobody (czyli pierwsza kolumna macierzy bc dla obliczeń statycznych).

Dla macierzy pełnej:

```
[L1,Q1] = eigen(
Czest1 =
```

i dla macierzy diagonalnej

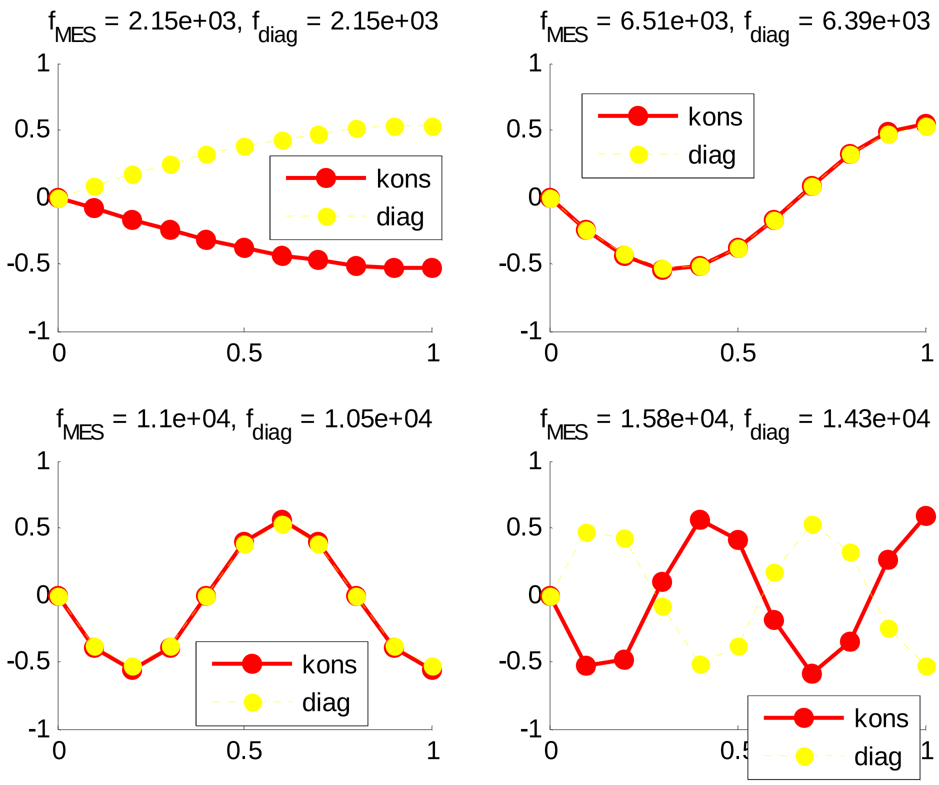
```
[L2,Q2] = eigen(
Czest2 =
```

Zmienne Czest1 i Czes2 oznaczają częstotliwości drgań własnych, które należy wyznaczyć ze wzoru (15).
Schemat części programu rysującej postacie drgań

```
figure(
liczba_postaci = min([4 N]);
```

```
for i = % pętla po liczbie postaci drgań
    subplot(2,2,i);
    title(['f_M_E_S = ' num2str(Czest1(i),3) ...
        ', f_d_i_a_g = ' num2str(Czest2(i),3)]);
    hold on
    plot( % wykres postaci drgań własnych Q1 dla macierzy Mkons
    plot( % wykres postaci drgań własnych Q2 dla macierzy Mdiag
    legend('kons','diag');
end
```

Przykładowe rozwiązanie - porównanie czterech pierwszych postaci drgań własnych



Ćwiczenie 1d: Dynamika rozciąganego pręta - drgania wymuszone

Proszę przyjąć obciążenie zależne od czasu i wykorzystać metodę Newmarka do wyznaczenia osiowych przemieszczeń w ustalonej chwili czasu. Narysować historię przemieszczenia w punkcie $x = L$. Obliczenia proszę wykonać dla wariantu aproksymacji z liniowymi funkcjami kształtu.

Równanie drgań wymuszonych swobodnych (bez tłumienia)

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(t) \tag{16}$$

gdzie

- $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,t)$ - odpowiedź układu,
- $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(t)$ - funkcja obciążenia,
- $\boldsymbol{M}$ - macierz mas,
- $\boldsymbol{K}$ - macierz sztywności.

Metoda Newmarka:

- dane wielkości początkowe: $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{v}_0 = \dot{\boldsymbol{u}}_0$, $\boldsymbol{a}_0 = \ddot{\boldsymbol{u}}_0 = \boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{f}_0 - \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_0\right)$
- wartość przyspieszenia:

$$\boldsymbol{a}_{k+1} = \left(\boldsymbol{M} + \frac{1}{2}\Delta t^2 \boldsymbol{K}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{f}_{k+1} - \boldsymbol{K}\cdot\left(\boldsymbol{u}_k + \Delta t\cdot\boldsymbol{v}_k\right)\right) \tag{17}$$

- wartość prędkości:

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{v}_k + \Delta t\cdot\boldsymbol{a}_{k+1} \tag{18}$$

- wartość przemieszczenia:

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{u}_k + \Delta t\cdot\boldsymbol{v}_k + \frac{1}{2}\Delta t^2\boldsymbol{a}_{k+1} \tag{19}$$

Proszę przyjąć następujące wielkości:

- częstotliwość obciążenia f : 0.8 najmniejszej częstotliwości dla drgań własnych obliczonej za pomocą MES dla pełnej macierzy mas,
- częstość obciążenia ω wg wzoru (15),
- obciążenie dynamiczne wg wzoru $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{A}_f \sin\left(\omega\cdot t\right)$, gdzie amplituda obciążenia $\boldsymbol{A}_f = \boldsymbol{F}$ - wektor obciążenia statycznego,
- czas początku procesu $t_0 = 0$,
- czas końca procesu $t_1 = 0.1$,
- liczba kroków czasowych $N_t = 500$,
- długość kroku czasowego wg wzoru $\Delta t = \dfrac{t_1 - t_0}{N_t - 1}$

Uwaga! W przypadku niestabilnych rezultatów, odpowiednio zmniejszyć czas końcowy lub zwiększyć liczbę kroków czasowych.

Schemat ostatniej części programu:

```
%% DRGANIA WYMUSZONE - METODA NEWMARKA

% uwzględnienie w macierzach mas i sztywności kin.war.brzeg.
Mkons(1,:) = []; % usunięcie z macierzy mas pierwszego wiersza
Mkons( % usunięcie z macierzy mas pierwszej kolumny
K( % usunięcie z macierzy sztywności pierwszego wiersza
K( % usunięcie z macierzy sztywności pierwszej kolumny

% definicja obciążenia
Czest_obc = %  częstotliwość obciążenia
W_obc = % częstość obciążenia
Amp_obc = F( % elementy wektora obciążenia od 2 do Nss
t_0 =  % czas początku procesu
t_1 =  % czas końca procesu
```

```
% dyskretyzacja osi czasu
Nt =  % liczba kroków czasowych
dt = % długość kroku czasowego

% metoda Newmarka
Q = zeros(Nss-1,1); % początkowe przemieszczenia węzłów od 2 do Nss
Qv = zeros( % początkowe prędkości węzłów od 2 do Nss
Qa = zeros( % początkowe przyspieszenia węzłów od 2 do Nss
Q_hist = zeros( % historia Nt przemieszczeń węzłów od 1 do Nss
q_hist = zeros( % historia Nt przemieszczeń węzła x = L
t_hist = zeros( % historia Nt zmian czasu


t_hist(1) = t_0;
q_hist(1) = Q(Nss-1);
Q_hist(1,:) = [0; Q]';
czas = t_0;

for i = % pętla po krokach czasowych od 2 do Nt
    czas = % czas w następnym kroku
    Qa_pop = Qa;
    Qv_pop = Qv;
    Q_pop = Q;
    Qa = % nowa wartość przyspieszenia
    Qv = % nowa wartość prędkości
    Q = % nowa wartość przemieszczenia

    t_hist(i) = % zapamiętanie aktualnego czasu
    q_hist(i) = % zapamiętanie przemieszczenia ostatniego węzła
    Q_hist(i,:) = [0;Q]'; % zapamiętanie przemieszczeń wszystkich węzłów
end

%animacja drgającego pręta
figure(4);
title('
xlabel('
ylabel('
for i = % pętla po krokach czasowych od 1 do Nt
    plot(% wykres przemieszczenia węzłowego w kolejnej chwili czasu (na osi
x: X, na osi y: i-ta kolumna macierzy Q
    axis([0 L min(min(Q_hist)) max(max(Q_hist))]); % stała skala wykresu
    pause(0.001)
end

% wykres historii przemieszczenia ostatniego węzła
figure(5);
plot(% wykres historii przemieszczeń ostatniego węzła
hold on
grid on
title('
legend('
xlabel('
ylabel('
```