Matematyka 2 w inżynierii lądowej – kolokwium #2, 09.09.2020

Proszę korzystać z aktualnej wersji materiałów:

https://www.l5.pk.edu.pl/~slawek/Matematyka2_2017/skrypt_2020.pdf

Zadanie 1 (5 pkt)

Dla funkcji $f(x)=e^x$, określonej w przedziale $[0 \quad 2]$, zbudować aproksymację postaci $p(x)=a$ oraz typu

a) dyskretnego, przyjmując dwa węzły, pokrywające się z końcami przedziału,
b) ciągłego.

Dla każdego z tych typów obliczyć odpowiedni średniokwadratowy błąd aproksymacji oraz obliczyć względny błąd ścisły w stosunku do oryginalnej wartości funkcji $f(x)$ w $x=1$.

Uwaga! Wszystkie całki oznaczone muszą być obliczone z zapisaniem całek nieoznaczonych i podstawieniem granic całkowania.

Rozwiązanie

a)

$$p(x)=a \quad \rightarrow \quad \varphi(x)=1, \quad m=1, \quad n=2 \quad \rightarrow \quad \left(0, e^0=1\right), \ \left(2, e^2=7.3891\right)$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\7.3891\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad C=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=2, \quad D=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}=8.3891$$

$$a=C^{-1}D=4.1945$$

$$\varepsilon_{sr}=\sqrt{\frac{1}{2}\left((4.1945-1)^2+(4.1945-7.3891)^2\right)}=3.1946$$

$$\varepsilon(x=1)=\left|\frac{e^1-4.1945}{e^1}\right|=0.5431$$

b)

$$p(x)=a \quad \rightarrow \quad \varphi(x)=1, \quad m=1$$

$$A=\int_0^2 \varphi(x)\varphi(x)\,dx=\int_0^2 1dx=x\Big|_0^2=2, \quad B=\int_0^2 f(x)\varphi(x)\,dx=\int_0^2 e^x dx=e^x\Big|_0^2=e^2-1=6.3891$$

$$a=A^{-1}B=3.1945$$

$$\varepsilon_{sr}=\sqrt{\frac{1}{2}\int_0^2\left(e^x-3.1945\right)^2 dx}=\sqrt{\frac{1}{2}\int_0^2 e^{2x}-6.3891e^x+10.2050dx}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^2-6.3891e^x\Big|_0^2+10.2050\,x\Big|_0^2\right)}=1.7873$$

$$\varepsilon(x=1)=\left|\frac{e^1-3.1945}{e^1}\right|=0.1752$$