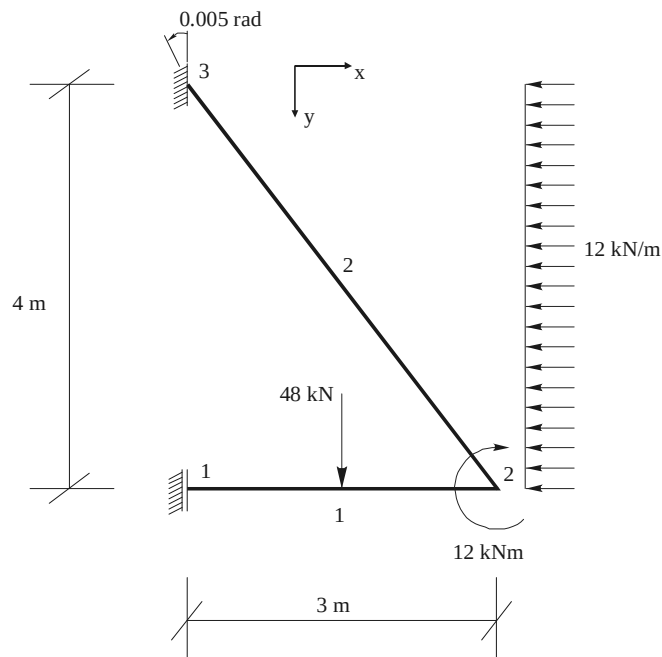


Wzory na zastępniki, macierz sztywności i macierz transformacji



ORIGIN := 1

$$Z_s(p, l) := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{p}{2} \\ \frac{p \cdot l}{8} \\ 0 \\ \frac{p}{2} \\ -\frac{p \cdot l}{8} \end{bmatrix}$$

$$Z_c(p, l) := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{p \cdot l}{2} \\ \frac{p \cdot l^2}{12} \\ 0 \\ \frac{p \cdot l}{2} \\ -\frac{p \cdot l^2}{12} \end{bmatrix}$$

$$T(\cos, \sin) := \begin{bmatrix} \cos & \sin & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin & \cos & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos & \sin & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k(EA, EI, l) := \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot EI}{l^3} & \frac{6 \cdot EI}{l^2} & 0 & -\frac{12 \cdot EI}{l^3} & \frac{6 \cdot EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{l^2} & \frac{4 \cdot EI}{l} & 0 & -\frac{6 \cdot EI}{l^2} & \frac{2 \cdot EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot EI}{l^3} & -\frac{6 \cdot EI}{l^2} & 0 & \frac{12 \cdot EI}{l^3} & -\frac{6 \cdot EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{l^2} & \frac{2 \cdot EI}{l} & 0 & -\frac{6 \cdot EI}{l^2} & \frac{4 \cdot EI}{l} \end{bmatrix}$$

Dane wejściowe

$$\begin{aligned} EA &:= 1.5 \cdot 10^5 & EI &:= 3375 & \text{top} &:= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ x_1 &:= 3 & y_1 &:= 0 & l_1 &:= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} & \cos 1 &:= \frac{x_1}{l_1} & \sin 1 &:= \frac{y_1}{l_1} \\ x_2 &:= -3 & y_2 &:= -4 & l_2 &:= \sqrt{x_2^2 + y_2^2} & \cos 2 &:= \frac{x_2}{l_2} & \sin 2 &:= \frac{y_2}{l_2} \end{aligned}$$

Macierze Boole'a

$$i := 1..3$$

$$B_{1,6,9} := 0$$

$$B_{2,6,9} := 0$$

$$B_{1,3 \cdot (\text{top}_{1,1} - 1) + i} := 1$$

$$B_{2,3 \cdot (\text{top}_{2,1} - 1) + i} := 1$$

$$B_{1,3 + 3 \cdot [\text{top}_{(1,2)} - 1] + i} := 1$$

$$B_{2,3 + 3 \cdot [\text{top}_{(2,2)} - 1] + i} := 1$$

Macierze sztywności w konfiguracji lokalnej

$$k_1 := k(EA, EI, l_1) \quad k_1 = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -5 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 \cdot 10^3 & 2.25 \cdot 10^3 & 0 & -1.5 \cdot 10^3 & 2.25 \cdot 10^3 \\ 0 & 2.25 \cdot 10^3 & 4.5 \cdot 10^3 & 0 & -2.25 \cdot 10^3 & 2.25 \cdot 10^3 \\ -5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 5 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 \cdot 10^3 & -2.25 \cdot 10^3 & 0 & 1.5 \cdot 10^3 & -2.25 \cdot 10^3 \\ 0 & 2.25 \cdot 10^3 & 2.25 \cdot 10^3 & 0 & -2.25 \cdot 10^3 & 4.5 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

$$k_2 := k(EA, EI, l_2) \quad k_2 = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -3 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 324 & 810 & 0 & -324 & 810 \\ 0 & 810 & 2.7 \cdot 10^3 & 0 & -810 & 1.35 \cdot 10^3 \\ -3 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 3 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -324 & -810 & 0 & 324 & -810 \\ 0 & 810 & 1.35 \cdot 10^3 & 0 & -810 & 2.7 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

Macierze transformacji i sztywności w konfiguracji globalnej dla elementów

$$T_1 := T(\cos 1, \sin 1) \quad T_2 := T(\cos 2, \sin 2)$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_1 := T_1^T \cdot k_1 \cdot T_1$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -5 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 \cdot 10^3 & 2.25 \cdot 10^3 & 0 & -1.5 \cdot 10^3 & 2.25 \cdot 10^3 \\ 0 & 2.25 \cdot 10^3 & 4.5 \cdot 10^3 & 0 & -2.25 \cdot 10^3 & 2.25 \cdot 10^3 \\ -5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 5 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 \cdot 10^3 & -2.25 \cdot 10^3 & 0 & 1.5 \cdot 10^3 & -2.25 \cdot 10^3 \\ 0 & 2.25 \cdot 10^3 & 2.25 \cdot 10^3 & 0 & -2.25 \cdot 10^3 & 4.5 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

$$K_2 := T_2^T \cdot k_2 \cdot T_2$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1.101 \cdot 10^4 & 1.424 \cdot 10^4 & 648 & -1.101 \cdot 10^4 & -1.424 \cdot 10^4 & 648 \\ 1.424 \cdot 10^4 & 1.932 \cdot 10^4 & -486 & -1.424 \cdot 10^4 & -1.932 \cdot 10^4 & -486 \\ 648 & -486 & 2.7 \cdot 10^3 & -648 & 486 & 1.35 \cdot 10^3 \\ -1.101 \cdot 10^4 & -1.424 \cdot 10^4 & -648 & 1.101 \cdot 10^4 & 1.424 \cdot 10^4 & -648 \\ -1.424 \cdot 10^4 & -1.932 \cdot 10^4 & 486 & 1.424 \cdot 10^4 & 1.932 \cdot 10^4 & 486 \\ 648 & -486 & 1.35 \cdot 10^3 & -648 & 486 & 2.7 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

Agregacja macierzy sztywności

$$K := B_1^T \cdot K_1 \cdot B_1 + B_2^T \cdot K_2 \cdot B_2$$

$$K = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 \cdot 10^3 & 2.25 \cdot 10^3 & 0 & -1.5 \cdot 10^3 & 2.25 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.25 \cdot 10^3 & 4.5 \cdot 10^3 & 0 & -2.25 \cdot 10^3 & 2.25 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 6.101 \cdot 10^4 & 1.424 \cdot 10^4 & 648 & -1.101 \cdot 10^4 & -1.424 \cdot 10^4 & 648 \\ 0 & -1.5 \cdot 10^3 & -2.25 \cdot 10^3 & 1.424 \cdot 10^4 & 2.082 \cdot 10^4 & -2.736 \cdot 10^3 & -1.424 \cdot 10^4 & -1.932 \cdot 10^4 & -486 \\ 0 & 2.25 \cdot 10^3 & 2.25 \cdot 10^3 & 648 & -2.736 \cdot 10^3 & 7.2 \cdot 10^3 & -648 & 486 & 1.35 \cdot 10^3 \\ 0 & 0 & 0 & -1.101 \cdot 10^4 & -1.424 \cdot 10^4 & -648 & 1.101 \cdot 10^4 & 1.424 \cdot 10^4 & -648 \\ 0 & 0 & 0 & -1.424 \cdot 10^4 & -1.932 \cdot 10^4 & 486 & 1.424 \cdot 10^4 & 1.932 \cdot 10^4 & 486 \\ 0 & 0 & 0 & 648 & -486 & 1.35 \cdot 10^3 & -648 & 486 & 2.7 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

Wektor zastępników

$$z_1 := Z_s(48, 3)$$

$$z_2 := Z_c(-12, 4)$$

$$Z_1 := z_1$$

$$Z_2 := (T(0, -1))^T \cdot z_2$$

$$Z := B_1^T \cdot Z_1 + B_2^T \cdot Z_2$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 18 \\ 0 \\ 24 \\ -18 \end{bmatrix} \quad z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -24 \\ -16 \\ 0 \\ -24 \\ 16 \end{bmatrix} \quad Z_2 = \begin{bmatrix} -24 \\ 0 \\ -16 \\ -24 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 18 \\ -24 \\ 24 \\ -34 \\ -24 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Wektor sił węzłowych

$$P_9 := 0 \quad P_6 := 12$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wektor obciążenia kinematycznego

$$Q_{wb_9} := 0$$

$$Q_{wb_9} := -0.005$$

$$Q_{wb} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Wektor prawej strony równania MES

Warunki brzegowe (1 - zablokowany stopień swobody)

$$S := Z + P - K \cdot Q_{wb} \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 18 \\ -20.76 \\ 21.57 \\ -15.25 \\ -27.24 \\ 2.43 \\ 29.5 \end{bmatrix}$$

$$war := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$$i := 1..9 \quad I := \text{identity}(9) \quad Id_{i,i} := war_i \quad Ip := I - Id \quad KK := Ip \cdot K \cdot Ip + Id \quad SS := Ip \cdot S$$

$$KK = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 \cdot 10^3 & 0 & 0 & -1.5 \cdot 10^3 & 2.25 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.101 \cdot 10^4 & 1.424 \cdot 10^4 & 648 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 \cdot 10^3 & 0 & 1.424 \cdot 10^4 & 2.082 \cdot 10^4 & -2.736 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.25 \cdot 10^3 & 0 & 648 & -2.736 \cdot 10^3 & 7.2 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad SS = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \\ -20.76 \\ 21.57 \\ -15.25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań - wektor przemieszczeń węzłowych i wektor reakcji

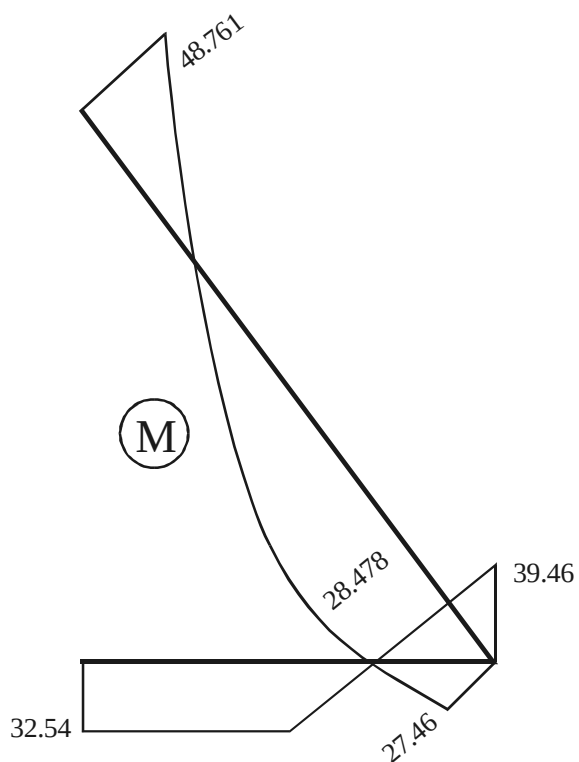
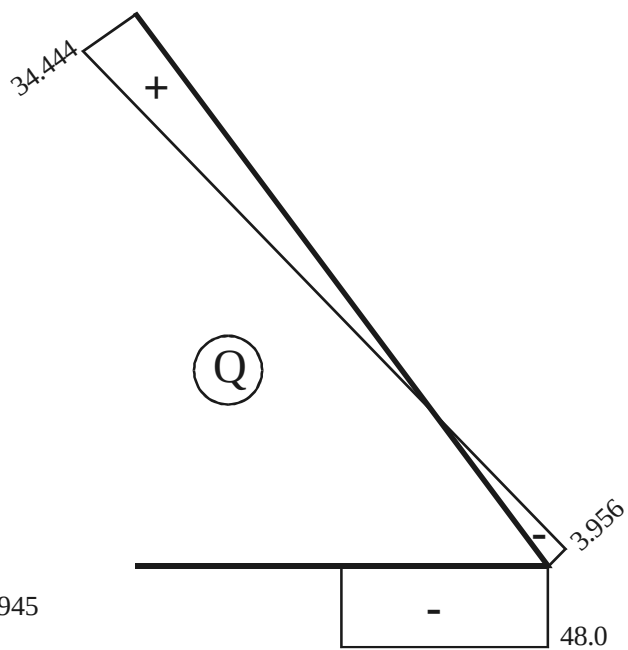
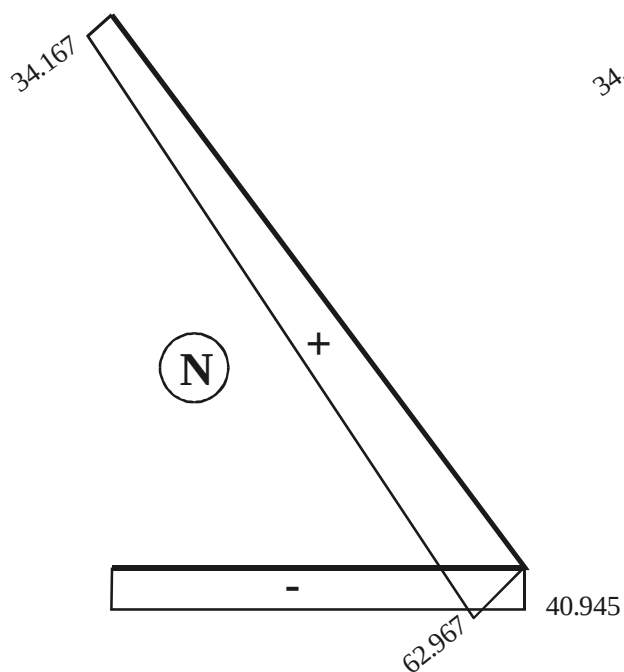
$$Q := KK^{-1} \cdot SS + Q_{wb} \quad R := K \cdot Q - Z - P \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.038 \\ 0 \\ -8.189 \cdot 10^{-4} \\ 2.638 \cdot 10^{-3} \\ -0.013 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 40.945 \\ 3.553 \cdot 10^{-15} \\ 32.54 \\ 0 \\ -3.553 \cdot 10^{-15} \\ 3.553 \cdot 10^{-15} \\ 7.055 \\ -48 \\ -48.761 \end{bmatrix}$$

Powrót do elementów - obliczenie sił przywęzłowych w elementach

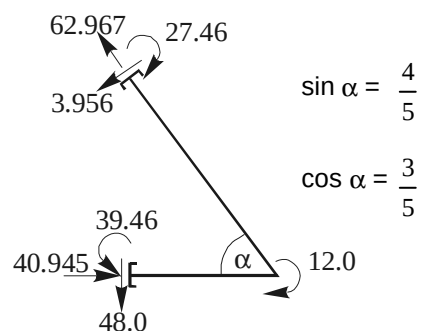
$$f_1 := T_1 \cdot (K_1 \cdot B_1 \cdot Q - Z_1) \quad f_2 := T_2 \cdot (K_2 \cdot B_2 \cdot Q - Z_2)$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 40.945 \\ 3.553 \cdot 10^{-15} \\ 32.54 \\ -40.945 \\ -48 \\ 39.46 \end{bmatrix} \quad f_2 = \begin{bmatrix} -62.967 \\ 3.956 \\ -27.46 \\ 34.167 \\ 34.444 \\ -48.761 \end{bmatrix}$$

Wykresy sił przekrojowych



Równowaga węzła



$$\sum x=0 \quad 40.945 - 62.967 \cdot \frac{3}{5} - 3.956 \cdot \frac{4}{5} = 0$$

$$\sum y=0 \quad -48 + 62.967 \cdot \frac{4}{5} - 3.956 \cdot \frac{3}{5} = 3.553 \cdot 10^{-15}$$

$$\sum M=0 \quad 27.46 + 12 - 39.46 = 0$$