

Metoda Rayleigha-Ritza

Sławomir Koczubiej
Katedra Informatyki Stosowanej
Politechnika Świętokrzyska

Kielce, Luty 2006

Przykład rozwiązania problemu brzegowego metodą Rayleigha-Ritza dla różnych typów aproksymacji rozwiązania.

1. Sformułowanie zadania.

Dany jest problem brzegowy:

$$-\frac{d^2}{dy^2} y(x) + \pi^2 y(x) = 2\pi^2 \sin(\pi x); \quad x \in (0,1); \quad (1)$$

z jednorodnymi podstawowymi warunkami brzegowymi:

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 0; \quad (2)$$

2. Sformułowanie funkcjonału w przestrzeni energii.

Budujemy funkcjonał:

$$J[y] = \frac{1}{2} \int_0^1 y(-y'' + \pi^2 y) dx - \int_0^1 2\pi^2 y \sin(\pi x) dx; \quad (3a)$$

lub

$$J[y] = \frac{1}{2} \int_0^1 -y y'' dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \pi^2 y y dx - \int_0^1 2\pi^2 y \sin(\pi x) dx; \quad (3b)$$

Rozwiązania będziemy szukać w przestrzeni energii H_A , zatem funkcjonał (3) całkujemy przez części:

$$J[y] = -\frac{1}{2} y y'|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 y' y' dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \pi^2 y y dx - \int_0^1 2\pi^2 y \sin(\pi x) dx; \quad (4)$$

Uwzględniając warunki brzegowe otrzymamy:

$$J[y] = \frac{1}{2} \int_0^1 y' y' dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \pi^2 y y dx - \int_0^1 2\pi^2 y \sin(\pi x) dx; \quad (5)$$

3. Aproksymacja i budowa macierzowego układu równań.

Przyjmujemy funkcje bazowe spełniające jednorodne podstawowe warunki brzegowe i zakładamy rozwiązanie w postaci:

$$y(x) = \Phi(x) \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \Phi^T(x); \quad y'(x) = \Phi'(x) \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \Phi'^T(x); \quad (6)$$

Wstawiamy aproksymację (6) do funkcjonału (5), otrzymując:

$$J[\mathbf{c}] = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{c}^T \Phi'^T \Phi \mathbf{c} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \pi^2 \mathbf{c}^T \Phi^T \Phi \mathbf{c} dx - \int_0^1 2\pi^2 \mathbf{c}^T \Phi^T \sin(\pi x) dx; \quad (7a)$$

lub po uporządkowaniu:

$$J[\mathbf{c}] = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \left\{ \int_0^1 \Phi'^T \Phi' dx + \int_0^1 \pi^2 \Phi^T \Phi dx \right\} \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \left\{ \int_0^1 2\pi^2 \Phi^T \sin(\pi x) dx \right\}; \quad (7b)$$

Z warunku minimalizacji funkcjonału:

$$\frac{\partial J[\mathbf{c}]}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{0}; \quad (8)$$

otrzymamy:

$$\frac{\partial J[\mathbf{c}]}{\partial \mathbf{c}} = \left\{ \int_0^1 \Phi'^T \Phi' dx + \int_0^1 \pi^2 \Phi^T \Phi dx \right\} \mathbf{c} - \left\{ \int_0^1 2\pi^2 \Phi^T \sin(\pi x) dx \right\}; \quad (9)$$

co prowadzi do układu równań w formie:

$$\left\{ \int_0^1 \Phi'^T \Phi' dx + \int_0^1 \pi^2 \Phi^T \Phi dx \right\} \mathbf{c} - \left\{ \int_0^1 2\pi^2 \Phi^T \sin(\pi x) dx \right\} = \mathbf{0}; \quad (10)$$

Przyjmujemy oznaczenia dla macierzy i wektora:

$$\mathbf{A} = \int_0^1 \Phi'^T \Phi' dx + \int_0^1 \pi^2 \Phi^T \Phi dx; \quad \mathbf{F} = \int_0^1 2\pi^2 \Phi^T \sin(\pi x) dx; \quad (11)$$

Ostatecznie otrzymujemy układ równań w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{F} \quad (12)$$

4. Aproksymacja funkcjami ciągłymi.

Z postaci funkcjonału (5) wynika, że funkcje bazowe powinny być co najmniej klasy $C_0^1[0,1]$.

Przyjmujemy funkcje bazowe w postaci:

$$\phi_0(x) = x \cdot (1-x); \quad \phi_1(x) = x^2 \cdot (1-x); \quad \phi_2(x) = x^3 \cdot (1-x); \quad (13)$$

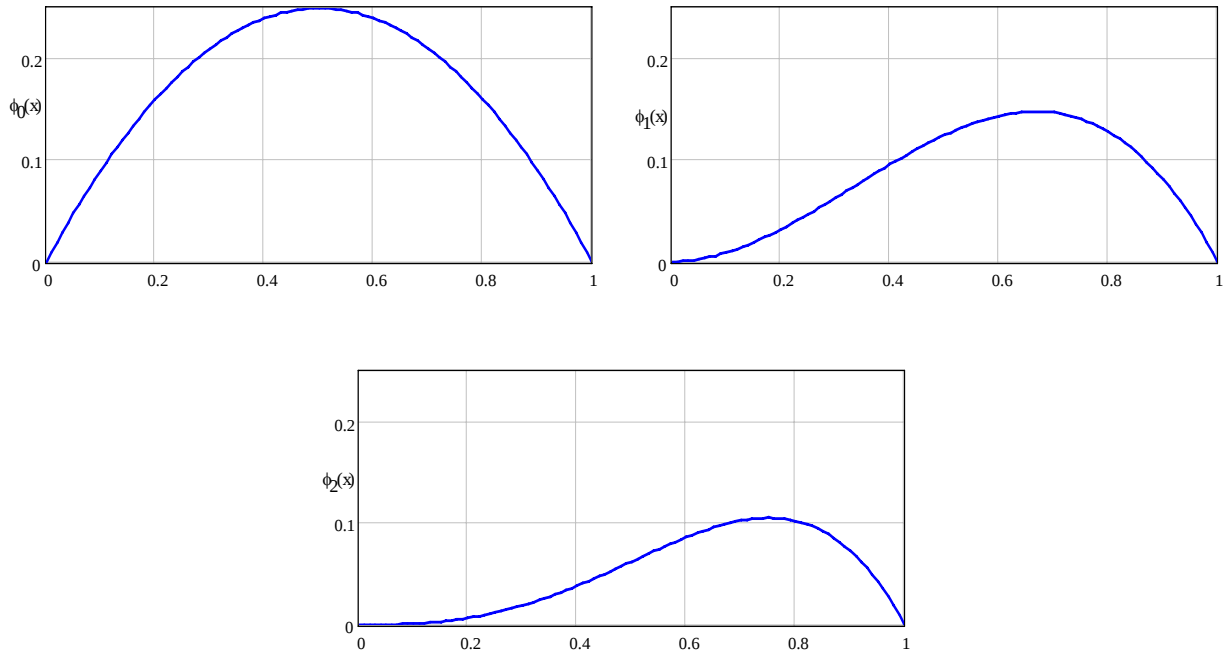
Należy zauważyć, że funkcje bazowe spełniają obydwa podstawowe warunki brzegowe i są ciągłe w całym obszarze rozwiązania (rys. 1).

Z zależności (12) otrzymamy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 0,662 & 0,331 & 0,194 \\ 0,331 & 0,227 & 0,159 \\ 0,194 & 0,159 & 0,125 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,546 \\ 1,273 \\ 0,724 \end{bmatrix} \quad (14)$$

którego rozwiązanie ma postać:

$$c_0 = 3,113; \quad c_1 = 3,536; \quad c_2 = -3,536; \quad (15)$$



Rys. 1. Funkcje bazowe (13).

Rozwiązanie przybliżone problemu (1) ma formę:

$$y(x) = \Phi(x)\mathbf{c} = 3,113 \cdot x \cdot (1-x) + 3,536 \cdot x^2 \cdot (1-x) - 3,536 \cdot x^3 \cdot (1-x); \quad (16)$$

Rozwiązanie (16) pokazano na rys. 5.

5. Aproksymacja liniowymi funkcjami sklejanymi.

Przyjęto odcinkowo liniowe funkcje, zlokalizowane (daszkowe), klasy C_0^1 w przedziale $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

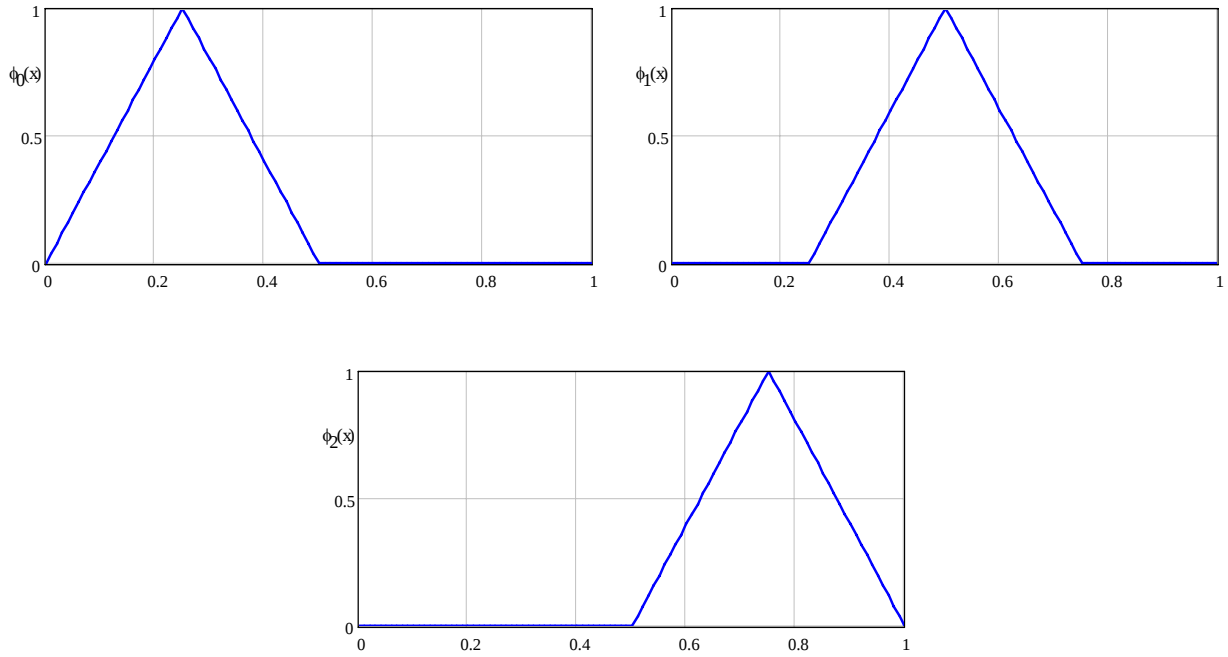
Funkcje bazowe możemy opisać zależnością:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0; & 0 \leq x \leq x_{i-1}; \\ \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}; & x_{i-1} < x \leq x_i; \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_i}; & x_i < x \leq x_{i+1}; \\ 0; & x_{i+1} < x \leq 1; \end{cases} \quad (17)$$

gdzie $i = 0, 1, \dots, n$ i $h_i = x_{i+1} - x_i$. Funkcje bazowe dla $i = 1, 2, 3$ pokazano na rys. 2.

Z zależności (12) otrzymamy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 9,645 & -3,589 & 0 \\ -3,589 & 9,645 & -3,589 \\ 0 & -3,589 & 9,645 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,314 \\ 4,686 \\ 3,314 \end{bmatrix} \quad (18)$$



Rys. 2. Funkcje bazowe (17).

którego rozwiązanie ma postać:

$$c_0 = 0,725; \quad c_1 = 1,026; \quad c_2 = 0,725; \quad (19)$$

Otrzymane przybliżenie problemu (1) jest określone w czterech podprzedziałach i ma formę:

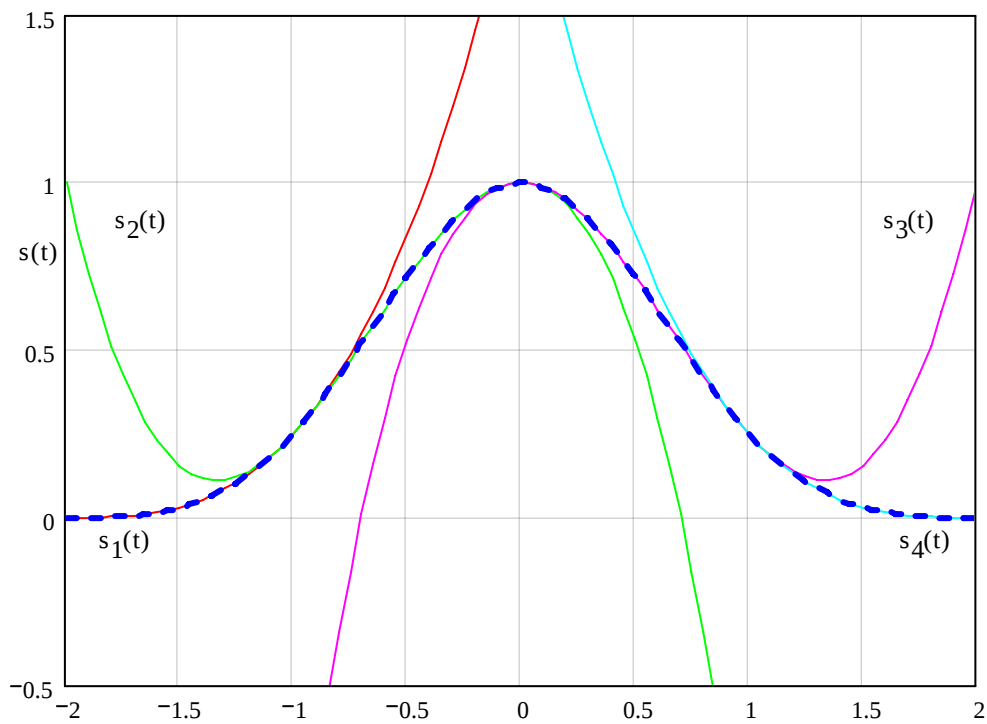
$$y(x) = \begin{cases} 0,725 \cdot \frac{x}{0,25}; & 0 \leq x \leq 0,25; \\ 0,725 \cdot \frac{0,5-x}{0,25} + 1,026 \cdot \frac{x-0,25}{0,25}; & 0,25 < x \leq 0,5; \\ 1,026 \cdot \frac{0,75-x}{0,25} + 0,725 \cdot \frac{x-0,5}{0,25}; & 0,5 < x \leq 0,75; \\ 0,725 \cdot \frac{1-x}{0,25}; & 0,75 < x \leq 1; \end{cases} \quad (20)$$

Rozwiązanie (19) pokazano na rys. 5. Jest ono równoważne rozwiązaniu skończenie elementowemu z wykorzystaniem dwuwęzłowego elementu skończonego o długości 0,25.

6. Aproxymacja sześciennymi funkcjami sklejanymi.

Sześcienna funkcja sklejana B-spline (*Bell-shaped spline*) jest pokazana na rys. 3 (krzywa przerywana) i wyraża się zależnościami:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -2; \\ \frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 3t + 2; & -2 < t \leq -1; \\ -\frac{3}{4}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 1; & -1 < t \leq 0; \\ \frac{3}{4}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 1; & 0 < t \leq 1; \\ -\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 3t + 2; & 1 < t \leq 2; \\ 0 & t > 2; \end{cases} \quad (21)$$



Rys. 3. Budowa sześcienniej funkcji sklejanej.

Należy podkreślić, że powyższe wzory otrzymano wykorzystując następujące warunki brzegowe:

- $s(t)$ jest wielomianem sześciennym sklejonym, określonym przez kolejne wielomiany $s_i(t)$ w przedziale $[t_i, t_{i+1}]$ dla $i = 0, 1, 2, 3$;
- $s(t_i) = f(t_i)$ dla $i = 0, 2, 4$;
- $s_{i+1}(t_{i+1}) = s_i(t_{i+1})$ dla $i = 0, 1, 2$;
- $s'_{i+1}(t_{i+1}) = s'_i(t_{i+1})$ dla $i = 0, 1, 2$;
- $s''_{i+1}(t_{i+1}) = s''_i(t_{i+1})$ dla $i = 0, 1, 2$;

f) $s''(t_0) = s''(t_4) = 0$, tzw. „swobodny” koniec;

g) $s'(t_0) = s'(t_4) = 0$, tzw. „utwierdzony” koniec;

Funkcje kształtu, utworzone z funkcji B-spline, są obliczane ze wzorów:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} s\left(\frac{x-x_0}{h}\right) - 4 \cdot s\left(\frac{x+h}{h}\right); & i=0; \\ s\left(\frac{x-x_1}{h}\right) - s\left(\frac{x+h}{h}\right); & i=1; \\ s\left(\frac{x-x_i}{h}\right); & 2 \leq i \leq n-1; \\ s\left(\frac{x-x_n}{h}\right) - s\left(\frac{x-(n+2) \cdot h}{h}\right); & i=n; \\ s\left(\frac{x-x_{n+1}}{h}\right) - 4 \cdot s\left(\frac{x-(n+2) \cdot h}{h}\right); & i=n+1; \end{cases} \quad (22)$$

gdzie n jest dodatnią stałą i $h = \frac{1}{n+1}$ oraz $x_i = i \cdot h$.

Funkcje kształtu (dla $n=3$) mają postać jak na rys. 4.

Z zależności (12) otrzymamy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 6,546 & 4,076 & -1,372 & -0,074 & 0 \\ 4,076 & 10,329 & 0,261 & -1,668 & -0,074 \\ -1,372 & 0,261 & 8,661 & 0,261 & -1,372 \\ -0,074 & -1,668 & 0,261 & 10,329 & 4,076 \\ 0 & -0,074 & -1,372 & 4,076 & 6,546 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,08 \\ 4,72 \\ 6,675 \\ 4,72 \\ 1,08 \end{bmatrix} \quad (23)$$

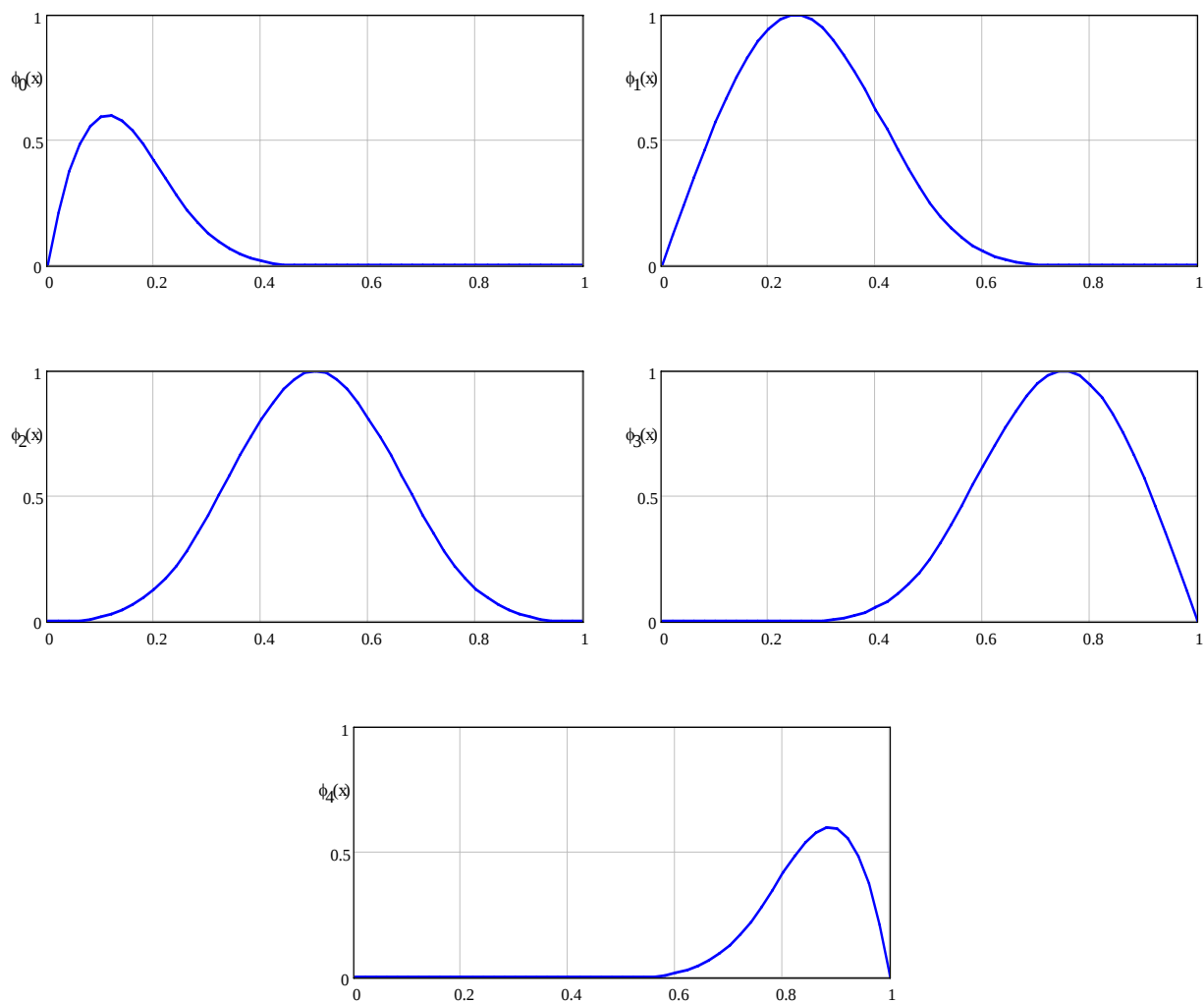
którego rozwiązanie ma postać:

$$c_0 = 0; \quad c_1 = 0,522; \quad c_2 = 0,739; \quad c_3 = 0,522; \quad c_4 = 0; \quad (24)$$

co prowadzi do rozwiązania końcowego w formie:

$$y(x) = \begin{cases} 0,522 \cdot \phi_1(x) + 0,739 \cdot \phi_2(x); & 0 \leq x \leq 0,25; \\ 0,522 \cdot \phi_1(x) + 0,739 \cdot \phi_2(x) + 0,522 \cdot \phi_3(x); & 0,25 \leq x \leq 0,5; \\ 0,522 \cdot \phi_1(x) + 0,739 \cdot \phi_2(x) + 0,522 \cdot \phi_3(x); & 0,5 \leq x \leq 0,75; \\ 0,739 \cdot \phi_2(x) + 0,522 \cdot \phi_3(x); & 0,75 \leq x \leq 1; \end{cases} \quad (25)$$

gdzie funkcje bazowe $\phi_i(x)$ należy obliczać z zależności (22) z uwzględnieniem (21). Rozwiązanie (25) pokazano na rys. 5.

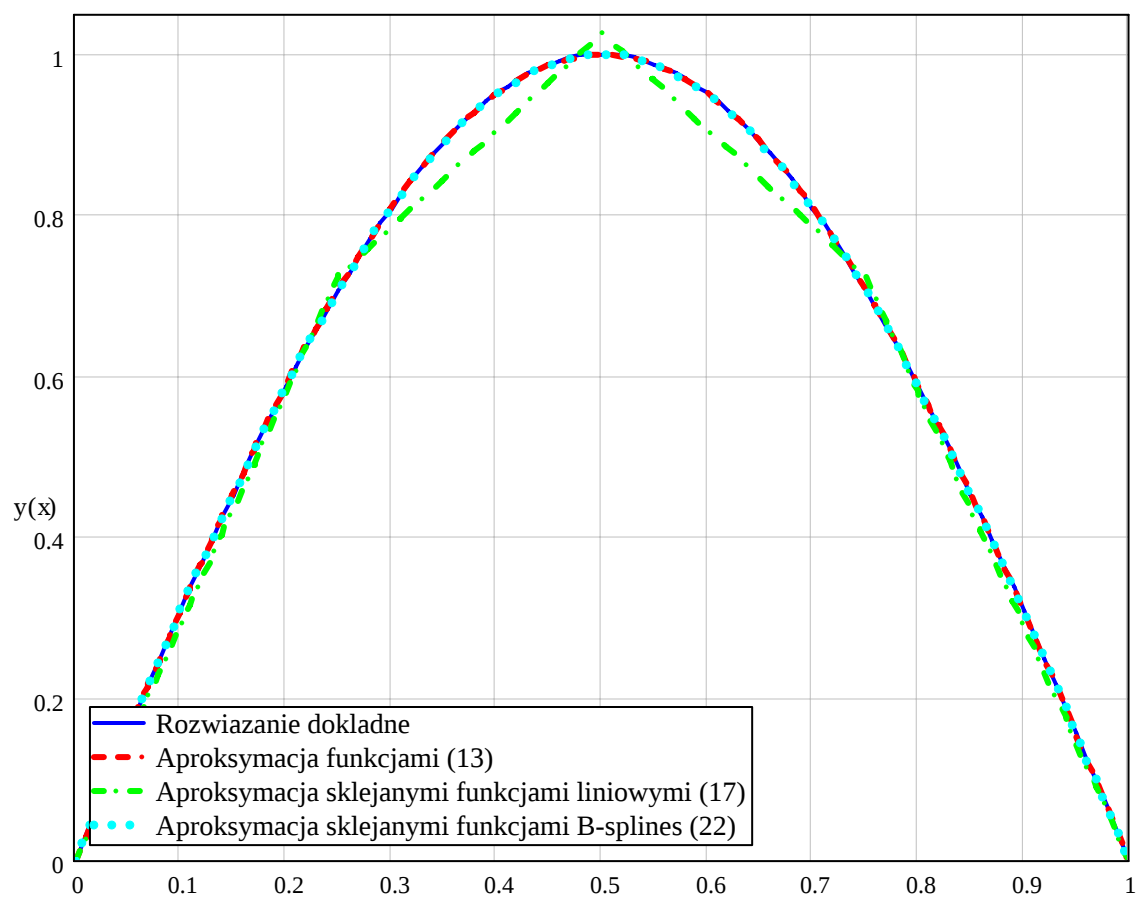


Rys. 4. Funkcje bazowe B-splines (22).

7. Porównanie otrzymanych rozwiązań przybliżonych.

Na rys. 5 porównano wszystkie rozwiązania przybliżone z rozwiązaniem dokładnym:

$$y(x) = \sin(\pi x) \quad (26)$$



Rys. 5. Porównanie otrzymanych rozwiązań przybliżonych.

8. Literatura.

- [1] Richard L. Burden, J. Douglas Faires; *Numerical Analysis, Third Edition*; PWS-KENT Publishing Company, Boston 1985; s. 546-559.

9. Przykładowe obliczenia w systemie MATHCAD.

Obliczenia według punktu: 4.

$$i := 0..2$$

$$j := 0..2$$

$$\Omega := 0,001..1$$

$$\phi_1(x) := x \cdot (1 - x)$$

$$\phi_2(x) := x^2 \cdot (1 - x)$$

$$\phi_3(x) := x^3 \cdot (1 - x)$$

$$d\phi_1(x) := \frac{d}{dx} \phi_1(x)$$

$$d\phi_2(x) := \frac{d}{dx} \phi_2(x)$$

$$d\phi_3(x) := \frac{d}{dx} \phi_3(x)$$

$$\phi(x) := \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \phi_3(x) \end{pmatrix}$$

$$d\phi(x) := \begin{pmatrix} d\phi_1(x) & d\phi_2(x) & d\phi_3(x) \end{pmatrix}$$

$$A_{i,j} := \int_0^1 \left[\left(d\phi(x)^T \cdot d\phi(x) + \pi^2 \cdot \phi(x)^T \cdot \phi(x) \right)_{i,j} \right] dx$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.662 & 0.331 & 0.194 \\ 0.331 & 0.227 & 0.159 \\ 0.194 & 0.159 & 0.125 \end{pmatrix}$$

$$F_i := \int_0^1 \left(2\pi^2 \cdot \phi(x)^T \cdot \sin(\pi \cdot x) \right)_i dx$$

$$F = \begin{pmatrix} 2.546 \\ 1.273 \\ 0.724 \end{pmatrix}$$

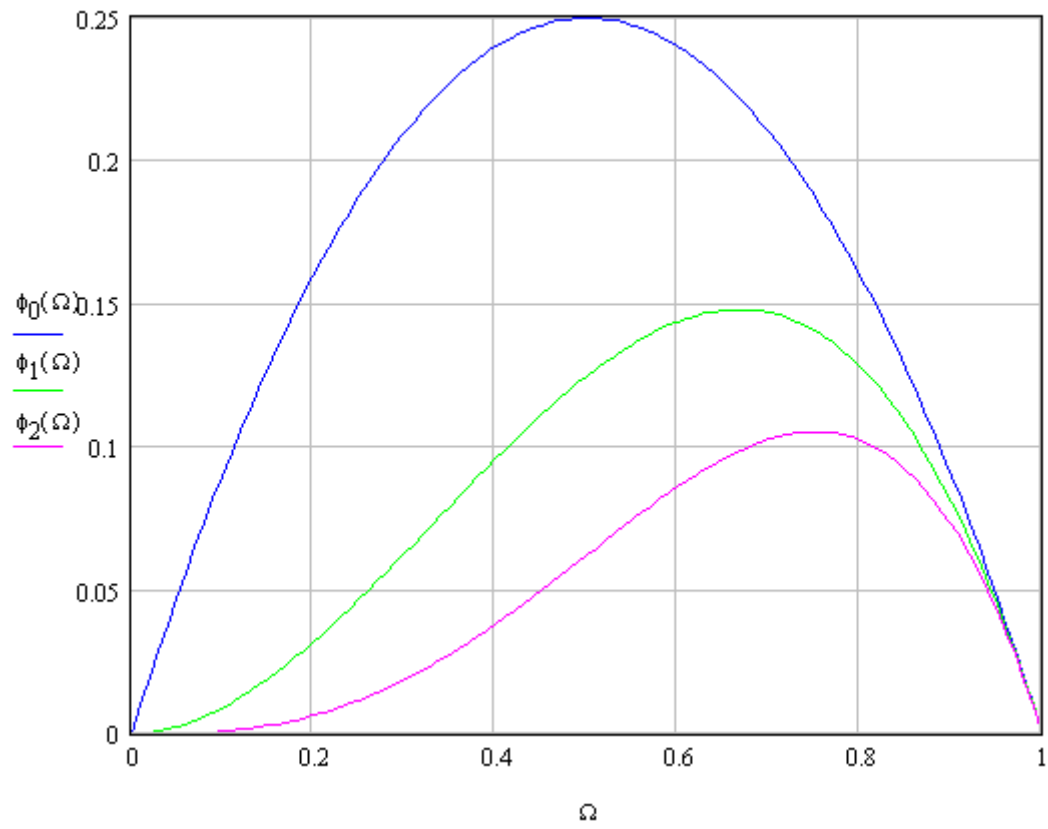
$$c := A^{-1} \cdot F$$

$$c = \begin{pmatrix} 3.113 \\ 3.536 \\ -3.536 \end{pmatrix}$$

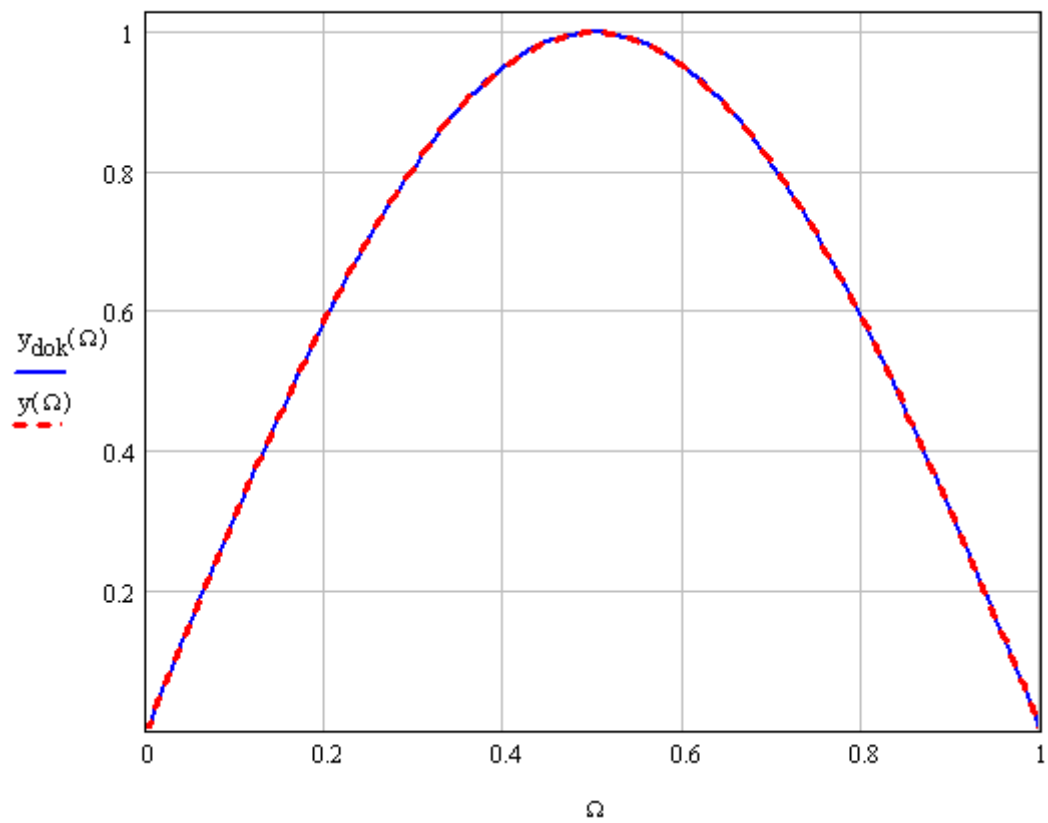
$$y(x) := \phi(x) \cdot c$$

$$y_{\text{dok}}(x) := \sin(\pi x)$$

Funkcje bazowe



Rozwiązanie dokładne i przybliżone



Obliczenia według punktu: 5.

$$i := 0..2$$

$$j := 0..2$$

$$\Omega := 0,001..1$$

$$\phi_s(x, x_p, x_k) := \begin{cases} \frac{x - x_p}{\frac{1}{2} \cdot (x_k - x_p)} & \text{if } x_p \leq x \leq x_k - \frac{1}{2}(x_k - x_p) \\ \frac{x_k - x}{\frac{1}{2} \cdot (x_k - x_p)} & \text{if } x_k - \frac{1}{2}(x_k - x_p) \leq x \leq x_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$d\phi_s(x, x_p, x_k) := \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot (x_k - x_p)} & \text{if } x_p \leq x \leq x_k - \frac{1}{2}(x_k - x_p) \\ \frac{-1}{\frac{1}{2} \cdot (x_k - x_p)} & \text{if } x_k - \frac{1}{2}(x_k - x_p) \leq x \leq x_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\phi_1(x) := \phi_s(x, 0, 0.5)$$

$$\phi_2(x) := \phi_s(x, 0.25, 0.75)$$

$$\phi_3(x) := \phi_s(x, 0.5, 1)$$

$$d\phi_1(x) := d\phi_s(x, 0, 0.5)$$

$$d\phi_2(x) := d\phi_s(x, 0.25, 0.75)$$

$$d\phi_3(x) := d\phi_s(x, 0.5, 1)$$

$$\phi(x) := (\phi_1(x) \ \phi_2(x) \ \phi_3(x))$$

$$d\phi(x) := (d\phi_1(x) \ d\phi_2(x) \ d\phi_3(x))$$

$$A_{i,j} := \int_0^1 \left[(d\phi(x)^T \cdot d\phi(x) + \pi^2 \cdot \phi(x)^T \cdot \phi(x))_{i,j} \right] dx$$

$$A = \begin{pmatrix} 9.645 & -3.589 & 0 \\ -3.589 & 9.645 & -3.589 \\ 0 & -3.589 & 9.645 \end{pmatrix}$$

$$F_i := \int_0^1 (2\pi^2 \cdot \phi(x)^T \cdot \sin(\pi \cdot x))_i dx$$

$$F = \begin{pmatrix} 3.314 \\ 4.686 \\ 3.314 \end{pmatrix}$$

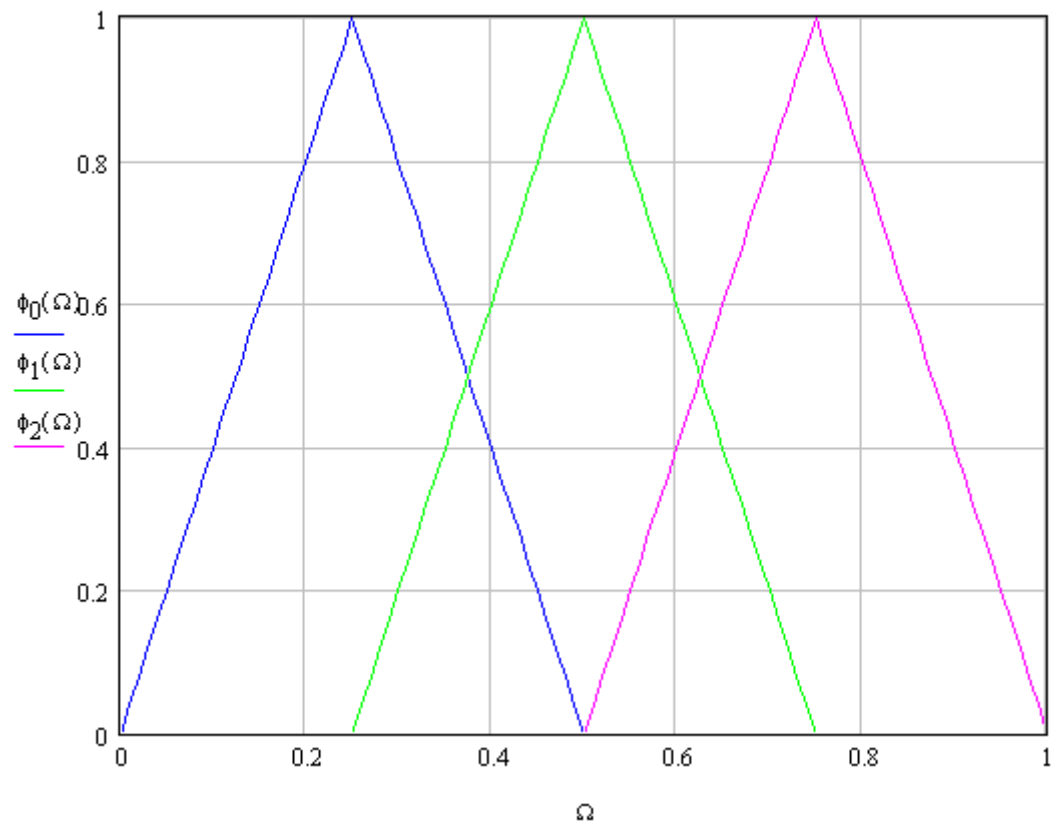
$$c := A^{-1} \cdot F$$

$$c = \begin{pmatrix} 0.725 \\ 1.026 \\ 0.725 \end{pmatrix}$$

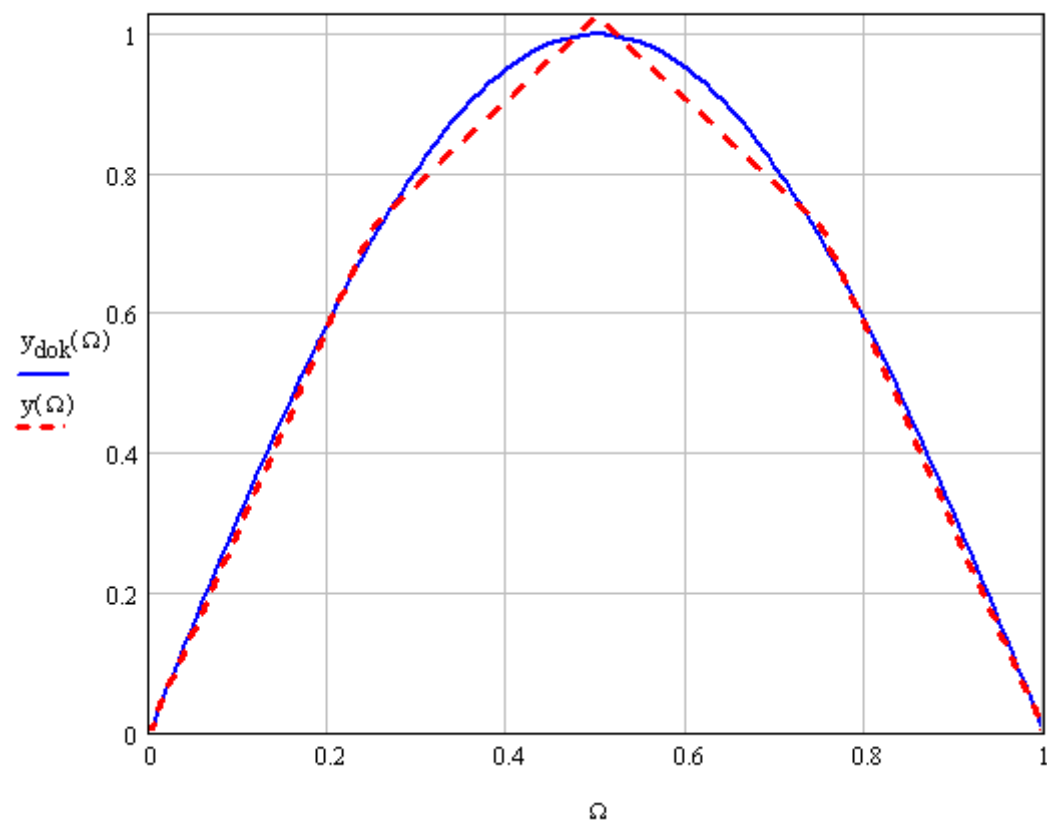
$$y(x) := \phi(x) \cdot c$$

$$y_{\text{dok}}(x) := \sin(\pi \cdot x)$$

Funkcje bazowe



Rozwiązanie dokładne i przybliżone



Obliczenia według punktu: 6.

$$i := 0..4$$

$$j := 0..4$$

$$\Omega := 0,001..1$$

$$h := 0.25$$

$$n := 3$$

$$s(t) := \begin{cases} \frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 3t + 2 & \text{if } -2 \leq t \leq -1 \\ \frac{-3}{4}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 1 & \text{if } -1 \leq t \leq 0 \\ \frac{3}{4}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 1 & \text{if } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{-1}{4}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 3t + 2 & \text{if } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$ds(t,k) := \begin{cases} \frac{1}{k}\frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{k}3t + \frac{1}{k}3 & \text{if } -2 \leq t \leq -1 \\ \frac{1}{k}\frac{-9}{4}t^2 - \frac{1}{k}3t & \text{if } -1 \leq t \leq 0 \\ \frac{1}{k}\frac{9}{4}t^2 - \frac{1}{k}3t & \text{if } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{k}\frac{-3}{4}t^2 + \frac{1}{k}3t - \frac{1}{k}3 & \text{if } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\phi_s(x,n,i) := \begin{cases} s\left(\frac{x - i \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\right) - 4s\left(\frac{x + \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\right) & \text{if } i = 0 \\ s\left(\frac{x - i \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\right) - s\left(\frac{x + \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\right) & \text{if } i = 1 \\ s\left(\frac{x - i \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\right) - s\left[\frac{x - (n+2)\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\right] & \text{if } i = n \\ s\left(\frac{x - i \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\right) - 4s\left[\frac{x - (n+2)\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\right] & \text{if } i = n + 1 \\ s\left(\frac{x - i \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$d\phi_s(x,k,n,i) := \left| \begin{array}{l} ds \left(\frac{x-i \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}, k \right) - 4 \cdot ds \left(\frac{x+\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}, k \right) \text{ if } i = 0 \\ ds \left(\frac{x-i \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}, k \right) - ds \left(\frac{x+\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}, k \right) \text{ if } i = 1 \\ ds \left(\frac{x-i \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}, k \right) - ds \left[\frac{x-(n+2) \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}, k \right] \text{ if } i = n \\ ds \left(\frac{x-i \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}, k \right) - 4 \cdot ds \left[\frac{x-(n+2) \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}, k \right] \text{ if } i = n+1 \\ ds \left(\frac{x-i \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}, k \right) \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

$$\phi_0(x) := \phi_s(x,n,0) \quad \phi_1(x) := \phi_s(x,n,1) \quad \phi_2(x) := \phi_s(x,n,2) \quad \phi_3(x) := \phi_s(x,n,3) \quad \phi_4(x) := \phi_s(x,n,4)$$

$$d\phi_0(x) := d\phi_s(x,h,n,0) \quad d\phi_1(x) := d\phi_s(x,h,n,1) \quad d\phi_2(x) := d\phi_s(x,h,n,2) \quad d\phi_3(x) := d\phi_s(x,h,n,3) \quad d\phi_4(x) := d\phi_s(x,h,n,4)$$

$$\phi(x) := \left(\phi_0(x) \quad \phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \phi_3(x) \quad \phi_4(x) \right) \quad d\phi(x) := \left(d\phi_0(x) \quad d\phi_1(x) \quad d\phi_2(x) \quad d\phi_3(x) \quad d\phi_4(x) \right)$$

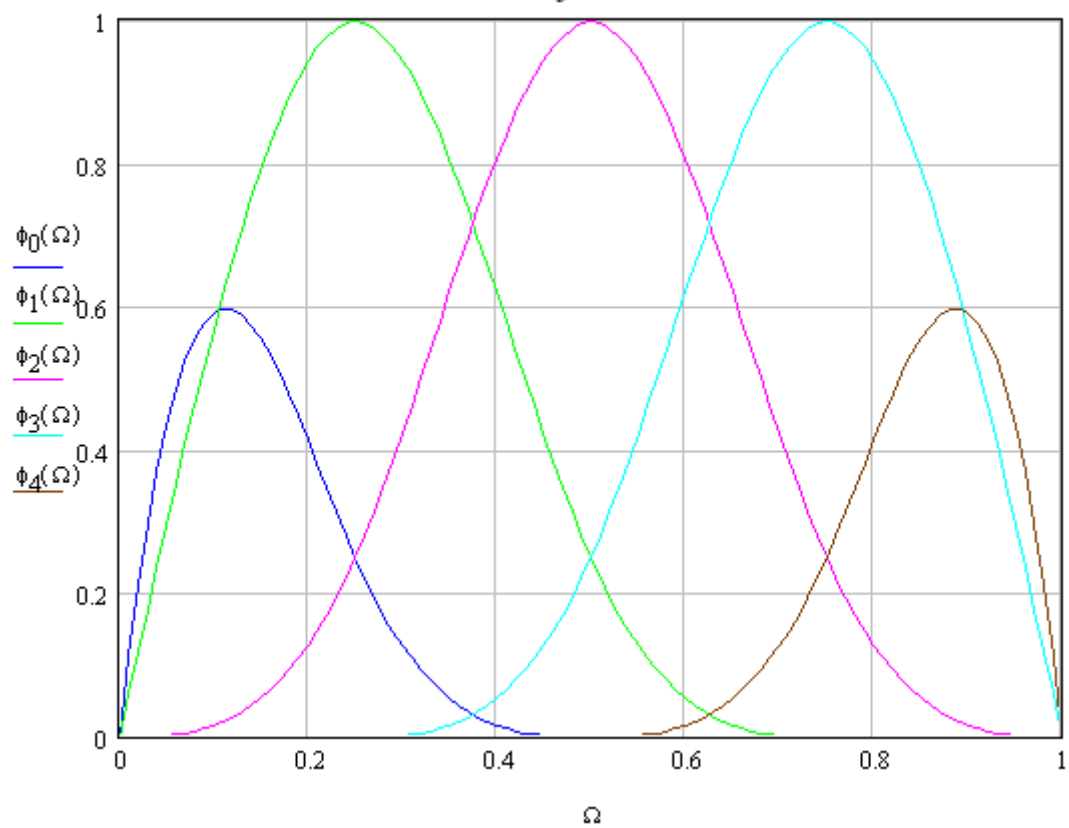
$$A_{i,j} := \int_0^1 \left[\left(d\phi(x)^T \cdot d\phi(x) + \pi^2 \cdot \phi(x)^T \cdot \phi(x) \right)_{i,j} \right] dx \quad A = \begin{pmatrix} 6.546 & 4.076 & -1.372 & -0.074 & 0 \\ 4.076 & 10.329 & 0.261 & -1.668 & -0.074 \\ -1.372 & 0.261 & 8.661 & 0.261 & -1.372 \\ -0.074 & -1.668 & 0.261 & 10.329 & 4.076 \\ 0 & -0.074 & -1.372 & 4.076 & 6.546 \end{pmatrix}$$

$$F_i := \int_0^1 \left(2\pi^2 \cdot \phi(x)^T \cdot \sin(\pi \cdot x) \right)_i dx \quad F = \begin{pmatrix} 1.08 \\ 4.72 \\ 6.675 \\ 4.72 \\ 1.08 \end{pmatrix}$$

$$c := A^{-1} \cdot F \quad c = \begin{pmatrix} 6.016 \times 10^{-4} \\ 0.522 \\ 0.739 \\ 0.522 \\ 6.016 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$y(x) := \phi(x) \cdot c \quad y_{\text{dok}}(x) := \sin(\pi \cdot x)$$

Funckje bazowe



Rozwiazanie dokladne i przyblizone

