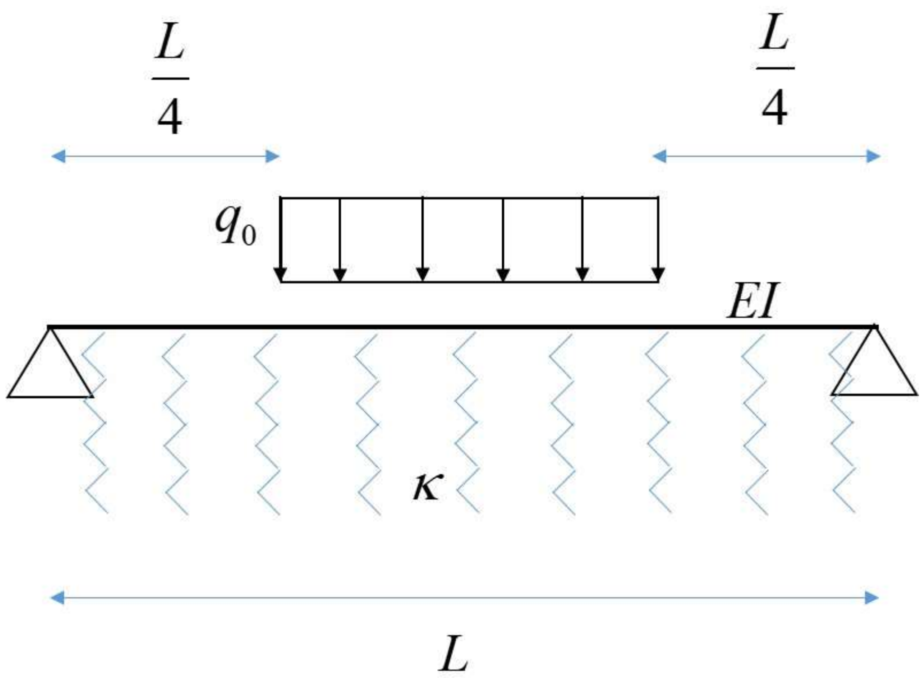
Proszę korzystać z aktualnej wersji materiałów:

https://www.l5.pk.edu.pl/~slawek/Matematyka2_2017/skrypt_2020.pdf

Zadanie 2 (5 pkt)

Dla belki o długości L i sztywności na zginanie EI, obustronnie swobodnie podpartej, umiejscowionej na podłożu sprężystym (belka Winklera) i obciążonej jak na rys. poniżej, znaleźć funkcje: przemieszczeń, momentu zginającego oraz siły poprzecznej, stosując szeregi Fouriera. Wyznaczyć odpowiednie współczynniki Fouriera, z ich pomocą zapisać wszystkie powyższe funkcje jako sumy $k = 1,2,\ldots, K$ składników szeregu, a także obliczyć wartości tych funkcji dla punktu środkowego belki i najniższej częstości, dającej niezerowe rozwiązanie.



Równanie różniczkowe belki na podłożu sprężystym: $EI \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} + \kappa \cdot y(x) = q(x)$, gdzie κ oznacza stałą sprężystości podłoża.

Uwaga! Wszystkie całki oznaczone muszą być obliczone z zapisaniem całek nieoznaczonych i podstawieniem granic całkowania.

Rozwiązanie

aproksymacje Fouriera obciążenia i rozwiązania (ugięcia)

$$q(x) = \sum_{k=1}^{K} q_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad y(x) = \sum_{k=1}^{K} y_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

wyznaczenie współczynników obciążenia

$$q_k = \frac{2}{L}\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3}{4}L} q_0 \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = -\frac{2q_0}{L}\frac{L}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\Bigg|_{\frac{L}{4}}^{\frac{3}{4}L} = -\frac{2q_0}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{3k\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)$$

wyznaczenie współczynników ugięcia – podstawienie aproksymacji Fouriera dla $q(x)$ i $y(x)$ do równania ugięcia belki

$$EI \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} + \kappa \cdot y(x) = q(x)$$

$$EI \frac{k^4 \pi^4}{L^4} \cdot \sum_{k=1}^{K} y_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + \kappa \cdot \sum_{k=1}^{K} y_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = \sum_{k=1}^{K} q_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

czyli

$$EI \frac{k^4 \pi^4}{L^4} \cdot y_k + \kappa \cdot y_k = q_k, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

stąd

$$y_k = \frac{q_k}{EI \frac{k^4 \pi^4}{L^4} + \kappa} = \frac{-\frac{2q_0}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{3k\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)}{EI \frac{k^4 \pi^4}{L^4} + \kappa} = \frac{-\frac{2q_0}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{3k\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)}{\frac{EIk^4 \pi^4 + \kappa L^4}{L^4}} =$$

$$= \frac{-2q_0 L^4 \left(\cos\left(\frac{3k\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)}{k\pi\left(EIk^4 \pi^4 + \kappa L^4\right)}, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

wyznaczenie funkcji ciągłych

$$y(x) = \sum_{k=1}^{K} y_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = -\frac{2q_0 L^4}{\pi} \sum_{k=1}^{K} \frac{\left(\cos\left(\frac{3k\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)}{k\left(EIk^4 \pi^4 + \kappa L^4\right)} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

$$M(x) = EI \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{k=1}^{K} k^2 y_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = -2EI\pi q_0 L^2 \sum_{k=1}^{K} \frac{k\left(\cos\left(\frac{3k\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)}{EIk^4 \pi^4 + \kappa L^4} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

$$T(x) = -EI \frac{\pi^3}{L^3} \sum_{k=1}^{K} k^3 y_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = 2EI\pi^2 q_0 L \sum_{k=1}^{K} \frac{k^2\left(\cos\left(\frac{3k\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)}{EIk^4 \pi^4 + \kappa L^4} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

wyznaczenie wartości da x = L/2 i k = 1.

$$y\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2} q_0 L^4}{\pi\left(EI\pi^4 + \kappa L^4\right)}$$

$$M\left(x = \frac{L}{2}\right) = 2\sqrt{2} \frac{EI\pi q_0 L^2}{EI\pi^4 + \kappa L^4}$$

$$T\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0$$