

Zadanie 1. Dany problem brzegowy z niejednorodnymi warunkami brzegowymi zamienić na problem równoważny z jednorodnymi warunkami. Następnie, dla tego nowego problemu brzegowego napisać równanie całkowe dla metody residuów ważonych.

$$y'' + 2xy = x^2, \quad x \in [-1, 2], \quad y(-1) = 2, \quad y(2) = 5$$

Zadanie 2. Dany problem brzegowy z niejednorodnymi warunkami brzegowymi zamienić na problem równoważny z jednorodnymi warunkami. Zapisać nowy problem jako równanie wariacyjne w metodzie B-G w sformułowaniu słabym.

$$y'' + 2xy = \sin(x), \quad x \in [-1, 3], \quad y(-1) = 2, \quad y(3) = -1$$

Zadanie 3. Dany problem zamienić na problem równoważny z jednorodnymi warunkami brzegowymi:

$$y'' + x \sin(x^2 - x) y = x, \quad x \in (-1, 1) \\ y(-1) = -1, \quad y(1) = 1$$

Zadanie 4. Dany problem zamienić na problem równoważny z jednorodnymi warunkami brzegowymi:

$$y'' + (x - x^2) y = \cos(x - x^2), \quad x \in (-1, 1) \\ y'(-1) = -1, \quad y(1) = 1$$

Zadanie 5. Dla danego problemu brzegowego znaleźć rozwiązanie przybliżone metodą kolokacji punktowej.

$$y'' + 2xy = x^2, \quad x \in [-1, 2], \quad y(-1) = 0, \quad y(2) = 0$$

Przyjąć jedną funkcję bazową $\phi = x^2 - x - 2$ oraz punkt kolokacji $x = 0.5$. Naszkicować przybliżone rozwiązanie.

Zadanie 6. Zadany problem brzegowy:

$$y'' = 2x - 2 \quad x \in [0, 3] \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 0$$

rozwiązać metodą najmniejszych kwadratów, przyjmując $\tilde{y} = ax^2(x - 3)$. Zapisać otrzymane rozwiązanie przybliżone $\tilde{y}(x)$.

Zadanie 7. Rozwiązać problem brzegowy metodą najmniejszych kwadratów

$$y''(x) = x^2 - x, \quad x \in (-1, 1) \\ y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$$

Do obliczeń przyjąć jedną funkcję bazową.

Zadanie 8. Dany problem brzegowy rozwiązać metodą najmniejszych kwadratów.

$$y'' = 6x^2, \quad x \in [-1, 3], \quad y(-1) = 0, \quad y'(3) = 0$$

Przyjąć $\tilde{y} = (x + 1)(x - 7)c$. Wykonać szkic wykresu otrzymanego rozwiązania.

Zadanie 9. Dla danego problemu brzegowego znaleźć rozwiązanie przybliżone metodą kolokacji punktowej.

$$y'' = 2x^2, \quad x \in [0, 3], \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 0$$

Przyjąć funkcje bazowe $\phi_1 = x^2 - 3x$, $\phi_2 = x^3 - 3x^2$ oraz punkty kolokacji $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Zadanie 10. Dany problem brzegowy:

$$y'' = 2 \quad x \in [-1, 4] \quad y(-1) = 2, \quad y(4) = 2$$

rozwiązano metodą kolokacji. Przyjęto trzy punkty kolokacji: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Otrzymano rozwiązanie różniące się od rozwiązania ścisłego. Naszkicować możliwy przebieg funkcji residuum $R(x)$.

Zadanie 11. Dla danego problemu brzegowego znaleźć rozwiązanie przybliżone metodą Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu mocnym.

$$u'' + u = 2, \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

Przyjąć jedną funkcję bazową $\phi = x^2 - x$. Naszkicować przybliżone rozwiązanie.

Zadanie 12. Rozwiązać problem brzegowy metodą Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu mocnym

$$\begin{aligned} y''(x) &= 1, \quad x \in (-1, 1) \\ y(-1) &= 0, \quad y(1) = 0 \end{aligned}$$

Do obliczeń przyjąć jedną funkcję bazową.

Zadanie 13. Rozwiązać problem brzegowy metodą Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu słabym

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x), \quad x \in (0, 1) \\ u(0) &= 0, \quad u'(1) = 0 \end{aligned}$$

gdzie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0.5 \\ 1 & x \geq 0.5 \end{cases}$$

Do obliczeń przyjąć wektor funkcji bazowych:

$$\phi(x) = [x \quad x^2]$$

Zadanie 14. Dla problemu zdysketyzowanego 2 elementami skończonymi o równej długości stosując MRW w sformułowaniu słabym B-G obliczyć macierz $\mathbf{K}$

$$y'' + xy = e^x + \sin(x), \quad x \in [-1, 3], \quad y(-1) = \sqrt{3}, \quad y(3) = 1.5$$

Zadanie 15. Obliczyć wektor $\mathbf{P}$ w układzie równań $\mathbf{KQ} = \mathbf{P} + \mathbf{P}_b$ metody elementów skończonych w słabym sformułowaniu B-G. Przyjąć dwa elementy skończone o równej długości.

$$y'' + 3xy = 6x^2, \quad x \in [-1, 3], \quad y(-1) = 1, \quad y(3) = 1.5$$

Zadanie 16. Dla danego problemu brzegowego:

$$y'' = 6x, \quad x \in [-1, 2], \quad y(-1) = 1, \quad y'(2) = -1$$

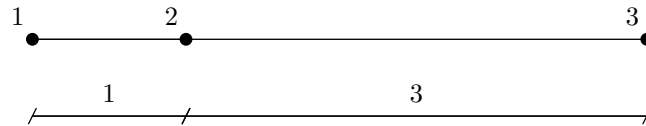
obliczyć wartości niewiadomej funkcji w węzłach dla słabego sformułowania Bubnowa-Galerkina, przy użyciu trzech liniowych ES o równych długościach. Dla pojedynczego elementu zachodzi równość: $\mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e = \mathbf{P}^e + \mathbf{P}_b^e$, ($x = x^e + d^e$), gdzie:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^e = - \begin{bmatrix} 1 + 3d^e \\ 2 + 3d^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_b^e = \begin{bmatrix} -y'(0^e) \\ y'(l^e) \end{bmatrix}$$

Zadanie 17. Dany jest problem brzegowy

$$u''(x) = 1, \quad x \in (0, 4) \\ u(0) = 0 \quad u(4) = 0$$

Stosując metodę elementów skończonych wyznaczyć przybliżoną wartość funkcji u w punkcie $x = 1$. Przyjąć **jeden** element skończony o 3 węzłach rozmieszczonych jak na rysunku:



Zadanie 18. Rozwiązać problem brzegowy metodą elementów skończonych. Przyjąć elementy skończone jak na rysunku.

$$2y''(x) = 1, \quad x \in (0, 3) \\ y(0) = 0, \quad y'(3) = 1$$

