

TENSORY

1 Tensory drugiego rzędu jako odwzorowanie liniowe

Rozważmy zbiór Lin^n wszystkich liniowych odwzorowań wektora w wektor gdzie oba wektory należą do $\mathbb{E}^n$ ($\mathbb{E}^n$ - n wymiarowa przestrzeń Euklidesowa). Takie odwzorowanie może być zapisane jako:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \mathbf{A} \in \text{Lin}^n \quad (1)$$

Elementy zbioru Lin^n są nazywane tensorami drugiego rzędu.

Liniowość przekształcenia [1] jest wyrażana poprzez poniższe związki:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \mathbf{A} \in \text{Lin}^n, \quad (2)$$

$$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{A} \in \text{Lin}^n, \quad (3)$$

Definiujemy:

- iloczyn tensora przez liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$ jako:

$$(\alpha \mathbf{A})\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\alpha \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n, \quad (4)$$

- sumę dwóch tensorów $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ jako:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n, \quad (5)$$

Przyjmując $\alpha = -1$ otrzymamy definicję tensora przeciwnego:

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A} \quad (6)$$

Zerowy tensor $\mathbf{0}$ definiujemy w następujący sposób:

$$\mathbf{0}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n, \quad (7)$$

wówczas elementy zbioru Lin^n spełniają postulaty przestrzeni wektorowej.

Własności tensorów II rzędu można podsumować w następujący sposób:

- * $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- * $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$,
- * $\mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$
- * $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$
- * $\alpha(\beta \mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$
- * $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$
- * $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$
- * $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \text{Lin}^n, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2 Reprezentacja tensora w bazie, iloczyn tensorowy

Iloczyn tensorowy odgrywa istotną rolę ponieważ pozwala zbudować tensor II rzędu z dwóch wektorów. Rozważmy dwa wektory należące do przestrzeni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$. Dowolny wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ może być odwzorowany na inny wektor $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) \in \mathbb{E}^n$. To odwzorowanie jest oznaczone symbolem $\otimes$. Stąd:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n \quad (8)$$

Można pokazać, że powyższe odwzorowanie spełnia warunki odwzorowania liniowego stąd uprawnione są poniższe wzory:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a}[\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})] = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{y}, \quad (9)$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\alpha \mathbf{x}) = \mathbf{a}[\mathbf{b} \cdot (\alpha \mathbf{x})] = \alpha(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x}, \quad (10)$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Z powyższego wynika, że iloczyn tensorowy dwóch wektorów jest pewnym tensorem II rzędu. Co więcej zachodzą związki:

$$\mathbf{c} \otimes (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{b}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}, \quad (11)$$

$$(\alpha \mathbf{a}) \otimes (\beta \mathbf{b}) = \alpha\beta(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}), \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

By udowodnić powyższe wzory wystarczy przekształcić dowolny wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ przez obie strony powyższych równań (wzory [8, 5]). Po przekształceniach dostajemy:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \otimes (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{x} &= \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{c}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) = \\ &= (\mathbf{c} \otimes \mathbf{a})\mathbf{x} + (\mathbf{c} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} [(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c}]\mathbf{x} &= (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{c})\mathbf{x} + (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c})\mathbf{x} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{c})\mathbf{x} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (\alpha \mathbf{a}) \otimes (\beta \mathbf{b})\mathbf{x} &= (\alpha \mathbf{a})(\beta \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) \\ &= \alpha\beta \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) = \alpha\beta(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n \end{aligned} \quad (15)$$

Dla lewostronnego odwzorowania przez tensor $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$

$$\mathbf{y}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n \quad (16)$$

Jak zostało pokazane zbiór wszystkich tensorów II rzędu stanowi przestrzeń wektorową. Poniżej zostanie pokazane, że baza tej przestrzeni może być zbudowana z wykorzystaniem iloczynu tensorowego.

Do reprezentowania tensorów II rzędu wykorzystamy następujące iloczyny tensorowe wektorów bazowych: $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Uwzględniając te bazy tensor $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$ może być zapisany jako:

$$\mathbf{A} = A^{ij}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = A_{ij}\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = A^i_{\cdot j}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = A_{\cdot i}^j\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \quad (17)$$

Natomiast składowe wyrażą się wzorami:

$$\begin{aligned} A^{ij} &= \mathbf{g}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j, & A_{ij} &= \mathbf{g}_i \mathbf{A} \mathbf{g}_j \\ A^i_{\cdot j} &= \mathbf{g}^i \mathbf{A} \mathbf{g}_j, & A_{i\cdot}^j &= \mathbf{g}_i \mathbf{A} \mathbf{g}^j, \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

Kropka w powyższych wzorach jest używana do wyraźnego określenia pozycji danego indeksu. Wyjątkowo ważny jest tensor jednostkowy $\mathbf{I}$ zdefiniowany poprzez relację:

$$\mathbf{I} \mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n \quad (19)$$

Korzystając ze związków [17,18] i $g^{ij} = g^{ji} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$, $g_{ij} = g_{ji} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ składowe tensora jednostkowego mogą być wyrażone jako:

$$\mathbf{I}^{ij} = \mathbf{g}^i \mathbf{I} \mathbf{g}^j = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = g^{ij}, \quad \mathbf{I}_{ij} = \mathbf{g}_i \mathbf{I} \mathbf{g}_j = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = g_{ij}, \quad (20)$$

$$\mathbf{I}^i_{\cdot j} = \mathbf{I}_{i\cdot}^j = \mathbf{I}_j^i = \mathbf{g}^i \mathbf{I} \mathbf{g}_j = \mathbf{g}_i \mathbf{I} \mathbf{g}^j = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_j^i \quad (21)$$

gdzie $i, j = 1, 2, \dots, n$.

$$\mathbf{I} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad (22)$$

Można pokazać, że składowe tensora jednostkowego charakteryzują metryczne własności przestrzeni euklidesowej i są nazywane współczynnikami metryki. Dlatego tensor jednostkowy często określa się jako tensor metryczny.

W przypadku bazy ortonormalnej tensor jednostkowy można przedstawić jako:

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad (23)$$

3 Transformacja tensora przy zmianie bazy

Poniżej zostanie uściślone w jaki sposób komponenty wektorów i tensorów transformują się przy zmianie bazy. Niech $\mathbf{x}$ będzie wektorem a $\mathbf{A}$ tensorem II rzędu. Dostajemy:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{g}_i = x_i \mathbf{g}^i \quad (24)$$

$$\mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = A_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = A^i_{\cdot j} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = A_{i\cdot}^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j. \quad (25)$$

Wykorzystując zależności: $\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j$, $\mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j$ i $x^i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}^i$, $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}_i$ dostajemy:

$$x^i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}^i = \mathbf{x} \cdot (g^{ij} \mathbf{g}_j) = x_j g^{ji}, \quad x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}_i = \mathbf{x} \cdot (g_{ij} \mathbf{g}^j) = x^j g_{ji} \quad (26)$$

$$A^{ij} = \mathbf{g}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j = \mathbf{g}^i \mathbf{A} (g^{jk} \mathbf{g}_k) = (g^{il} \mathbf{g}_l) \mathbf{A} (g^{jk} \mathbf{g}_k) = A^i_{\cdot k} g^{kj} = g^{il} A_{lk} g^{kj} \quad (27)$$

$$A_{ij} = \mathbf{g}_i \mathbf{A} \mathbf{g}_j = \mathbf{g}_i \mathbf{A} (g_{jk} \mathbf{g}^k) = (g_{il} \mathbf{g}^l) \mathbf{A} (g_{jk} \mathbf{g}^k) = A_{i\cdot}^k g_{kj} = g_{il} A^{lk} g_{kj}, \quad (28)$$

gdzie $i, j = 1, 2, \dots, n$

Prawa transformacyjne zapisane powyżej dotyczą nie tylko bazy dualnej ale każdej innej.

4 Operacje na tensorach II rzędu

Tensory II rzędu podlegają dobrze znanym operacjom wynikającym z tego, że tworzą one przestrzeń wektorową. Jednak w przeciwieństwie do konwencjonalnych wektorów w przestrzeni euklidesowej można dla nich zdefiniować dodatkowe operacje takie jak transpozycja, złożenie, odwrotność.

4.1 Złożenie tensorów

Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Lin}^n$ Tensor $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ jest nazywany złożeniem tensorów $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jeżeli zachodzi:

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n. \quad (29)$$

Dla odwzorowania z lewej strony można napisać

$$\mathbf{y}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{yA})\mathbf{B}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n. \quad (30)$$

Wykorzystując związki $(\mathbf{yA}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{Ax})$ i [29] można udowodnić powyższe wzory w następujący sposób:

$$\mathbf{y}(\mathbf{AB})\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot [(\mathbf{AB})\mathbf{x}] = \mathbf{y} \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x})] = (\mathbf{yA}) \cdot (\mathbf{B}\mathbf{x}) = [(\mathbf{yA})\mathbf{B}] \cdot \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n \quad (31)$$

Złożenie tensorów jest w ogólnym przypadku nieprzemienne $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Jeżeli zachodzi związek $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ to mówi się, że tensory $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ komutują.

Oprócz złożenia dla tensorów II rzędu zachodzą następujące związki:

$$\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0A} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \quad (32)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}, \quad (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}, \quad (33)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \quad (34)$$

W przypadku gdy tensory $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ są zdefiniowane jako iloczyn tensorowy wektorów odwzorowanie wektora $\mathbf{x}$ poprzez ich złożenie daje się zapisać jako:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})\mathbf{x} &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})[(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})\mathbf{x}] = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \\ &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{d})\mathbf{x} = [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}]\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n. \end{aligned} \quad (35)$$

4.2 Transpozycja tensora

Transpozycja tensora $\mathbf{A}^T$ jest zdefiniowana związkiem:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{xA}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n. \quad (36)$$

Przy czym zachodzi:

$$\mathbf{Ay} = \mathbf{yA}^T, \quad \mathbf{xAy} = \mathbf{yA}^T\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n. \quad (37)$$

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{x}) = \mathbf{y}\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y}\mathbf{A}^T), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n \quad (38)$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}. \quad (39)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \quad (40)$$

$$(\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (41)$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (42)$$

$$(\mathbf{AB})^T \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{x}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^T(\mathbf{x}\mathbf{A}) = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n. \quad (43)$$

Transpozycja iloczynu tensorowego dwóch wektorów wyraża się wzorem:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}. \quad (44)$$

4.3 Tensor odwrotny

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (45)$$

Tensor $\mathbf{A} \in \mathbf{Lin}^n$ nazywa się odwracalnym jeżeli istnieje tensor $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbf{Lin}^n$ spełniający warunek:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n \quad (46)$$

Tensor $\mathbf{A}^{-1}$ nazywamy tensorem odwrotnym do $\mathbf{A}$. Zbiór wszystkich tensorów odwrotnych takich, że $\mathbf{Inv}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{Lin}^n : \exists \mathbf{A}^{-1}\}$ stanowi podzbiór przestrzeni $\mathbf{Lin}^n$. Zachodzi przy tym:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n \quad (47)$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (48)$$

Operacje znajdowania tensora odwrotnego i transpozycji są przemienne:

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-T} \quad (49)$$

Tenor odwrotny do tensora będącego złożeniem odwracalnych tensorów $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ wyraża się wzorem:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad (50)$$

5 Iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny dwóch tensorów zdefiniowanych jako $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ i $\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$ jest dany wzorem:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}), \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{E}^n. \quad (51)$$

Zachodzi przy tym związek

$$\mathbf{c} \otimes \mathbf{d} : \mathbf{A} = \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{d}\mathbf{A}^T \mathbf{c}. \quad (52)$$

W notacji indeksowej możemy zatem zapisać:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij}B^{ij} = A^{ij}B_{ij} = A^i_j B^j_i = A^j_i B^i_j. \quad (53)$$

Podobnie jak w przypadku wektorów, iloczyn skalarny tensorów jest funkcją rzeczywistą mającą następujące własności:

$$* \mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{B} : \mathbf{A}$$

$$* \mathbf{A} : (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} : \mathbf{B} + \mathbf{A} : \mathbf{C}$$

$$* \alpha(\mathbf{A} : \mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A}) : \mathbf{B} = \mathbf{A} : (\alpha\mathbf{B}), \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{Lin}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$* \mathbf{A} : \mathbf{A} \geq 0 \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbf{Lin}^n, \quad \mathbf{A} : \mathbf{A} = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy jeśli } \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Norma tensora II rzędu może być zdefiniowana w następujący sposób:

$$\|\mathbf{A}\| = (\mathbf{A} : \mathbf{A})^{1/2}, \quad \mathbf{A} \in \mathbf{Lin}^n. \quad (54)$$

Wykorzystując iloczyn skalarny tensorów ślad tensora może być zapisany jako:

$$\text{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}. \quad (55)$$

Zachodzą przy tym związki

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (56)$$

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A} : \mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T : \mathbf{B}. \quad (57)$$

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA}). \quad (58)$$

6 Dekompozycja tensora II rzędu

Każdy tensor II rzędu może zostać zdekomponowany addytywnie na część symetryczną i antysymetryczną

$$\mathbf{A} = \text{sym}\mathbf{A} + \text{skew}\mathbf{A}, \quad (59)$$

gdzie

$$\text{sym}\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad \text{skew}\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T). \quad (60)$$

Tensory symetryczne i antysymetryczne tworzą podzbiory przestrzeni liniowej Lin^n zdefiniowane odpowiednio przez

$$\text{Sym}^n = \{\mathbf{M} \in \text{Lin}^n : \mathbf{M} = \mathbf{M}^T\}, \quad (61)$$

$$\text{Skew}^n = \{\mathbf{W} \in \text{Lin}^n : \mathbf{W} = -\mathbf{W}^T\}. \quad (62)$$

Można zauważyć, że te podzbiory tworzą przestrzenie wektorowe i mogą być traktowane jako podprzestrzenie przestrzeni Lin^n .

Tensor zerowy jest jedynym odwzorowaniem liniowym, które jest jednocześnie symetryczne i antysymetryczne. Stąd $\text{Sym}^n \cap \text{Skew}^n = \mathbf{0}$.

Dla każdego symetrycznego tensora $\mathbf{M} = M^{ij}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$ zachodzi $M^{ij} = M^{ji}$ ($i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$) zatem można zapisać

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n M^{ii}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^n M^{ij}(\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_i), \quad \mathbf{M} \in \text{Sym}^n. \quad (63)$$

Podobnie dla tensora antysymetrycznego:

$$\mathbf{W} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^n W^{ij}(\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j - \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_i), \quad \mathbf{W} \in \text{Skew}^n \quad (64)$$

z powyższych wzorów wynika, że baza przestrzeni Sym^n składa się z n tensorów $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i$ i $\frac{1}{2}n(n-1)$ tensorów $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_i$. Z tego wynika, że wymiar przestrzeni Sym^n jest równy $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Podobnie, dla przestrzeni Skew^n , baza tej przestrzeni składa się z $\frac{1}{2}n(n-1)$ tensorów postaci $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j - \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_i$. Stąd wymiar tej przestrzeni wynosi $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Korzystając ze wzorów : $\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j = e_{ijk}g\mathbf{g}^k$, $i, j = 1, 2, 3$, $\widehat{\mathbf{a} \times \mathbf{b}} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}^3$ można pokazać:

$$\mathbf{W} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^3 W^{ij}(\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j - \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_i) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^3 W^{ij}(\widehat{\mathbf{g}_j \times \mathbf{g}_i}) = \hat{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{W} \in \text{Skew}^3, \quad (65)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^3 W^{ij}\mathbf{g}_j \times \mathbf{g}_i = \frac{1}{2}W^{ij}\mathbf{g}_j \times \mathbf{g}_i = \frac{1}{2}\mathbf{g}_j \times (\mathbf{W}\mathbf{g}^j) \\ &= \frac{1}{2}W^{ij}e_{jik}g\mathbf{g}^k = g(W^{32}\mathbf{g}^1 + W^{13}\mathbf{g}^2 + W^{21}\mathbf{g}^3) \end{aligned} \quad (66)$$

Wynika stąd, że każdy antysymetryczny tensor w przestrzeni trójwymiarowej opisuje przekształcenie będące iloczynem wektorowym przez wektor $\mathbf{w}$ zwany wektorem osiowym??

$$\mathbf{W}\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W} \in \text{Skew}^3 \quad (67)$$

Tensor symetryczny i antysymetryczny są wzajemnie ortogonalne

$$\mathbf{M} : \mathbf{W} = 0, \quad \forall \mathbf{M} \in \text{Sym}^n, \forall \mathbf{W} \in \text{Skew}^n. \quad (68)$$

Rozkład na część sferyczną i dewiatorową. Dla każdego tensora II rzędu możemy napisać:

$$\mathbf{A} = \text{sph}\mathbf{A} + \text{dev}\mathbf{A} \quad (69)$$

gdzie

$$\text{sph}\mathbf{A} = \frac{1}{n}\text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I}, \quad \text{dev}\mathbf{A} = \mathbf{A} - \frac{1}{n}\text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I} \quad (70)$$

Podobnie jak tensory symetryczne i antysymetryczne tensory sferyczne i dewiatory tworzą podprzestrzeń ortogonalną przestrzeni Lin^n .

7 Przykład

Rozważmy tensor $\mathbf{T}$ zbudowany na wektorach $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad (71)$$

oraz obraz wektora $\mathbf{x}$ w przekształceniu opisywanym przez tensor $\mathbf{T}$.

Działanie tensora $\mathbf{T}$ na wektor $\mathbf{x}$ można zapisać w formie macierzowej

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}. \quad (72)$$

Zapisując powyższy związek poprzez składowe w bazie kartezjańskiej dostajemy:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ T_{n1} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$y_i = T_{ij} \cdot x_j. \quad (74)$$

Z definicji tensora $\mathbf{T}$ i iloczynu tensorowego mamy:

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{x} \circ \mathbf{b}) \quad (75)$$

$$y_i = a_i b_j x_j \quad (76)$$

Na podstawie [71], [76]

$$T_{ij} x_j = a_i b_j x_j \quad (77)$$

$$T_{ij} = a_i b_j \quad (78)$$

Uwaga: Wyprowadzając powyższe związki skorzystaliśmy z reprezentacji iloczynu skalarnego wektorów w bazie kartezjańskiej $\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = u_i v_i$.

Przyjmijmy do obliczeń

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_E \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_E \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_E \quad (79)$$

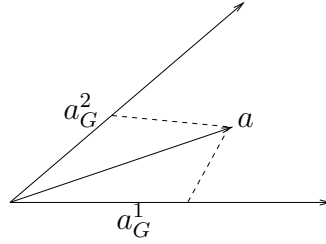
gdzie indeks E oznacza bazę kartezjańską.

Wtedy

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}_E \quad \mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (80)$$

(a dokładniej $\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, gdzie $T^{ij} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, uwaga: w bazie kartezjańskiej $T^{ij} = T_{ij}$).

Rozważmy reprezentację wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ i tensora $\mathbf{T}$ w bazie ukośnokątnej $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ gdzie $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\|\mathbf{g}_1\| = 1$, $\|\mathbf{g}_2\| = 1$



$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_E \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}_E \quad (81)$$

Wektor $\mathbf{a}$ w bazie $\{G\}$ reprezentujemy:

$$\mathbf{a} = a_G^1 \mathbf{g}_1 + a_G^2 \mathbf{g}_2 \quad (82)$$

Zapiszmy wektor $\mathbf{a}$ w bazie $\{E\}$

$$\mathbf{a} = a_E^1 \mathbf{e}_1 + a_E^2 \mathbf{e}_2. \quad (83)$$

Porównując obie strony i mnożąc je przez $\mathbf{g}_1$ i $\mathbf{g}_2$ dostajemy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \circ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_1 \circ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 \circ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \circ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_G^1 \\ a_G^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{g}_1 & \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{g}_2 & \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_E^1 \\ a_E^2 \end{bmatrix} \quad (84)$$

Macierz po lewej stronie nazywana jest macierzą metryczną g_{ij} .

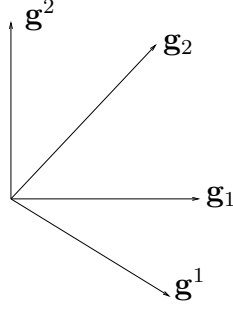
Otrzymanie współrzędnych a_G^1, a_G^2 wymaga formalnie odwrócenia macierzy g_{ij} . Można tego uniknąć korzystając z bazy dualnej do bazy $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ mianowicie z bazy $\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2$ takiej że:

$$\mathbf{g}^i \circ \mathbf{g}_j = \delta_j^i \quad (85)$$

wtedy równanie [84] przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_G^1 \\ a_G^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{g}^1 & \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{g}^2 & \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{g}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_E^1 \\ a_E^2 \end{bmatrix} \quad (86)$$

$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{g}^1 & \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{g}^2 & \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{g}^2 \end{bmatrix}$ – składowe odpowiednika tensora metrycznego - tensora równoległego przesunięcia, służącego przeliczeniu składowych pomiędzy bazami.



Z rozważań geometrycznych i warunku [85] można wyliczyć, że

$$\mathbf{g}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.7321 \end{bmatrix}_E \quad (87)$$

$$\mathbf{g}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}_E \quad (88)$$

Macierz transformacji składowych wektora z bazy E do G będzie miała postać:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -1.7321 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (89)$$

Zatem:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -0.4641 \\ 4 \end{bmatrix}_G \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2.7321 \\ 2 \end{bmatrix}_G \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.26795 \\ 2 \end{bmatrix}_G \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.4641 \\ -4 \end{bmatrix}_G \quad (90)$$

Policzmy współrzędne tensora $\mathbf{T}$ w bazie G . Zgodnie z prawem transformacji składowych tensora

$$\mathbf{T}_G = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T \quad \text{zatem} \quad \mathbf{T}_G = \begin{bmatrix} 1.26795 & -0.9282 \\ -10.9282 & 8.0 \end{bmatrix} \quad (91)$$

Takie same składowe tensora dostaniemy jeżeli skorzystamy z definicji tensora $\mathbf{T}$ jako iloczynu tensorowego wyrażanego przez wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ w bazie $\mathbf{G}$:

$$T_G^{\alpha\beta} = a_G^\alpha \cdot b_G^\beta \quad (92)$$

Pozostaje nam sprawdzić czy transformując wektor $\mathbf{x}$ opisany w bazie G przez tensor $\mathbf{T}$ opisany w bazie $\mathbf{G}$ dostaniemy uprzednio wyliczony wektor $\mathbf{y}$ w bazie G .

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{x} &= (T^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta)(x^\gamma g_\gamma) = T^{\alpha\beta} \cdot x^\gamma (\mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta) \mathbf{g}_\gamma = \\ &= T^{\alpha\beta} \cdot x^\gamma \cdot \mathbf{g}_\alpha (g_\beta \cdot g_\gamma) = T^{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \cdot x^\gamma g_\alpha = y^\alpha g_\alpha. \end{aligned} \quad (93)$$

Macierzowo związek [93] zapisujemy:

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \quad (94)$$

Pojawienie się w związku [93] tensora metrycznego $g_{\beta\gamma}$ jest związane z posługiwaniem się dowolnym układem współrzędnych (nie ortonormalnym).

Dla układu ortonormalnego:

$$g_{\beta\gamma} = \delta_{\beta\gamma} = \begin{cases} 1 & \beta = \gamma \\ 0 & \beta \neq \gamma \end{cases} \quad (95)$$