

Przykład 1

Przykład przedstawia rozwiązanie problemu brzegowego

$$\begin{cases} u'' + 2u = 2x^2 - 4x + 12 \\ u(0) = 5 \\ u'(2) = 2 \end{cases} \quad (1)$$

metodami wariacyjnymi.

Zanim zaczniemy obliczenia zamienimy powyższy problem z niejednorodnymi warunkami brzegowymi na problem równorzędny z jednorodnymi warunkami. W tym celu podstawimy za $u(x) = y(x) + u_0(x)$ gdzie funkcja $y(x)$ będzie spełniać jednorodne warunki brzegowe, a $u_0(x)$ jest to dowolną funkcją która spełnia niejednorodne warunki. Dla naszego przykładu przyjmijmy funkcje postaci $u_0(x) = ax + b$. Po uwzględnieniu $u(0) = y(0) + a \cdot 0 + b = 5$ oraz, że $y(0) = 0$ (warunek jednorodny) $\Rightarrow b = 5$. Oraz analogicznie dla drugiego warunku $u'(2) = y'(2) + a = 2 \Rightarrow a = 2$.

W ten sposób otrzymaną zależność $u(x) = y(x) + 2x + 5$ wstawimy do równania (1) i otrzymamy problem brzegowy z jednorodnymi warunkami brzegowymi

$$\begin{cases} y'' + 2y = 2x^2 - 8x + 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases}$$

1. Metoda Rayleigha-Ritza

Ogólne wzory:

$$Ay = f$$

$$A = \frac{d^2}{dx^2} + 2 \quad f = 2x^2 - 8x + 2$$

$$I(y) = \frac{1}{2}(y, Ay) - (y, f)$$

$$I(y) = \frac{1}{2} \int_0^2 y(y'' + 2y) dx - \int_0^2 y(2x^2 - 8x + 2) dx$$

Rozwiązania będziemy szukać w przestrzeni energii H_A co wymaga skalowania przez części pierwszego członu ostatniego równania:

$$I(y) = \frac{1}{2} \left((yy') \Big|_0^2 + \int_0^2 (-y'^2 + 2y^2) dx \right) - \int_0^2 y(2x^2 - 8x + 2) dx$$

Uwzględniając warunki brzegowe człon $(yy') \Big|_0^2 = 0$.

Przyjmijmy dwie funkcje bazowe spełniające jednorodny **podstawowy** warunek brzegowy (co najmniej klasy ciągłości C^1)

$$\Phi_1 = x, \quad \Phi_2 = x^2$$

Wówczas $y = \Phi \mathbf{c}$, oraz

$$I(y) = \frac{1}{2} \int_0^2 (-\mathbf{c}^T \Phi'{}^T \Phi' \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \Phi^T \Phi \mathbf{c}) dx - \int_0^2 \mathbf{c}^T \Phi^T (2x^2 - 8x + 2) dx$$

Po minimalizacji funkcjonału otrzymamy

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{c}} = \int_0^2 (-\Phi'^T \Phi' \mathbf{c} + 2\Phi^T \Phi \mathbf{c}) dx - \int_0^2 \Phi^T (2x^2 - 8x + 2) dx = \mathbf{0} \quad (2)$$

a po podstawieniu konkretnych funkcji Φ

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(- \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2x \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + 2 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x^2 \end{bmatrix} \right) dx \mathbf{c} = \\ = \int_0^2 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} (2x^2 - 8x + 2) dx \end{aligned}$$

Po przemnożeniu i scałkowaniu otrzymamy układ równań

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{3} & 4 \\ 4 & \frac{32}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{28}{3} \\ -\frac{208}{15} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie $y(x) = -4 \cdot \Phi_1 + 1 \cdot \Phi_2 = x^2 - 4x$ a wracając do równania wyjściowego $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = y(x) + u_0(x) = x^2 - 4x + 2x + 5 = \mathbf{x}^2 - \mathbf{2x} + \mathbf{5}$ co jest rozwiązaniem dokładnym.

2. Metoda sformułowania wariacyjnego (równoważna z metodą R-R)

Startujemy z równań

$$\begin{aligned} A &= \frac{d^2}{dx^2} + 2 & f &= 2x^2 - 8x + 2 \\ (v, Ay) &= (v, f) \\ \int_0^2 v(y'' + 2y) dx &= \int_0^2 v(2x^2 - 8x + 2) dx \end{aligned}$$

Pierwszy człon ostatniego równania całkujemy przez części

$$vy' \Big|_0^2 + \int_0^2 (-v'y' + 2vy) dx = \int_0^2 v(2x^2 - 8x + 2) dx \quad (3)$$

Zważywszy na to, że funkcja v spełniać ma jednorodny podstawowy warunek brzegowy to $vy' \Big|_0^2 = 0$.

Podstawiamy za $y = \Phi \mathbf{c}$ i $v = \Phi \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \Phi^T$, oraz przyjmujemy te same funkcje bazowe co w zadaniu poprzednim.

Równanie (3) po przekształceniach przyjmie postać

$$\int_0^2 (-\mathbf{d}^T \Phi'^T \Phi' \mathbf{c} + 2\mathbf{d}^T \Phi^T \Phi \mathbf{c}) dx - \int_0^2 \mathbf{d}^T \Phi^T (2x^2 - 8x + 2) dx = 0$$

a dla warunku, że równanie to jest spełnione dla każdego $\mathbf{d} \neq 0$ mamy

$$\int_0^2 (-\Phi'^T \Phi' \mathbf{c} + 2\Phi^T \Phi \mathbf{c}) dx - \int_0^2 \Phi^T (2x^2 - 8x + 2) dx = 0$$

co jest identyczne z równaniem (2). Dalszy tok postępowania jak w zadaniu poprzednim.

3. Metoda Bubnowa-Galerkina

Metoda to należy do grupy metod residuów ważonych. Ogólny wzór ma postać

$$(v, R) = 0 \quad (4)$$

gdzie $R = Ay - f$ a dla naszego przykładu równanie (4) przyjmie postać

$$\int_0^2 v(y'' + 2y - 2x^2 + 8x - 2) dx \quad (5)$$

Rozwiązania będziemy szukać w bazie funkcji dopuszczalnych spełniających **podstawowe** i **naturalne** warunki brzegowe, oraz co najmniej klasy ciągłości C^2 .

Przyjmijmy dwie funkcje bazowe $\Phi = [x^2 - 4x \quad x^3 - 12x]$ a $y = \Phi \mathbf{c}$.

W metodzie B-G funkcja wagowa $v = \Phi \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \Phi^T$. Podstawiając te wszystkie zależności do (5) otrzymamy

$$\int_0^2 \mathbf{d}^T \Phi^T (\Phi'' \mathbf{c} + 2\Phi \mathbf{c} - 2x^2 + 8x - 2) dx = 0$$

Równanie to ma być spełnione dla dowolnego $\mathbf{d} \neq 0$, oraz po podstawieniu konkretnych funkcji bazowych, przyjmie postać

$$\int_0^2 \begin{bmatrix} x^2 - 4x \\ x^3 - 12x \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 6x \end{bmatrix} \mathbf{c} + \right. \\ \left. + 2 \begin{bmatrix} x^2 - 4x & x^3 - 12x \end{bmatrix} \mathbf{c} - (2x^2 - 8x + 2) \right\} dx = 0$$

Dalej całkując i przekształcając otrzymamy układ równań

$$\begin{bmatrix} \frac{352}{15} & \frac{1352}{15} \\ \frac{1352}{15} & \frac{12032}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{352}{15} \\ \frac{1352}{15} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie tego układu wynosi

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a ostateczne rozwiązanie ma postać $y(x) = 1 \cdot \Phi_1 + 0 \cdot \Phi_2 = x^2 - 4x$. Wracając teraz do równania wyjściowego $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = y(x) + u_0(x) = x^2 - 4x + 2x + 5 = \mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} + 5$ otrzymamy to samo rozwiązanie jak we wcześniejszych metodach.

4. Metoda kollokacji

Metoda ta jest również z rodziny metod residuów ważonych. W porównaniu do B-G różnica polega na doborze funkcji wagowej $v = \delta(x - x_i)$ gdzie x_i jest punktem kollokacji. Punktów kollokacji dobieramy tyle ile jest funkcji bazowych i powinny one zawierać się w obszarze szukanego rozwiązania. Przyjmijmy $x_1 = \frac{2}{3}$ oraz $x_2 = \frac{4}{3}$.

Równanie (4) ma teraz postać

$$\int_0^2 \delta(x - x_i) R(x) dx = R(x_i) = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2$$

czyli

$$R(x_i) = (\Phi(x_i))'' + 2\Phi(x_i) \mathbf{c} - (2x_i^2 - 8x_i + 2) = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2$$

dalej

$$\begin{aligned} R(x_1) = 0 &\longrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 6 \cdot \frac{2}{3} \end{bmatrix} + 2 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^3 - 12 \cdot \frac{2}{3} \right] \right\} \mathbf{c} = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 8 \cdot \frac{2}{3} + 2 \\ R(x_2) = 0 &\longrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 6 \cdot \frac{4}{3} \end{bmatrix} + 2 \left[\left(\frac{4}{3} \right)^2 - 4 \cdot \frac{4}{3} \left(\frac{4}{3} \right)^3 - 12 \cdot \frac{4}{3} \right] \right\} \mathbf{c} = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^2 - 8 \cdot \frac{4}{3} + 2 \end{aligned}$$

co prowadzi do układu równań

$$\begin{bmatrix} -\frac{22}{9} & -\frac{308}{27} \\ -\frac{46}{9} & -\frac{520}{27} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{22}{9} \\ -\frac{46}{9} \end{bmatrix}$$

Powyższy układ równań daje identyczne rozwiązanie co w poprzedniej metodzie.

5. Metoda najmniejszych kwadratów

Sposób postępowania jest podobny do tego który był stosowany w dwóch ostatnich metodach. Różnica polega w doborze funkcji wagowej $v = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{c}}$.

Residuum możemy zapisać jako

$$R = \Phi'' \mathbf{c} + 2\Phi \mathbf{c} - (2x^2 - 8x + 2)$$

stąd

$$v = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{c}} = \Phi'' + 2\Phi$$

czyli równanie (4) przyjmie postać

$$\int_0^2 (\Phi'' + 2\Phi)^T (\Phi'' \mathbf{c} + 2\Phi \mathbf{c} - (2x^2 - 8x + 2)) dx = 0$$

podstawiając za Φ nasz wektor funkcji bazowych otrzymamy

$$\int_0^2 \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 6x \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x^2 - 4x \\ x^3 - 12x \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 6x \end{bmatrix} \mathbf{c} + \right. \\ \left. + 2 \begin{bmatrix} x^2 - 4x & x^3 - 12x \end{bmatrix} \mathbf{c} - (2x^2 - 8x + 2) \right\} dx = 0$$

co po scałkowaniu i przekształceniach daje układ równań

$$\begin{bmatrix} \frac{168}{5} & \frac{1864}{15} \\ \frac{1864}{15} & \frac{16672}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{168}{5} \\ \frac{1864}{15} \end{bmatrix}$$

którego rozwiązaniem znów jest $\mathbf{c} = [1 \ 0]^T$.

Powyższe metody są metodami przybliżonymi. Jednakże jeżeli mamy doświadczenie w dobieraniu funkcji bazowych to w szczególnym przypadku możemy otrzymać nawet rozwiązanie ścisłe, jak w tym przykładzie. Jest to niestety rzadko spotykane by rozwiązanie z tych wszystkich metod było identyczne, a co dopiero było zgodne z rozwiązaniem ścisłym.

Przykład 2

Przykład przedstawia rozwiązanie problemu brzegowego

$$\begin{cases} u'' + 2u = 2x^2 - 4x + 12 \\ u(0) = 5 \\ u'(2) = 2 \end{cases}$$

metodą elementów skończonych w sformułowaniu wariacyjnym.

Zapiszemy powyższy problem dla jednego elementu

$$\int_0^{l^e} v^e (u^{e''} + 2u^e) dx = \int_0^{l^e} v^e (2(x^e + d^e)^2 - 4(x^e + d^e) + 12) dx$$

gdzie d^e jest przesunięciem elementowego lokalnego układu współrzędnych względem układu globalnego.

Pierwszy człon przeliczamy przez części

$$v^e u^{e'} \Big|_0^{l^e} + \int_0^{l^e} (-v^{e'} u^{e'} + 2v^e u^e) dx = \int_0^{l^e} v^e (2(x^e + d^e)^2 - 4(x^e + d^e) + 12) dx$$

Podstawiamy teraz za $u^e = \mathbf{N}^e \mathbf{Q}^e$ i $v^e = \mathbf{N}^e \mathbf{c}^e = \mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{eT}$ gdzie $\mathbf{N}^e$ są linowymi funkcjami kształtu Lagrange'a ($\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} & \frac{x^e}{l^e} \end{bmatrix}$) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{eT} u^{e'} \Big|_0^{l^e} + \int_0^{l^e} (-\mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{e'T} \mathbf{N}^{e'} \mathbf{Q}^e + 2\mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e \mathbf{Q}^e) dx = \\ = \int_0^{l^e} \mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{eT} (2(x^e + d^e)^2 - 4(x^e + d^e) + 12) dx \end{aligned}$$

dalej przekształcając

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{eT} \left\{ \mathbf{N}^{eT} u^{e'} \Big|_0^{l^e} + \int_0^{l^e} (-\mathbf{N}^{e'T} \mathbf{N}^{e'} + 2\mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e) \mathbf{Q}^e dx - \right. \\ \left. - \int_0^{l^e} \mathbf{N}^{eT} (2(x^e + d^e)^2 - 4(x^e + d^e) + 12) dx \right\} = 0 \end{aligned}$$

Równanie to jest spełnione dla dowolnego $\mathbf{c}^e$ i po przekształceniach przyjmie postać

$$\mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e = \mathbf{P}^e - \mathbf{P}_b^e$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_0^{l^e} (-\mathbf{N}^{e'T} \mathbf{N}^{e'} + 2\mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e) dx \\ \mathbf{P}^e &= \int_0^{l^e} \mathbf{N}^{eT} (2(x^e + d^e)^2 - 4(x^e + d^e) + 12) dx \\ \mathbf{P}_b^e &= \mathbf{N}^{eT} u^{e'} \Big|_0^{l^e} \end{aligned}$$

Przyjmujemy trzy elementy skończone o równej długości $l^e = \frac{2}{3}$. Dla poszczególnych elementów otrzymujemy macierze i wektory: ($\odot$ – nr węzła)

Element 1 $d^1 = 0$

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} \overset{\textcircled{1}}{-1.055555556} & \overset{\textcircled{2}}{1.722222222} \\ \overset{\textcircled{2}}{1.722222222} & \overset{\textcircled{1}}{-1.055555556} \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix}$$

$$\mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} 3.753086419 \\ 3.555555556 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix}$$

$$\mathbf{P}_b^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^{1'}(l^1) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u^{1'}(0) = \begin{bmatrix} -u^{1'}(0) \\ u^{1'}(l^1) \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix}$$

Element 2 $d^2 = \frac{2}{3}$

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} \overset{\textcircled{2}}{-1.055555556} & \overset{\textcircled{3}}{1.722222222} \\ \overset{\textcircled{3}}{1.722222222} & \overset{\textcircled{2}}{-1.055555556} \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 3.358024674 \\ 3.358024687 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

$$\mathbf{P}_b^2 = \begin{bmatrix} -u^{2'}(0) \\ u^{2'}(l^2) \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

Element 3 $d^3 = \frac{4}{3}$

$$\mathbf{K}^3 = \begin{bmatrix} \overset{\textcircled{3}}{-1.055555556} & \overset{\textcircled{4}}{1.722222222} \\ \overset{\textcircled{4}}{1.722222222} & \overset{\textcircled{3}}{-1.055555556} \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 3.555555544 \\ 3.753086412 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix}$$

$$\mathbf{P}_b^3 = \begin{bmatrix} -u^{3'}(0) \\ u^{3'}(l^3) \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix}$$

Teraz przystępujemy do agregacji macierzy i wektorów

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \overset{\textcircled{1}}{-1.055555556} & \overset{\textcircled{2}}{1.722222222} & \overset{\textcircled{3}}{0} & \overset{\textcircled{4}}{0} \\ \overset{\textcircled{2}}{1.722222222} & \overset{\textcircled{3}}{-2.111111111} & \overset{\textcircled{4}}{1.722222222} & 0 \\ 0 & \overset{\textcircled{3}}{1.722222222} & \overset{\textcircled{4}}{-2.111111111} & \overset{\textcircled{1}}{1.722222222} \\ 0 & 0 & \overset{\textcircled{4}}{1.722222222} & \overset{\textcircled{1}}{-1.055555556} \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3.753086419 \\ 6.913580230 \\ 6.913580231 \\ 3.753086420 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix}$$

$$\mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} -u^{1'}(0) = -u'(0) \\ u^{1'}(l^1) - u^{2'}(0) = 0 \\ u^{2'}(l^2) - u^{3'}(0) = 0 \\ u^{3'}(l^3) = u'(2) \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix}$$

Stąd mamy układ równań

$$\begin{bmatrix} -1.055555556 & 1.722222222 & 0 & 0 \\ 1.722222222 & -2.111111111 & 1.722222222 & 0 \\ 0 & 1.722222222 & -2.111111111 & 1.722222222 \\ 0 & 0 & 1.722222222 & -1.055555556 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 3.753086419 \\ 6.913580230 \\ 6.913580231 \\ 3.753086420 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -u'(0) \\ 0 \\ 0 \\ u'(2) \end{bmatrix}$$

Uwzględniając teraz warunki brzegowe $u(0) = Q_1 = 5$ oraz $u'(2) = 2$ nasz układ równań przyjmie formę

$$\begin{bmatrix} -1 & 1.722222222 & 0 & 0 \\ 0 & -2.111111111 & 1.722222222 & 0 \\ 0 & 1.722222222 & -2.111111111 & 1.722222222 \\ 0 & 0 & 1.722222222 & -1.055555556 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 3.753086419 \\ 6.913580230 \\ 6.913580231 \\ 3.753086420 - 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -1.055555556 \\ 1.722222222 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie powyższego równia - niewiadome pierwotne:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4.057109995 \\ 3.987568525 \\ 4.845214143 \end{bmatrix}$$

oraz niewiadome wtórne

$$\mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} -2.043619209 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Funkcje kształtu są liniowymi funkcjami Lagrange'a i rozwiązanie MES spełnia jedynie podstawowy warunek brzegowy (dla $u'(2) = 1.286468 \neq 2$). Spełnienie naturalnego warunku brzegowego wymagałoby przyjęcia funkcji kształtu Hermita. Zachowując funkcje kształtu Lagrange'a błąd rozwiązania dla pochodnej możemy zmniejszyć zwiększając liczbę elementów skończonych.