Metody komputerowe w inżynierii lądowej
Instrukcja wykonania **ćwiczenia nr 3** – *MES w problemach nieliniowych 1D*
autor: Sławomir Milewski, PK WIL L5, slawek@L5.pk.edu.pl

---

1. Sformułowanie problemu

Należy rozwiązań za pomocą MES następujące nieliniowe równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = f, \quad x \in [a \quad b], \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \tag{1.1}$$

Aby można było zastosować model skończenie elementowy, niezbędne jest zapisanie odpowiedniej nieliniowej zasady wariacyjnej

$$-\int_a^b \frac{dv}{dx}\frac{dy}{dx}dx + \left[v\frac{dy}{dx}\right]_a^b + \int_a^b v \cdot y^2 \cdot \frac{dy}{dx}dx = \int_a^b v \cdot f \cdot dx \tag{1.2}$$

Przyjmując funkcję testową v tak, by na brzegu miała wartości zerowe $v(a) = v(b) = 0$, otrzymujemy ostateczną postać równania

$$-\int_a^b \frac{dv}{dx}\frac{dy}{dx}dx + \int_a^b v \cdot y^2 \cdot \frac{dy}{dx}dx = \int_a^b v \cdot f \cdot dx \tag{1.3}$$

Jest ono nadal nieliniowe, ze względu na drugi składnik lewej strony.

2. Aproksymacja MES

Linearyzacja równania (1.3) zostanie dokonana dopiero po jego aproksymacji MES, za pomocą liniowych funkcji kształtu. Obszar [*a*, *b*] dzielimy na N elementów skończonych o równej długości $h = \frac{b-a}{N}$ każdy, a co za tym idzie, $n = N+1$ węzłów $\boldsymbol{X} = \{X_i\ , i = 1, 2, ..., n\}$ (i stopni swobody Y_i). Na poziomie *i*-tego elementu skończonego $x^e \in [x_1 = X_i \quad x_2 = X_{i+1}]$, wprowadzamy interpolację funkcji próbnej y i funkcji testowej v

$$\begin{aligned} y(x) &= \left[N_1^e(x) \quad N_2^e(x)\right]\begin{bmatrix} Y_1^e \\ Y_2^e \end{bmatrix} = \boldsymbol{N}^e(x) \cdot \boldsymbol{Y}^e \\ v(x) &= \left[N_1^e(x) \quad N_2^e(x)\right]\begin{bmatrix} V_1^e \\ V_2^e \end{bmatrix} = \boldsymbol{N}^e(x) \cdot \boldsymbol{V}^e = \left(\boldsymbol{V}^e\right)^T \cdot \left(\boldsymbol{N}^e(x)\right)^T \end{aligned} \tag{2.1}$$

W podobny sposób zapisujemy pochodne obydwu funkcji

$$\frac{d}{dx}y(x)=\left[\frac{d}{dx}N_1^e(x) \quad \frac{d}{dx}N_2^e(x)\right]\begin{bmatrix}Y_1^e\\Y_2^e\end{bmatrix}=\frac{d}{dx}\boldsymbol{N}^e(x)\cdot\boldsymbol{Y}^e=\boldsymbol{B}^e(x)\cdot\boldsymbol{Y}^e$$
$$\frac{d}{dx}v(x)=\left[\frac{d}{dx}N_1^e(x) \quad \frac{d}{dx}N_2^e(x)\right]\begin{bmatrix}V_1^e\\V_2^e\end{bmatrix}=\frac{d}{dx}\boldsymbol{N}^e(x)\cdot\boldsymbol{V}^e=\left(\boldsymbol{V}^e\right)^T\cdot\left(\boldsymbol{B}^e(x)\right)^T \tag{2.2}$$

przy czym

$$N_1^e(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2} \quad , \quad N_2^e(x)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$
$$B_1^e(x)=\frac{1}{x_1-x_2} \quad , \quad B_2^e(x)=\frac{1}{x_2-x_1} \tag{2.3}$$

Powyższe wzory wstawiamy do (1.3). Korzystając z dowolności funkcji v, otrzymujemy ostatecznie (zmienna (x) została pominięta)

$$-\int_{x_1}^{x_2}\left(\boldsymbol{B}^e\right)^T\boldsymbol{B}^e\boldsymbol{Y}^e dx+\int_{x_1}^{x_2}\left(\boldsymbol{N}^e\right)^T\left(\boldsymbol{N}^e\boldsymbol{Y}^e\right)^2\boldsymbol{B}^e\boldsymbol{Y}^e dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\boldsymbol{N}^e\right)^T f\,dx \tag{2.4}$$

lub w zwięzłej formie

$$\boldsymbol{R}^e\left(\boldsymbol{Y}^e\right)=\boldsymbol{0} \tag{2.5}$$

gdzie $\boldsymbol{R}^e\left(\boldsymbol{Y}^e\right)$ nosi nazwę residuum równania (2.4) i jest zdefiniowane jako

$$\boldsymbol{R}^e\left(\boldsymbol{Y}^e\right)=-\int_{x_1}^{x_2}\left(\boldsymbol{B}^e\right)^T\boldsymbol{B}^e\boldsymbol{Y}^e dx+\int_{x_1}^{x_2}\left(\boldsymbol{N}^e\right)^T\left(\boldsymbol{N}^e\boldsymbol{Y}^e\right)^2\boldsymbol{B}^e\boldsymbol{Y}^e dx-\int_{x_1}^{x_2}\left(\boldsymbol{N}^e\right)^T\frac{j}{M}f\,dx \tag{2.6}$$

W przypadku gdy obciążenie jest „porcjowane” (podzielone na M przyrostów), w powyższym wzorze bierzemy j-ty przyrost obciążenia $\frac{j}{M}f$.

3. Linearyzacja metodą Newtona-Raphsona

Linearyzacja powyższego równania wymaga zastosowania procedury Newtona-Raphsona

$$\boldsymbol{K}_T^e\Delta\boldsymbol{Y}^e=-\boldsymbol{R}^e \tag{3.1}$$

gdzie występuje styczna macierz sztywności $\boldsymbol{K}_T^e$

$$\boldsymbol{K}_T^e=\frac{\partial\boldsymbol{R}^e}{\partial\boldsymbol{Y}^e}=-\int_{x_1}^{x_2}\left(\boldsymbol{B}^e\right)^T\boldsymbol{B}^e dx+\int_{x_1}^{x_2}\left(\boldsymbol{N}^e\right)^T\left(2\left(\boldsymbol{N}^e\boldsymbol{Y}^e\right)\boldsymbol{N}^e\left(\boldsymbol{B}^e\boldsymbol{Y}^e\right)+\left(\boldsymbol{N}^e\boldsymbol{Y}^e\right)^2\boldsymbol{B}^e\right)dx \tag{3.2}$$

Po obliczeniu dla każdego elementu macierzy stycznej (3.2) oraz wektora residualnego (2.6), należy dokonać ich agregacji do globalnego układu równań o postaci

$$\left(\boldsymbol{K}_T^e\right)^{(k)}\left(\Delta\boldsymbol{Y}^e\right)^{(k+1)}=\left(-\boldsymbol{R}^e\right)^{(k)} \tag{3.3}$$

w którym niewiadomą stanowi wektor przyrostów rozwiązania $\Delta\boldsymbol{Y}^e$ na kolejnym k+1 kroku iteracyjnym. Po jego wyznaczeniu należy zaktualizować samo rozwiązanie

$$\left(\boldsymbol{Y}^e\right)^{(k+1)}=\left(\boldsymbol{Y}^e\right)^{(k)}+\left(\Delta\boldsymbol{Y}^e\right)^{(k+1)} \tag{3.4}$$

Obliczenia prowadzimy tak długo, aż szacowany błąd obliczeń stanie się mniejszy niż założony dopuszczalny błąd

$$\varepsilon^{(k+1)}=\frac{\left\|\left(\Delta\boldsymbol{Y}^e\right)^{(k+1)}\right\|}{\left\|\left(\boldsymbol{Y}^e\right)^{(k+1)}\right\|}<\varepsilon_{dop} \tag{3.5}$$

Dodatkowo można założyć maksymalną dopuszczalną liczbę iteracji $k_{\max}$.

4. Rozwiązanie startowe

Ponieważ już do określenia pierwszego przyrostu rozwiązania potrzebna jest jego znajomość przy obliczaniu stycznej macierzy sztywności (3.2) oraz wektora residuum (2.6), niezbędne jest założenie początkowej postaci rozwiązania. Ta postać ma na ogół wpływ na zbieżność metody Newtona-Raphsona, także musi to być zrobione w odpowiedni sposób. Na ogół przyjmuje się w miarę proste rozwiązanie startowe $y^{(0)}(x)$ (np. wielomian, funkcja trygonometryczna), spełniające warunki brzegowe oryginalnego problemu (1.1), na podstawie którego oblicza się startowe rozwiązanie węzłowe $\boldsymbol{Y}^{(0)}$, czyli wartości $y^{(0)}(x)$ dla $x=\boldsymbol{X}$. W przypadku rozważanego zadania zostanie przyjęte rozwiązanie liniowe postaci

$$y^{(0)}(x)=Ax+B \tag{3.6}$$

gdzie współczynniki A i B należy wyliczyć z warunków

$$\begin{cases} y^{(0)}(a)=Aa+B=y_a \\ y^{(0)}(b)=Ab+B=y_b \end{cases} \tag{3.7}$$

czyli

$$A=\frac{y_b-y_a}{b-a},\quad B=y_a-Aa \tag{3.8}$$

5. Zakres ćwiczenia

Niekompletny program (do uzupełnienia w Matlabie) należy ściągnąć ze strony

http://www.L5.pk.edu.pl/~slawek/Met_Komp_2017/proj3.m

Należy przyjąć początek a i koniec obszaru b, maksymalną dopuszczalną liczbę iteracji $k_{\max}$ (np. 10), dopuszczalny błąd obliczeń (np. 10^{-6}), liczbę elementów skończonych N oraz liczbę przyrostów obciążenia M (na początek proszę przyjąć 1 przyrost).

Rozwiązanie ścisłe, spełniające wyjściowe równanie różniczkowe, należy przyjąć w postaci dowolnego wielomianu kwadratowego (paraboli). Na jego podstawie należy obliczyć postać funkcji prawej strony równania różniczkowego (funkcja *f*). Również wartości brzegowe y_a i y_b należy policzyć (w Matlabie) na bazie tego rozwiązania. Kolejne polecenia w pliku proszę uzupełniać zgodnie z komentarzami oraz odsyłaczami do wzorów z instrukcji.

Po skończonej pracy proszę uruchomić program. W razie problemów ze zbieżnością (gdy rozwiązanie MES nie przypomina rozwiązania ścisłego), proszę spróbować:

- zmniejszyć długość przedziału,
- zwiększyć liczbę elementów,
- zwiększyć liczbę przyrostów obciążenia (stopniowo, na 2, potem na 3).

Dalsze możliwe ścieżki postępowania (dla osób chcących mieć wyższą ocenę z projektu):

- zamiana obecnej wersji metody N-R na wersję początkową lub zmodyfikowaną,
- zastosowanie interpolacji hierarchicznej z dodatkową kwadratową funkcją kształtu,
- zamiana prawego warunku brzegowego z podstawowego na naturalny,
- sporządzenie wykresu zbieżności rozwiązania dla wybranego węzła.