Wspomaganie obliczeń za pomocą programu MathCad

Definicja zmiennych

$e := 1$ $f := 1$ $g1 := 2$ $h := 8$

Aby zdefinowac znienną **e** wybierz z klawiatury kolejno:
e:1

Przykład dowolnego wyrażenia

$$\frac{e \cdot f^2 + 34 \cdot \frac{\ln(g1)}{2}}{10 \cdot e \cdot \left(e^2 - 4 \cdot h\right)} = -0.041237$$

Aby zdefinowac wyrażenie wybierz z klawiatury kolejno:
e*f^2+34*ln(g)/2/10*e*(e^2-4*h)
Wartość wyrażenia lub zmiennej uzyskujemy po naśsnieciu znaku **=**

Definicja funkcji f(x)

$a := 2$ $b := 3$ $c := -1$

$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Aby zdefiniować funkcję wybierz z klawiatury kolejno:
f(x):a*x^2+b*x+c

$f(x) \rightarrow 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1$

Aby "wyświetlić" wzór zdefiniowanej funkcji wybierz z klawiarury kolejno:
f(x) Ctr+Shift+ 2*x^2+3*x-1

$f(1) = 4$

Aby obliczyć wartość funkcji dla danej wartość wybierz z klawiatury kolejno:
f(1)=

Definicja pochodenj funkcji na podstwaie wzoru funkcji

$fp(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

Aby zdfiniować funkcję fp(x) będaca pochodną wcześniej zdefiniowanej funkcji f(x) wybierz z klawiatury kolejno:
fp(x):Shift+/ f(x)x

$fp(x) \rightarrow 4 \cdot x + 3$

Definicja zmiennej zakresowej

$x := -10, -9.5 .. 10$

Aby zdefiniować zmienną (wektor pionowy) reprezentujący pewien przedział liczb wybierz z klawiatury kolejno:
x:-10,-9.5;10
Oznacza to liczy z przedzialu -10 do 10 z krokiem 0,5

Aby wyswietlić x wpisz:
x=

Aby dla danych x wyswietlić wartości funkcji x wpisz:
f(x)=

x =

-10
-9.5
-9
-8.5
-8
-7.5
-7

f(x) =

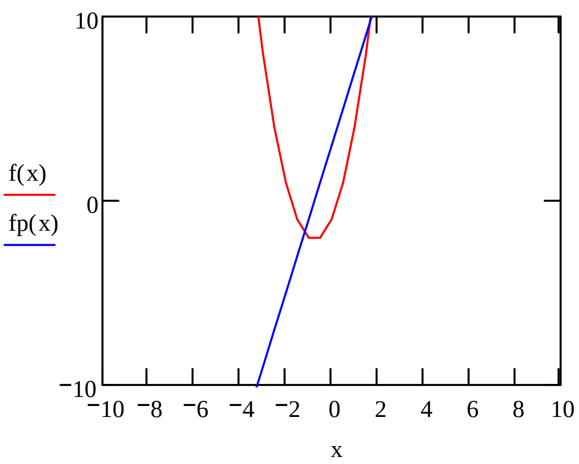
169
151
134
118
103
89
76

fp(x) =

-37
-35
-33
-31
-29
-27
-25

Uwaga: Na wydruku umieszczono tylko pierwszych 7 liczb z każdego przedziału.

Przedstawienie funkcji na wykresie



Aby uzyskać możliwość rysowania wykresu funkcji należy wybrać kombinacje klawiszy ***Shift+2.***
Po lewej stronie wykresu należy kolejno wpisać identyfikatory funkcji które chcemy umiescić na wykresie: ***f(x),fp(x)***
Na dole natomiast zmienną zakresową ***x,*** która stanowi dziedzinę funkcji.

Klikając dwukrotnie na obszarze wykresu uzyskujemy możliwość dodatkowej konfiguracji wyglądu wykresu.

Miejsca zerowe funkcji

Znając przybliżone wartości pirewiastków funkcji (np. na podstawie wykresu) możemy uzyskać ich dokładną wartość za pomoca funkcji systemu MathCad **root**

$x := -2$

$\mathrm{root}(f(x), x) = -1.781$

$x := 0$

$\mathrm{root}(f(x), x) = 0.281$

Definiowanie wektorów i macierzy

$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Aby zdefiniować wektor C wybierz z klawiatury kolejno:
c:Ctrl+M
a następnie ustal wymiar i wpisz wartości poczczególnych elementów

$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Aby uzyskać macierz transponowaną wybierz z klawiatury kolejno:
C Ctrl+1 =

$|C| = 6$

Aby uzyskać wartość wyznacznika macierzy wybierz z klawiatury kolejno:
C|=

$A := C^{-1}$

Aby zdefinować macierz A bedacą macierzą odwrotną C wybierz z klawiatury kolejno:
A:C^-1

$I := \mathrm{identity}(4)$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aby zdefinować macierz jednostkową I o wymiarach 4x4 wybierz z klawiatury kolejno:
I:identity(4)

Definiowanie wektorów i macierzy w oparciu o zmienne indeksowe.

$ORIGIN \equiv 1$

Zmienna globalna ORIGIN wyznacza wartość początkowa dla indeksu macierzy tzn. jeżeli ORIGIN=1 to pierwszy element w macierzy bedzie posiadał współrzedne 1,1 standardowo w MAthCad'ie 0,0

$i := 1..5$ Definicja zmiennej indeksującej.

$U_i :=$

3
5
7
8.9
9.1

Definicja wektora pionowego.Wybierz z klawiatury kolejno:
U[i:3,5,7,8.9,9.1

$D_{1,1} := 20$

$D_{4,3} := 34$

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 34 \end{pmatrix}$$

Definicja macierzy D poprzez nadanie wartości poszcególnym elementą macierzy, aby zdefinować element 1,1 wybierz z klawiatury kolejno:
D[1,1:20

W programie MathCad w dwojaki sposób uzywa się symbolu tzw. indeksu dolnego. Jeżeli wprowadzimy:
X***[2,2:4***
oznacza to element macierzy kolumnowej o indeksie 2

$X_2 := 4$ $\quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad X_2 = 4$

Natomiast jeżeli wprowadzimy:
X.2:5
oznacza to "zwykłą" zmienną zdefiniowaną z użyciem symbolu graficzgo jakim jest indeks dolny.

$X_2 := 5$ $\quad X_2 = 5$

Rozwiązywanie układu równań liniowych.

Rozwiązać poniższy układ równań
5x+y+3z=20
x-27+3z=-4
2x+3y+2z=6

Definicja macierzy

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 27 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 20 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} 2.414 \\ -0.552 \\ 2.828 \end{pmatrix}$$

Sprawdzenie:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 20 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Zastosowanie funkcji wbudowanej **lsolve** MathCada do rozwiązanie układu równań

$$\mathrm{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 2.414 \\ -0.552 \\ 2.828 \end{pmatrix}$$

Rozwiązywanie równań układów równań nieliniowych

$x := 1 \qquad y := 1$ Definicja wartości początkowych

Given Słowo kluczowe Given poprzedza blok równań

$x^2 + y^2 = 6$
$x + y = 2$

Aby wprowadzić równaie wybierz z klawiatury kolejno:
x^2+y^ Ctrl+= 6

$$\mathrm{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 2.414 \\ -0.414 \end{pmatrix}$$

Definiowanie wektorów funkcyjnych

$$w(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad p := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

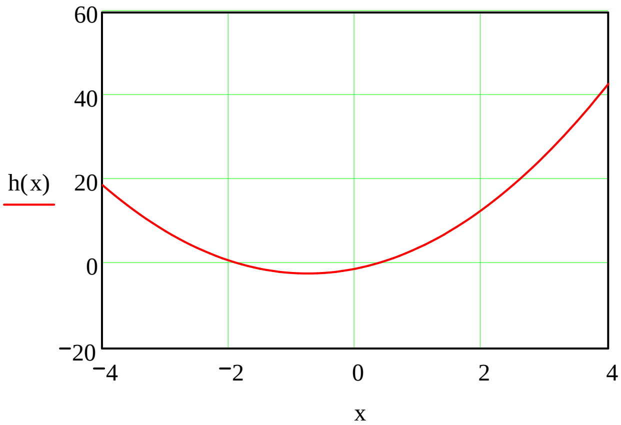
Definiowanie funkcji jako iloczynu wektorów

$$h(n) := w(n) \cdot p$$

$$h(n) \rightarrow (-1) + 3 \cdot n + 2 \cdot n^2$$

Wykres zdefiniowanej funkcji

$$x := -4, -3.9 .. 4$$



Wyznaczanie miejsc zerowych wielomianów na podstawie wektora współczynników **p**

$$\text{polyroots}(p) = \begin{pmatrix} -1.781 \\ 0.281 \end{pmatrix}$$

Sprawdzenie

$$x := \text{polyroots}(p) \qquad x = \begin{pmatrix} -1.781 \\ 0.281 \end{pmatrix}$$

$$i := 1 .. 2$$

$$h(x_i) =$$

0
0

Wartość funkcji h(x) dla wyznaczonych pierwiastków

$ORIGIN := 0$

Rozwiazanie problemu brzegowego za pomoca funkcji rkfixed programu MathCad

y''(x)=1
w przedziale a=-4, b=5

Rozwiazanie dokladne

$$y(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{2.5}{9} \cdot x - 8.111$$

Zamiana rownania na uklad dwoch rownan rzedu pierwszego

$y_0 = y(x)$

$y_1 = y'(x)$

$$D(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$g_0 := 5$ poczatkowa wartosci brakujacego warunku poczatkowego (dowolna do iteracji)

$a := -4$

$b := 5$

I przypadek warunkow brzegowych

$y(-4) = 1 \quad y(5) = 3$

$$load(x, v) := \begin{pmatrix} 1 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

v_0 brakujacy warunek poczatkowy

$score(x, w) := w_0 - 3$

$w_0 - 3$ roznica pomiedzy warunkiem poczatkowym w punkcie b a jego oszacowaniem w procesie obliczen

$IC := sbval(g, a, b, D, load, score)$

$IC = (-4.278)$ wartosc brakujacego warunku poczatkowego

$ic := load(0, IC)$

$$ic = \begin{pmatrix} 1 \\ -4.278 \end{pmatrix}$$ pelny wektor warunkow poczatkowych

Rozwiazanie problemu poczatkowego

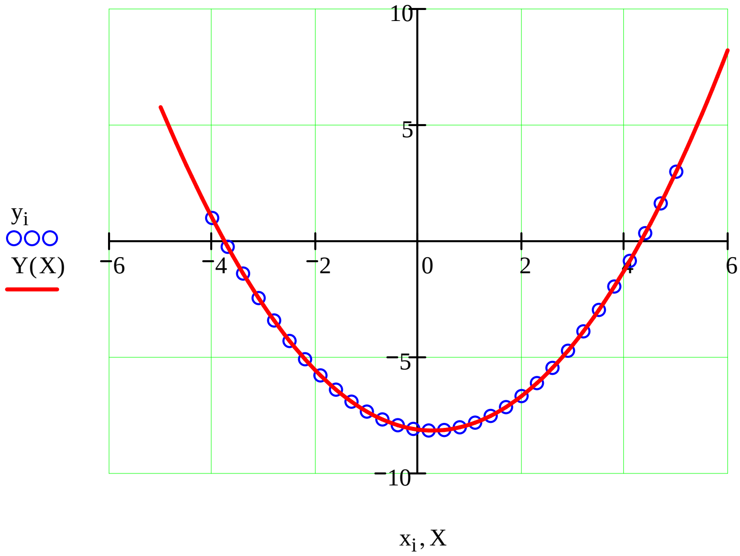
$N := 30$

$S := \mathrm{rkfixed}(ic, a, b, N, D)$

$i := 0 .. N$ $\quad x := S^{\langle 0 \rangle}$ $\quad y := S^{\langle 1 \rangle}$

$X := -5, -4.9 .. 6$

$Y(X) := \frac{1}{2} \cdot X^2 - \frac{2.5}{9} \cdot X - 8.111$



II przypadek warunkow brzegowych

$y'(-4) = -4.278 \quad y(5) = 3$

$\mathrm{load}(x, v) := \begin{pmatrix} v_0 \\ -4.278 \end{pmatrix}$

$\mathrm{score}(x, w) := w_0 - 3$

$IC := \mathrm{sbval}(g, a, b, D, \mathrm{load}, \mathrm{score})$

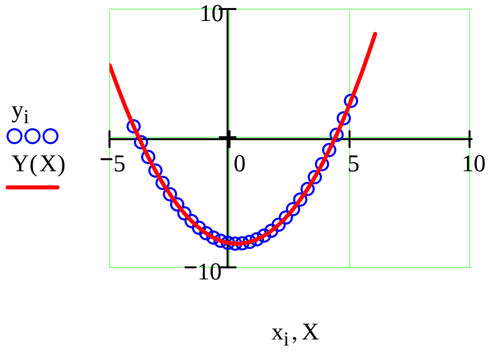
$IC = (1.002)$

$ic := \mathrm{load}(0, IC)$

$ic = \begin{pmatrix} 1.002 \\ -4.278 \end{pmatrix}$

Rozwiazanie problemu poczatkowego

$S := \mathrm{rkfixed}(ic, a, b, N, D)$ $\quad x := S^{\langle 0 \rangle}$ $\quad y := S^{\langle 1 \rangle}$



III przypadek warunkow brzegowych

$y(-4) = 1$ $\quad y'(5) = 4.722$

$$\mathrm{load}(x, v) := \begin{pmatrix} 1 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{score}(x, w) := w_1 - 4.722$

$IC := \mathrm{sbval}(g, a, b, D, \mathrm{load}, \mathrm{score})$

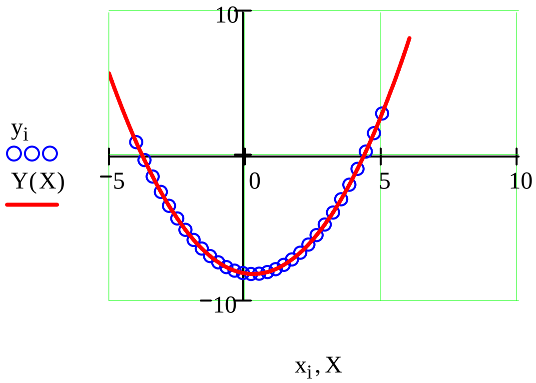
$IC = (-4.278)$

$ic := \mathrm{load}(0, IC)$

$$ic = \begin{pmatrix} 1 \\ -4.278 \end{pmatrix}$$

Rozwiazanie problemu poczatkowego

$S := \mathrm{rkfixed}(ic, a, b, N, D)$ $\quad x := S^{\langle 0 \rangle}$ $\quad y := S^{\langle 1 \rangle}$



Metody wariacyjne przypadek I
Zamiana problemu na problem z jednorodnymi warunkami brzegowymi

y(x)=u(x)+y0(x)

$y0(x) := \frac{2}{9} \cdot x + \frac{17}{9}$ $\quad y0(a) = 1$

$y0'(x) := \frac{2}{9}$ $\quad y0(b) = 3$

$y0''(x) := 0$

$$u''(x) - 1 = 0$$

$$u(-4) = 0 \qquad u(5) = 0$$

Metoda Rayleigha-Ritza

Budowa funkcjonalu dla problemu

$$I = \int_a^b u \cdot u''(x) + 2 \cdot u \cdot (-1)\, dx$$

Po scalkowaniu przez czesci otrzymujemy

$$I = -\int_a^b u' \cdot u'\, dx + \int_a^b 2 \cdot u \cdot (-1)\, dx$$

Przyjmujemy baze aproksymacyjna

$$\phi(x) := \left[(x-a)\cdot(x-b) \quad (x-a)\cdot(x-b)\cdot x \quad (x-a)\cdot(x-b)\cdot x^2 \right]$$

$\phi(b) = (0 \ \ 0 \ \ 0)$

$\phi(a) = (0 \ \ 0 \ \ 0)$

$$\phi'(x) := \left[(x-a)+(x-b) \quad [(x-a)+(x-b)]\cdot x + (x-a)\cdot(x-b) \quad [(x-a)+(x-b)]\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot(x-a)\cdot(x-b) \right]$$

Podstawiajac za $u(x)=\underline{\phi}(x)*\underline{c}$ otrzymujemy

$$I = -\int_a^b c^T \cdot \phi'^T \cdot \phi' \cdot c\, dx + \int_a^b 2 \cdot c^T \cdot \phi^T \cdot (-1)\, dx$$

Korzystajac z warunku na minimum funkcjonalu

$$\frac{d}{dc} I(x) = 0$$

szukamy nieznanych wspolczynnikow c

$$-\int_a^b \phi'^T \cdot \phi' \, dx \cdot c + \int_a^b \phi^T \cdot (-1) \, dx = 0$$

Przyjmujac oznaczenia

$$A = \int_a^b -\phi'^T \cdot \phi' \, dx$$

$$P = -\int_a^b \phi^T \cdot (-1) \, dx$$

Obliczamy

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$i := 1..3 \quad j := 1..3$$

$$A_{i,j} := \int_a^b \left(-\phi'(x)^T \cdot \phi'(x)\right)_{i,j} dx$$

$$A = \begin{pmatrix} -243 & -121.5 & -1.045 \times 10^3 \\ -121.5 & -3.013 \times 10^3 & -3.475 \times 10^3 \\ -1.045 \times 10^3 & -3.475 \times 10^3 & -3.478 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Wyznaczam wektor P

$$P_i := -\int_a^b \left[\phi(x)^T \cdot (-1)\right]_i dx$$

$$P = \begin{pmatrix} -121.5 \\ -60.75 \\ -522.45 \end{pmatrix}$$

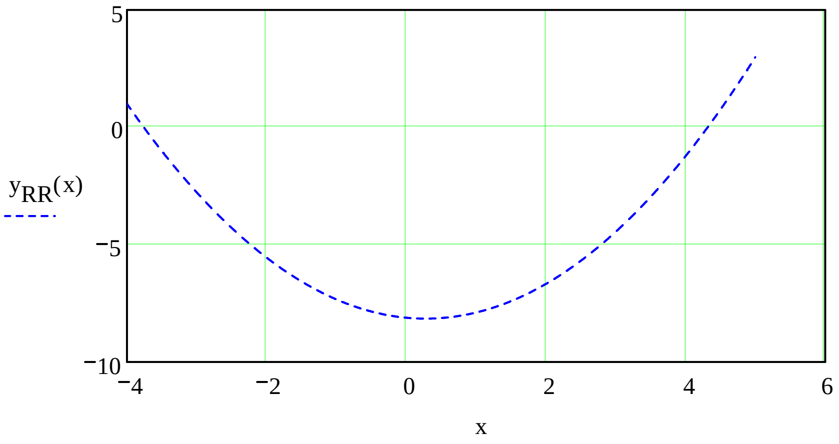
Szukana wartosc wektora c wynosi

$$c := A^{-1} \cdot P$$

$$c = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ostateczne rozwiazanie ma postac

$x := a, a + 0.01 .. b$ $\quad\quad$ $y_{RR}(x) := \phi(x)^T \cdot c + y0(x)$



Metoda Bubnowa-Galerkina

Rozwiazania szukamy z warunku

$$\int_a^b w(x) \cdot (u''(x) - 1)\, dx = 0$$

gdzie

w(x) - funkcja wagowa

Przyjmujemy aproksymacje dla u(x)

u(x)=ϕ*c

oraz aproksymuje dla w(x)

w(x)=ϕ*d

Funkcje bazowe

$$\phi(x) := \left[(x - a) \cdot (x - b) \quad (x - a) \cdot (x - b) \cdot x \quad (x - a) \cdot (x - b) \cdot x^2\right]$$

$\phi(b) = (0 \quad 0 \quad 0)$

$\phi(a) = (0 \quad 0 \quad 0)$

$$\phi'(x) := \left[(x - a) + (x - b) \quad [(x - a) + (x - b)] \cdot x + (x - a) \cdot (x - b) \quad [(x - a) + (x - b)] \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot (x - a) \cdot (x - b)\right]$$

$$\phi''(x) := \left[2 \quad (x - a) + (x - b) + 2 \cdot x + 2 \quad [(x - a) + (x - b)] \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot (x - a) \cdot (x - b) + 2 \cdot x \cdot [(x - a) + (x - b)]\right.$$

Ostatecznie otrzymuje $d^T \neq 0$ wnanie,

$$\int_a^b \phi^T \cdot \phi'' \cdot c + \phi^T \cdot (-1)\, dx = 0$$

Przyjmujac oznaczenia

$$A = \int_a^b \phi^T \cdot \phi''\, dx \qquad \text{i} \qquad P = -\int_a^b \phi^T \cdot (-1)\, dx$$

Obliczamy

$$A_{i,j} := \int_a^b \left(\phi(x)^T \cdot \phi''(x)\right)_{i,j} dx$$

$$A = \begin{pmatrix} -243 & -364.5 & -1.045 \times 10^3 \\ -121.5 & -2.151 \times 10^3 & -3.475 \times 10^3 \\ -1.045 \times 10^3 & -3.536 \times 10^3 & -3.478 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$P_i := -\int_a^b \left[\phi(x)^T \cdot (-1)\right]_i dx$$

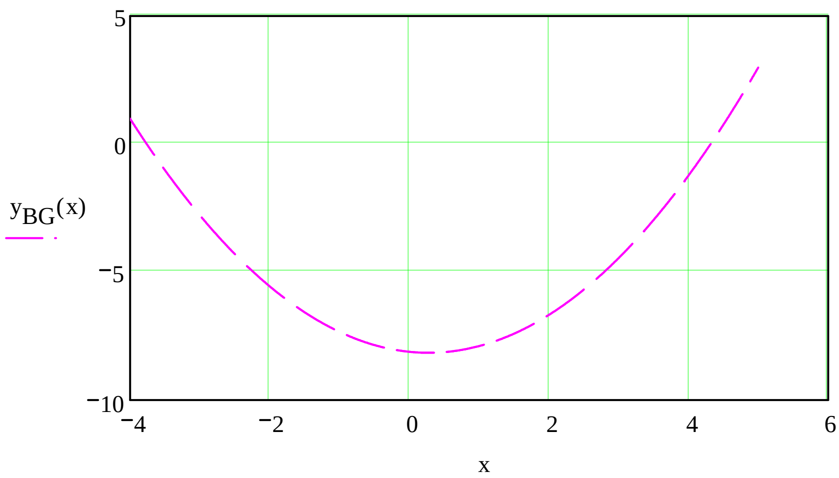
$$P = \begin{pmatrix} -121.5 \\ -60.75 \\ -522.45 \end{pmatrix}$$

Szukana wartosc wektora c wynosi

$$c := A^{-1} \cdot P$$

Rozwiazanie ma postac $y_{BG}(x) := \phi(x)^T \cdot c + y0(x)$

$$c = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Metoda Elementow Skonczonych

Przyjmujemy 3 rownej dlugosci elementy skonczone

$$le := \frac{b-a}{3} \qquad le = 3$$

Definiuje liniowe funkcje ksztaltu dla elementow

$$N(x) := \begin{pmatrix} 1-\frac{x}{le} & \frac{x}{le} \end{pmatrix}$$

$$N'(x) := \begin{pmatrix} \frac{-1}{le} & \frac{1}{le} \end{pmatrix}$$

Rownanie dla elementu skonczonego ma postac

$$\begin{pmatrix} -y'(0) \\ y'(l) \end{pmatrix} - \int_0^{le} N'^T \cdot N' \cdot Q_e \, dx + \int_0^{le} N^T \cdot (-1) \, dx = 0$$

gdzie Qe - wektor stopni swobody dla elementu

Obliczmy macierze i wektory dla elementow

Element 1

$$i := 1..2 \qquad j := 1..2$$

$$K1_{i,j} := -\int_0^{le} \left(N'(x)^T \cdot N'(x)\right)_{i,j} dx \qquad P1_i := \int_0^{le} \left[N(x)^T \cdot (-1)\right]_i dx$$

$$Pb1 = \begin{pmatrix} -y'(0) \\ y'(l_1) \end{pmatrix} \qquad K1 = \begin{pmatrix} -0.333 & 0.333 \\ 0.333 & -0.333 \end{pmatrix}$$

$$P1 = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

Element 2

$$K2 := K1 \qquad P2 := P1$$

$$Pb2 = \begin{pmatrix} -y'(0) \\ y'(l_2) \end{pmatrix}$$

Element 3

$$K3 := K1 \qquad P3 := P1$$

$$Pb2 = \begin{pmatrix} -y'(0) \\ y'(l_3) \end{pmatrix}$$

Agregacja macierzy i wektorow

$$B1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K := B1^T \cdot K1 \cdot B1 + B2^T \cdot K2 \cdot B2 + B3^T \cdot K3 \cdot B3$$

$$P := B1^T \cdot P1 + B2^T \cdot P2 + B3^T \cdot P3$$

$$Pb = \begin{pmatrix} -y'(a) \\ 0 \\ 0 \\ y'(b) \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} -0.333 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0.333 & -0.667 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 & -0.667 & 0.333 \\ 0 & 0 & 0.333 & -0.333 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -3 \\ -3 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

Uklad rownan dla calego ukladu, po uwzglednieniu warunkow brzegowych ma postac

$$\begin{pmatrix} -0.333 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0.333 & -0.667 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 & -0.667 & 0.333 \\ 0 & 0 & 0.333 & -0.333 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1.5 \\ -3 \\ -3 \\ -1.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y'(a) \\ 0 \\ 0 \\ y'(b) \end{pmatrix}$$

Rozwiazanie

$$\begin{pmatrix} y'a \\ Q_2 \\ Q_3 \\ y'b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.667 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 & -0.667 & 0 \\ 0 & 0 & 0.333 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(-P - K^{\langle 4 \rangle} \cdot 3 - K^{\langle 1 \rangle}\right)$$

Niewiadome wtorne

$$y'a = 4.271$$

$$y'b = -4.715$$

Niewiadome pierwotne

$$Q_2 = -7.319$$

$$Q_3 = -6.653$$

$$Q := \begin{pmatrix} 1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ 3 \end{pmatrix}$$ globalny wektor stopni swobody

Powrot do elementow

Element 1

$d1 := a$

$q1 := B1 \cdot Q$

$y1(x) := N(x - d1) \cdot q1$

Element 2

$d2 := d1 + le$

$q2 := B2 \cdot Q$

$y2(x) := N(x - d2) \cdot q2$

Element 3

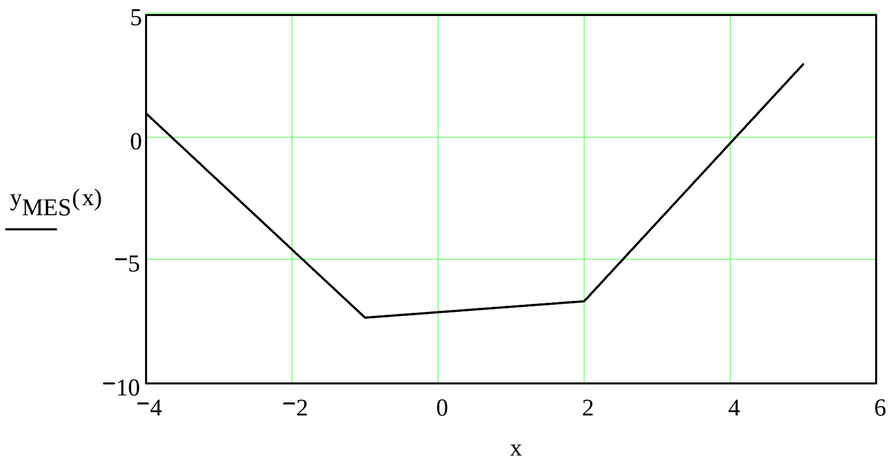
$d3 := d2 + le$

$q3 := B3 \cdot Q$

$y3(x) := N(x - d3) \cdot q3$

Rozwiazanie dla calego przedzialu

$y_{MES}(x) := \text{if}(x < d2, y1(x), \text{if}(x < d3, y2(x), y3(x)))$



Porownanie wynikow