Zadanie 1. Rozwiąż poniższy układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

metodą eliminacji Gaussa.

Odpowiedź:

- triangulacja do postaci górnotrókątnej:

$$\left|\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right|$$

- rozwiązywanie układu równań o postaci górnotrókątnej

$$\begin{array}{lll} -13x_4 = -13 & & \Longrightarrow \mathbf{x_4 = 1} \\ 3x_3 + 13x_4 = 13 & \Longrightarrow 3x_3 + 13 \cdot 1 = 13 & \Longrightarrow \mathbf{x_3 = 0} \\ -x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 & \Longrightarrow -x_2 - 0 - 5 \cdot 1 = -7 & \Longrightarrow \mathbf{x_2 = 2} \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 & \Longrightarrow x_1 + 2 + 3 \cdot 1 = 4 & \Longrightarrow \mathbf{x_1 = -1} \end{array}$$

Zadanie 2. Określić, które macierze są nieosobliwe i obliczyć ich odwrotność.
(Macierze odwrotne obliczyć metodami Gaussa–Jordana oraz korzystając z rozkładu $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$)

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 3. Rozłożyć daną macierz A do postaci LL^T. Korzystając z macierzy po rozkładzie rozwiązać układ równań, gdzie B jest wektorem prawych stron $A * x = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \\ 6 & 9 & 22 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4. Rozwiąż podany układ równań wykorzystując rozkład LL^T metodą Choleskiego–Banachiewicza:

$$\begin{bmatrix} 64 & 8 & 16 \\ 8 & 37 & 8 \\ 16 & 8 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 \\ -58 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5. Rozwiąż podany układ równań wykorzystując rozkład LL^T metodą Choleskiego–Banachiewicza: 1

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -11 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Zadanie 6. Rozwiązać układy równań metodami Gaussa i Gaussa-Jordana

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 11 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= -9 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Sprawdzić dodatnią określoność macierzy układu korzystając z twierdzenia Silvestera.

Zadanie 7. Rozwiązać układy równań metodą Choleskiego-Banachiwicza (rozkład LL^T)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Stosując dwa rozkłady: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T$ i $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^T$

Zadanie 8. Sprawdzić, czy wielomian $H(x) = -x^4 + 2x^2$ jest wielomianem Hermite'a dla funkcji $f(x) = x^2 e^{1-x^2}$ przy wyborze następujących węzłów: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.
Wskazówka: $(e^{ax})' = ae^{ax}$.

Zadanie 9. Stosując interpolację Hermite'a obliczyć $f(2.5)$ dla

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.2	0.5208	-0.001488
2.6	0.4813	-0.1884

Zadanie 10. Dla funkcji $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$ obliczyć $f(1.03)$ za pomocą wzoru interpolacyjnego Hermite'a stopnia 3, przyjmując punkty węzłowe $x_0 = 1$ i $x_1 = 1.05$. Oszacować błąd interpolacji.

Zadanie 11. Wyznaczyć wielomian interpolacyjny Hermite'a oraz policzyć sin(0.34) dla danych

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0.30	0.2955	0.9553
0.32	0.3146	0.9492
0.35	0.3429	0.9394

Oszacować błąd interpolacji.

Zadanie 12. Na podstawie danej tablicy pomiarów prędkości ruszającego samochodu:

i	0	1	2	3
$t[s]$	0	5	10	15
$V(t)[m/s]$	0	3.5	12	28.5

a) wyznacz postać funkcji prędkości stosując odpowiednie wielomiany bazowe Lagrange'a.

b) Ile wynosi prędkość dla $t = 8$ s ?

Zadanie 13. Obliczyć wartość $\sqrt{1.17}$ mając daną tablicę:

x	1.1	1.15	1.2
$\sqrt{x}$	1.0488	1.0724	1.0954

i stosując
a) interpolację liniową
b) interpolację Lagrange'a, z wykorzystaniem wszystkich węzłów

---

Zadanie 14. Znaleźć wielomian interpolacyjny, który w punktach -2, 1, 2, 4 przyjmuje wartości odpowiednio 3, 1, -3, 8.

Zadanie 15. Znaleźć wielomian Lagrange'a $L_2^3(x)$ dla funkcji o stabelaryzowanych rzędnych i narysować jego schematyczny wykres.

i	0	1	2	3
x	0	1	2	3
y	0	1	4	1

Zadanie 16. Wyznaczyć wielomiany interpolacyjne Lagrange'a stopnia 1, 2, 3 i 4 i obliczyć f(2.5) jeśli:

$$f(2) = 0.5104$$
$$f(2.2) = 0.5208$$
$$f(2.4) = 0.5104$$
$$f(2.6) = 0.4813$$
$$f(2.8) = 0.4359$$

Zadanie 17. Dla danych:

$$f(1.00) = 0.1924 \quad f(1.05) = 0.2414$$
$$f(1.10) = 0.2933 \quad f(1.15) = 0.3492$$

wyznaczyć wielomian interpolacyjny Lagrange'a stopnia 3 dla obliczenia $f(1.09)$. Interpolowaną funkcją jest $f(x) = \log_{10}\tan(x)$. Oszacować błąd interpolacji.

Zadanie 18. Znaleźć wielomian Lagrange'a $L_1^3(x)$ dla stabelaryzowanej funkcji i narysować jego wykres.

i	0	1	2	3
x	-2	0	1	2
y	3	-1	1	5

Odpowiedź:

$$L_1^3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$
$$L_1^3(x) = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{4}$$

Zadanie 19. Korzystając z węzłów $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$ znaleźć wielomian interpolacyjny dla funxcji $f(x) = 1/x$.

Odpowiedź:

$$L_0(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = x^2 - 6.5x + 10 \ ,$$
$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{1}{3}(-4x^2 + 24x - 32) \ ,$$
$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4.5x + 5) \ .$$

Obliczając wartości funkcji:

$$f(x_0) = f(2) = 0.5 \ ,$$
$$f(x_1) = f(2.5) = 0.4 \ ,$$
$$f(x_2) = f(4) = 0.25 \ ,$$

dostajemy

$$\begin{aligned} P(x) = &\sum_{k=0}^{2} f(x_k)L_k(x) \\ =&0.5(x^2 - 6.5x + 10) + \frac{0.4}{3}(-4x^2 + 24x - 32) \\ &+ \frac{0.25}{3}(x^2 - 4.5x + 5) \\ =&0.05x^2 - 0.425x + 1.15 \end{aligned}$$

Zadanie 20. Dla danych:

$f(1.0) = 1.00000 \quad f(1.2) = 1.55271 \quad f(1.4) = 2.61170$

$f(1.1) = 1.23368 \quad f(1.3) = 1.99327$

wyznaczyć wielomian interpolacyjny Lagrange'a stopnia 4 dla obliczenia $f(1.25)$. Interpolowaną funkcją jest $f(x) = e^{x^2-1}$. Oszacować błąd interpolacji.

Zadanie 21. Stosując interpolację Hermite'a obliczyć f(1.25) dla

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.1	0.4860	2.910
1.3	0.8616	4.918

Odpowiedź:

1. I sposób z wykorzystaniem wzorów wyprowadzonych na wykładzie:

   Transformacja : $x \longrightarrow \xi$
   $$\xi = \frac{x-1.1}{1.3-1.1} = \frac{x-1.1}{0.2}$$
   $l = 1.3 - 1.1 = 0.2$

   $H_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$
   $H_2(\xi) = l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$
   $H_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$
   $H_4(\xi) = l(-\xi^2 + \xi^3)$

   $\varphi(x = 1.25) = \varphi(\xi = \frac{1.25-1.1}{1.3-1.1} = 0.75)$
   $\varphi(\xi = 0.75) = H_1(\xi = 0.75) \cdot 0.4860 + H_2(\xi = 0.75) \cdot 2.9100 + H_3(\xi = 0.75) \cdot 0.8616 + H_4(\xi = 0.75) \cdot 4.918 = 0.6919$

2. II sposób

   $\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
   $\varphi'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$

   $\varphi(x = 1.1) = 0.4860 = a_0 + a_1 1.1 + a_2(1.1)^2 + a_3(1.1)^3$
   $\varphi'(x = 1.1) = 2.910 = a_1 + 2a_2 1.1 + 3a_3(1.1)^2$

   $\varphi(x = 1.3) = 0.8616 = a_0 + a_1 1.3 + a_2(1.3)^2 + a_3(1.3)^3$
   $\varphi'(x = 1.3) = 4.918 = a_1 + 2a_2 1.3 + 3a_3(1.3)^2$

   Postać macierzowa powyższego układu równań:
   $$\begin{bmatrix} 1 & 1.1 & 1.1^2 & 1.1^3 \\ 0 & 1 & 2 \cdot 1.1 & 3 \cdot 1.1^2 \\ 1 & 1.3 & 1.3^2 & 1.3^3 \\ 0 & 1 & 2 \cdot 1.3 & 3 \cdot 1.3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4860 \\ 2.910 \\ 0.8616 \\ 4.918 \end{bmatrix}$$

   Rozwiązanie powyższego układu równań:

   $a_0 = -169.09$, $a_1 = 428.59$, $a_2 = -361.46$, $a_3 = 101.80$

   Stąd: $\varphi(x) = -169.09 + 428.59x - 361.46x^2 + 101.80x^3$

   a $\varphi(1.25) = 0.69188$

Zadanie 22. Dana jest funkcja o stabelaryzowanych rzędnych: 2

i	0	1	2	3
x	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/2$
y	1	-8	-3	1

Znaleźć równanie krzywej najlepiej aproksymującej daną funkcję w sensie najmniejszych kwadratów. Jako funkcje bazowe przyjąć: $\Theta_0 = 1$, $\Theta_1 = \sin(x)$. Znaleźć wartość w punkcie $x_0 = \pi/4$.

Odpowiedź:
Funkcja aproksymująca:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 \sin(x) \quad .$$

Błąd:

$$\begin{aligned}\epsilon =& \sum_{i=0}^{3} [\varphi(x_i) - f_i]^2 = \\ =&(a_0 - \frac{1}{2}a_1 - 1)^2 + (a_0 + 8)^2 + (a_0 + \frac{1}{2}a_1 + 3)^2 + (a_0 + a_1 - 1)^2\end{aligned}$$

Z warunków $\dfrac{\partial \epsilon}{\partial a_j} = 0,\ j = 0, 1$ dostajemy

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ 2 \end{bmatrix} \quad .$$

Po rozwiązaniu powyższego układu $a_0 = -\frac{5}{2}$, $a_1 = 1$.
Funkcja aproksymująca $\varphi(x) = -\frac{5}{2} + \sin(x)$,
$\varphi(\pi/4) = \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{2}) \approx -1.79289$

Odpowiedź: $\varphi(x) = -\frac{5}{2} + \sin(x)$,
$\varphi(\pi/4) = \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{2}) \approx -1.79289$

Zadanie 23. Dana jest funkcja o stabelaryzowanych rzędnych:

x	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/2$
y	1	-2	-3	1

a) Znaleźć równanie krzywej najlepiej aproksymującej daną funkcję w sensie najmniejszych kwadratów.
Jako funkcje bazowe przyjąć :$\Phi_0 = 1$, $\Phi_1 = sinx$.
Podać wartość w punkcie $x_0 = \pi/4$.

b) Obliczyć wartość funkcji w punkcie $x_0 = \pi/4$ korzystając z interpolacji odcinkowo liniowej.

c) Obliczyć błąd względny rozwiązania dla obu przypadków wiedząc, że wynik ścisły wynosi $f(x_0 = \pi/4) = -11/4$.

Zadanie 24. Dana jest funkcja o stabelaryzowanych rzędnych. Znaleźć równanie krzywej najlepiej aproksymującej daną funkcję w sensie najmniejszych kwadratów. Przyjąć funkcje bazowe

$$\Phi_1(x) = \frac{3x}{\pi} \qquad\qquad \Phi_2(x) = \cos(x)$$

Obliczyć wartość funkcji aproksymującej w punkcie $x_0 = \pi/4$.

i	0	1	2	3
x	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$
y	-3	-10	20	3

Odpowiedź:
Funkcja aproksymująca:

$$\varphi(x) = A_1\Phi(x) + A_2\Phi(x)$$

Korzystając z definicji błędu aproksymacji

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{n}(\varphi(x_i) - y_i)^2$$

i warunków najlepszej aproksymacji

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial A_1} = 0$$
$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial A_2} = 0$$

dostajemy układ równań na współczynniki A_1 i A_2 postaci

$$\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{y}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \Phi_1(x_0) & \Phi_2(x_0) \\ \Phi_1(x_1) & \Phi_2(x_1) \\ \Phi_1(x_2) & \Phi_2(x_2) \\ \Phi_1(x_3) & \Phi_2(x_3) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Po wymnożeniu i rozwiązaniu poniższego układu

$$\begin{bmatrix} \frac{13}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 5 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy A_1=6 i A_2=10. Wartość funkcji aproksymującej w punkcie $\frac{\pi}{4}$

$$\varphi(\frac{\pi}{4}) = 6\Phi_1(\frac{\pi}{4}) + 10\Phi_2(\frac{\pi}{4}) = 4.5 + 5\sqrt{2}$$

Zadanie 25. Dana jest funkcja o stabelaryzowanych rzędnych. Znaleźć wielomian stopnia pierwszego najlepiej aproksymujący daną funkcję w sensie najmniejszych kwadratów. Obliczyć wartość wielomianu aproksymujcego w punkcie $x_0 = 0.5$.

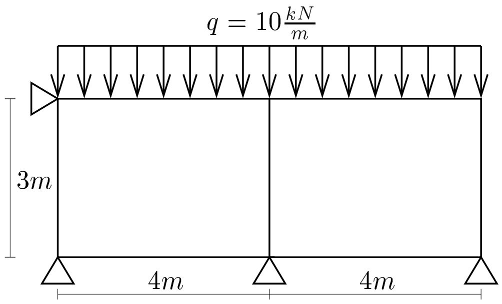
i	0	1	2	3
x	-1	0	1	2
y	-3	-10	1	3

Zadanie 26. Obliczyć metodą najmniejszych kwadratów wielomiany aproksymacyjne stopnia 1, 2, 3 i 4 dla danych:

i	x_i	y_i
0	0.00	1.000
1	0.15	1.004
2	0.31	1.031
3	0.50	1.117
4	0.60	1.223
5	0.70	1.422

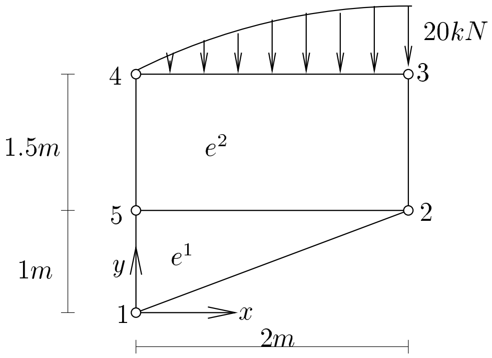
Który wielomian daje najlepszą aproksymację?

Zadanie 27. Rozwiązać problem płaskiego stanu naprężenia za pomocą MES. Obliczyć przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia.



$t = 0.2m$
$E = 20000\frac{kN}{m^2}$
$\nu = 0.3$

Zadanie 28. Dla podanej tarczy:



$h = 0.2m$

$$\mathbf{D}^1 = \mathbf{D}^2 = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 40 & 0 \\ 40 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix} (kN/m^2)$$

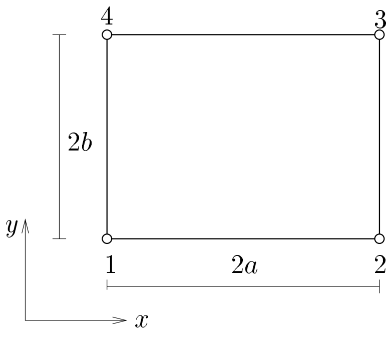
$\mathbf{Q} = \{0\ 0\ a\ b\ c\ d\ 0\ 0\ 0\ 0\}(m)$

a, b, c, d – dane

Obliczyć:

1. Wektor prawej strony $\mathbf{F}$,
2. Wektor naprężenia dla elementu 2,
3. Rozpisać na oznaczeniach ogólnych postać globalnej macierzy sztywności

Funkcje kształtu dla elementu czterowęzłowego mają postać:

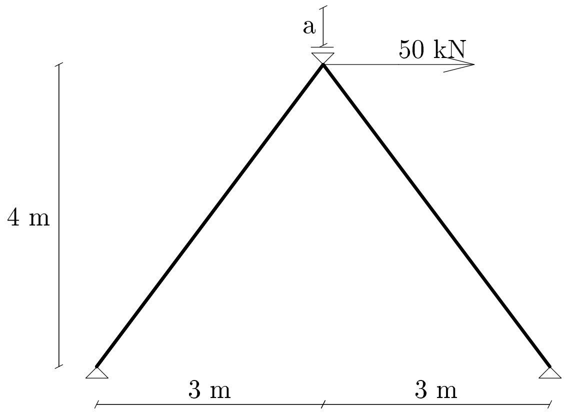


$$N_1^e = \frac{1}{A}(x - x_2)(y - y_4)$$
$$N_2^e = -\frac{1}{A}(x - x_1)(y - y_3)$$
$$N_3^e = \frac{1}{A}(x - x_4)(y - y_2)$$
$$N_4^e = -\frac{1}{A}(x - x_3)(y - y_1)$$
$$A = 4ab$$

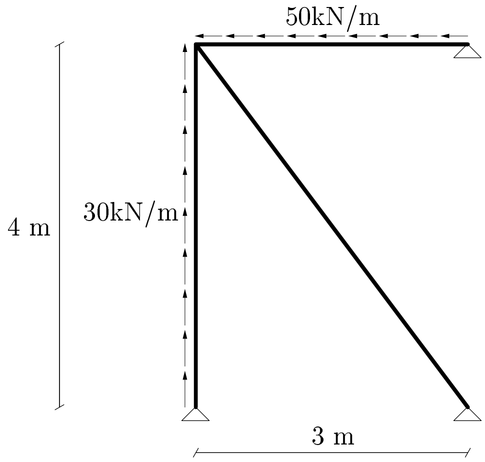
Zadanie 29. Rozwiązać poniższe układy kratowe za pomocą MES

3

1. $a = 5cm$ – pionowe przesunięcie podpory
   EA=10^4 kN

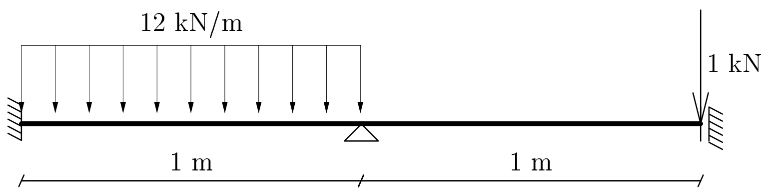


2. $EA = 10^4$ kN



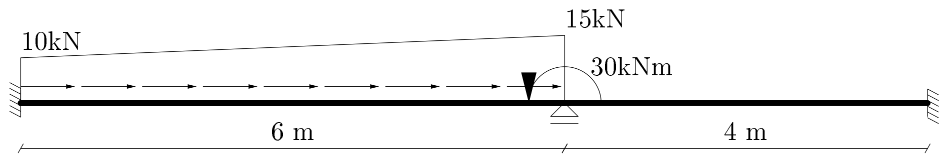
Zadanie 30. Rozwiązać poniższe belki, ramy za pomocą MES

1. $EJ = 1\text{kNm}^2$

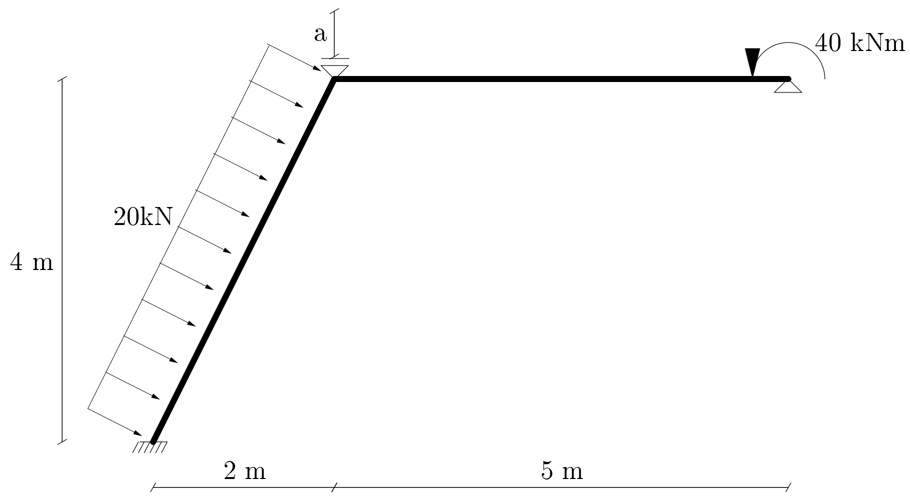


Zadanie 31. Rozwiązać poniższe ramy za pomocą MES

1. $EA = 10^4$ kN
   $EJ = 1$ kNm^2



2. $a = 4$ cm
   $E = 205$ MPa
   $A = 2 \cdot 10^{-3} m^2$
   $J = 10^{-6} m^4$



3. $E = 205$ MPa
   $A = 2 \cdot 10^{-3} m^2$
   $J = 10^{-6} m^4$