

ROZWIĄZANIE PROBLEMU NIELINIOWEGO

PODSTAWY KOMPUTEROWEJ MECHANIKI MATERIAŁÓW
Budownictwo, studia I stopnia, semestr VII
przedmiot fakultatywny
rok akademicki 2012/2013

Instytut L-5, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska

ADAM WOSATKO
JERZY PAMIN



Tematyka zajęć

- 1 Dyskretyzacja MES
- 2 Zagadnienia nieliniowe
 - Nieliniowość geometryczna
 - Nieliniowość fizyczna
- 3 Analiza przyrostowo-iteracyjna

Źródła:



R. de Borst and L.J. Sluys.

Computational methods in nonlinear solid mechanics.

Lecture Notes, Delft University of Technology, Delft, 1999.



DIANA Finite Element Analysis - User's manual, release 7.2.

TNO Building and Construction Research, Delft, 1999.



Równania równowagi ciała odkształcalnego (kontinuum)

Równania równowagi oraz statyczne warunki brzegowe:

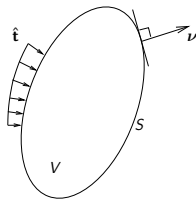
$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \text{ w } V, \quad \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \hat{\mathbf{t}} \text{ na } S$$

gdzie:

\mathbf{L} – macierz operatorów różniczkowych

$\boldsymbol{\sigma}$ – tensor/wektor uogólnionych naprężeń

$\hat{\mathbf{b}}$ – wektor sił masowych



Słaba forma równań równowagi

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \hat{\mathbf{b}}) dV = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

Zasada prac wirtualnych $\delta W_{int} = \delta W_{ext}$:

$$\int_V (\mathbf{L} \delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{b}} dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} dS$$

gdzie:

\mathbf{u} – wektor uogólnionych przemieszczeń



Dyskretyzacja MES

Przemieszczeniowa wersja MES:

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^{n_w} N_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{q}_i = \mathbf{N} \mathbf{q}^e$$

gdzie: \mathbf{N} - funkcje kształtu.

Transformacja węzłowych stopni swobody:

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{Q}$$

Słaba forma równań równowagi dla układu zdyskretyzowanego:

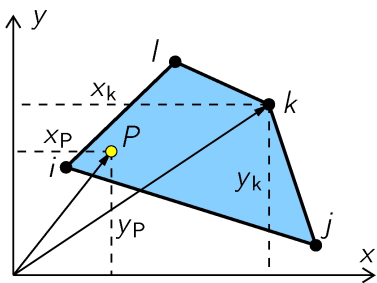
$$\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}^{eT} \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{F}_{ext}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}$$

Stosujemy podejście izoparametryczne i całkowanie numeryczne.



Kiedy ES są izoparametryczne?

Aproksymacja geometrii:



$\forall P \in \Omega^e : \mathbf{x}_P(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{x}^e$,
gdzie:

$$\mathbf{x}_P = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^e = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \\ x_k \\ y_k \\ x_l \\ y_l \end{bmatrix}$$

ES jest izoparametryczny jeśli do aproksymacji geometrii i pola przemieszczeń wykorzystujemy **te same węzły** i **te same funkcje kształtu**.

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{x}^e \quad \mathbf{u}(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{q}^e$$

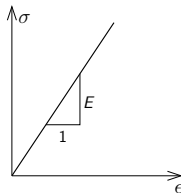
Liniowa sprężystość

Prawo Hooke'a

Notacja tensorowa: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}$, $\sigma_{ij} = D_{ijkl}\epsilon_{kl}$

Notacja macierzowa:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$



Liniowe związki kinematyczne

Notacja tensorowa: $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]$, $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

Notacja macierzowa: $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$

Zatem tensor naprężenia:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{T}^e\mathbf{Q}$$

Równania równowagi dla układu zdyskretyzowanego

$$\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}^e \mathbf{T}^{eT} \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{T}^e \mathbf{Q} = \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad \mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{F}_{\text{ext}}$$

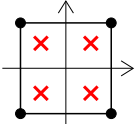
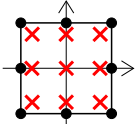
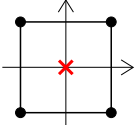
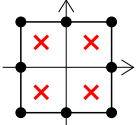


Całkowanie numeryczne ES

Kwadratura Gaussa (2D)

$$\mathbf{k}^e = \iint_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} h \, dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}(\xi, \eta)^T \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi, \eta) h \det \mathbf{J} \, d\xi d\eta$$

$$\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i w_j \mathbf{B}_{(i,j)}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{(i,j)} h \det \mathbf{J}_{(i,j)}$$

Całkowanie	Q4	Q8
pełne (F1)		
zredukowane (R1)		

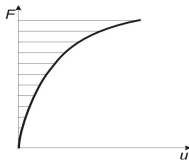
Problem nieliniowy

\mathbf{F}_{ext} przykładane w przyrostach

$$t \rightarrow t + \Delta t$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}^t + \Delta \boldsymbol{\sigma}$$

Poszukiwanie **równowagi** w chwili $t + \Delta t$:



$$\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}^{eT} \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} dV = \mathbf{F}_{ext}^{t+\Delta t}$$

$$\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}^{eT} \int_{V^e} \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{F}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{int}^t$$

gdzie: $\mathbf{F}_{int}^t = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}^{eT} \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^t dV$

Linearyzacja lewej strony w chwili czasu t :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \Delta \boldsymbol{\sigma}(\Delta \boldsymbol{\epsilon}(\Delta \mathbf{u}))$$

Dotąd nie założono nic odnośnie kinematyki,
ani właściwości materiału!

Źródła nieliniowości

Spowodowane zmianą geometrii ciała (odkształcalnego):

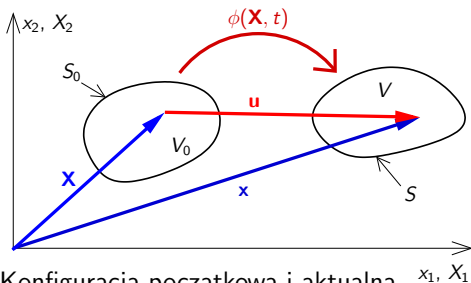
- duże odkształcenia (np. guma, formowanie metali),
- duże przemieszczenia (np. konstrukcje smukłe, cienkościenne),
- kontakt (oddziaływanie stykających się ciał),
- obciążenie śledzące (zależne od deformacji ciała).

Spowodowane nieliniowymi związkami konstytutywnymi:

- plastyczność (odkształcenia trwałe),
- uszkodzenie (degradacja własności sprężystych),
- zarysowanie (kontynuualna reprezentacja rys).
- ...

Nie obowiązuje zasada superpozycji.

Nieliniowość geometryczna



Konfiguracja początkowa i aktualna x_1, X_1

Funkcja ruchu: $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$

Wektor przemieszczenia: $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}$

Gradient deformacji (podstawowa miara deformacji): $\mathbf{F} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}$

Tensor odkształcenia Greena (jedna z możliwych miar odkształcenia):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}[\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u})^T + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u})^T \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}]$$



Nieliniowość geometryczna

Nieliniowe związki kinematyczne, np. $\varepsilon_x = \varepsilon_x^L + \varepsilon_x^N = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$

$$\Delta \sigma = \Delta \sigma(\Delta \epsilon(\Delta \mathbf{u}))$$

- Równania równowagi opisują równowagę ciała zdeformowanego. Zasadę prac wirtualnych można zapisać w konfiguracji początkowej lub aktualnej.
- Różnym miarom odkształcenia odpowiadają różne miary naprężenia.
- Małe odkształcenia: $\mathbf{E} \approx \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] < 2\%$.
- Małe przemieszczenia (uogólnione): $V \approx V_0$ (jeden opis, zasada zeszywnienia).



Nieliniowość geometryczna

Równowaga układu zdyskretyzowanego:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{F}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{int}^t$$

gdzie **styczna macierz sztywności**:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_\sigma$$

\mathbf{K}_0 - macierz sztywności liniowej

\mathbf{K}_u - macierz sztywności przemieszczeniowej

(macierz dyskretnych związków kinematycznych \mathbf{B} zależna od przemieszczeń)

\mathbf{K}_σ - macierz sztywności naprężeniowej (zależna od naprężeń uogólnionych)



Nieliniowość fizyczna

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{F}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{int}^t$$

Linearyzacja lewej strony w chwili czasu t :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \Delta \boldsymbol{\sigma}(\Delta \boldsymbol{\epsilon}(\Delta \mathbf{u}))$$

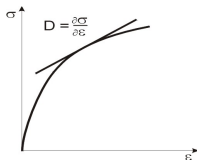
$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)^t \left(\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \mathbf{u}} \right)^t \Delta \mathbf{u}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}, \quad \mathbf{L} = \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \mathbf{u}}$$

Dyskretyzacja:

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \Delta \mathbf{q}^e$$

$$\Delta \mathbf{q}^e = \mathbf{T}^e \Delta \mathbf{Q}$$



Liniowe związki geometryczne \rightarrow macierz dyskretnych związków kinematycznych \mathbf{B} niezależna od przemieszczeń

Nieliniowość fizyczna

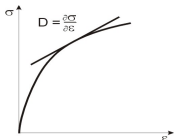
$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{F}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{int}^t$$

Styczna macierz sztywności

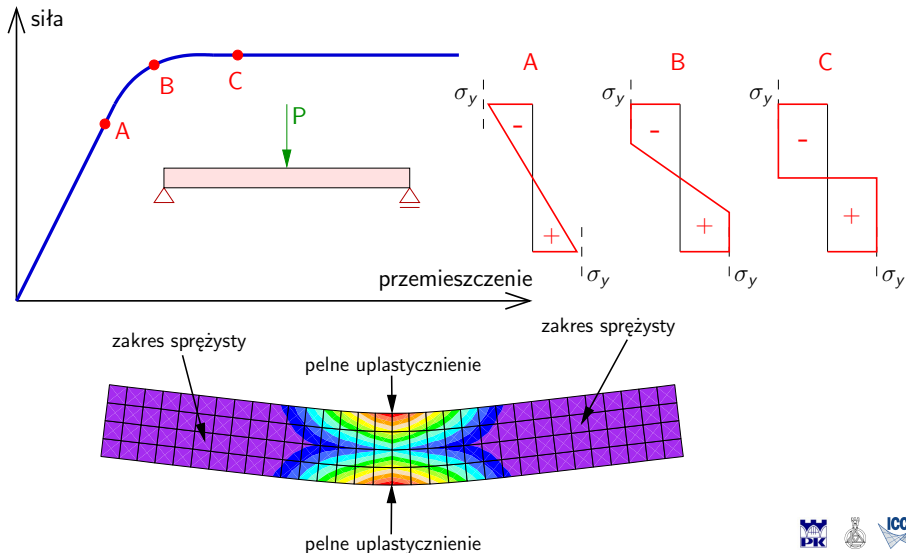
$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}^e \mathbf{T}^{eT} \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{A}^e$$

Ograniczamy się do **nieliniowości fizycznych!**

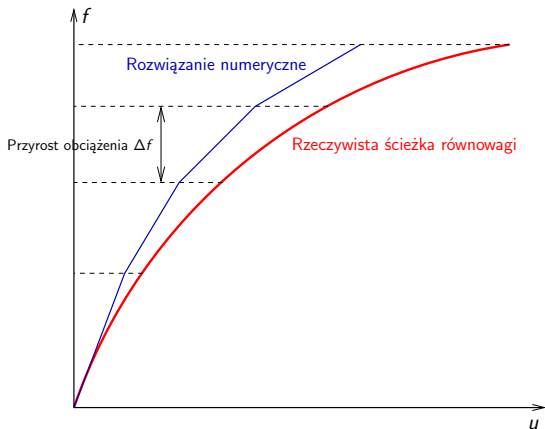
Konieczne poprawki iteracyjne celem osiągnięcia stanu równowagi w chwili $t + \Delta t \rightarrow$ algorytm Newtona-Raphsona



Uplastycznienie materiału



Analiza przyrostowa

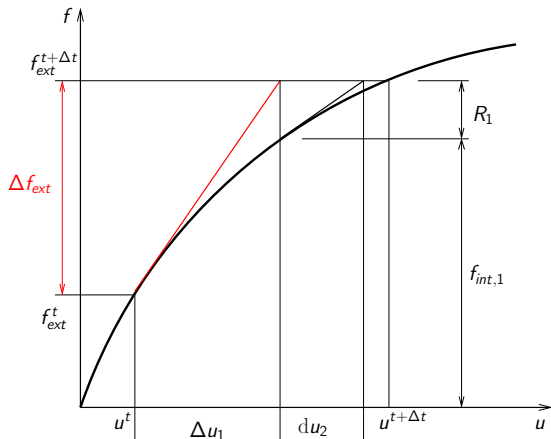


Jak poprawić rozwiązanie w kolejnych przyrostach?

Schemat metody przyrostowo-iteracyjnej

Konieczne poprawki iteracyjne celem osiągnięcia stanu równowagi w chwili $t + \Delta t \rightarrow$ algorytm Newtona-Raphsona

Siły niezrównoważone (residualne): $\mathbf{R}_j = \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,j}^{t+\Delta t} \rightarrow 0$



$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int}^t$$

\mathbf{K} - operator styczny

Pierwsza iteracja:

$$\Delta \mathbf{Q}_1 = \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,0})$$

$$\sigma_1 \rightarrow \mathbf{f}_{int,1} \neq \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t}$$

Poprawki:

$$d\mathbf{Q}_j = \mathbf{K}_{j-1}^{-1} (\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,j-1}^{t+\Delta t})$$

$$\sigma_j \rightarrow \mathbf{f}_{int,j}$$

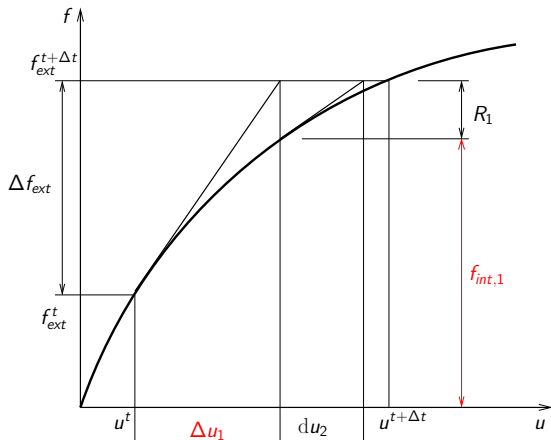
Kryterium zbieżności:

$$\frac{\|\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,j}^{t+\Delta t}\|}{\|\Delta \mathbf{f}_{ext}\|} \leq \delta$$

Schemat metody przyrostowo-iteracyjnej

Konieczne poprawki iteracyjne celem osiągnięcia stanu równowagi w chwili $t + \Delta t \rightarrow$ algorytm Newtona-Raphsona

Siły niezrównoważone (residualne): $\mathbf{R}_j = \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,j}^{t+\Delta t} \rightarrow 0$



$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int}^t$$

\mathbf{K} - operator styczny

Pierwsza iteracja:

$$\Delta \mathbf{Q}_1 = \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,0})$$

$$\sigma_1 \rightarrow \mathbf{f}_{int,1} \neq \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t}$$

Poprawki:

$$d\mathbf{Q}_j = \mathbf{K}_{j-1}^{-1} (\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,j-1}^{t+\Delta t})$$

$$\sigma_j \rightarrow \mathbf{f}_{int,j}$$

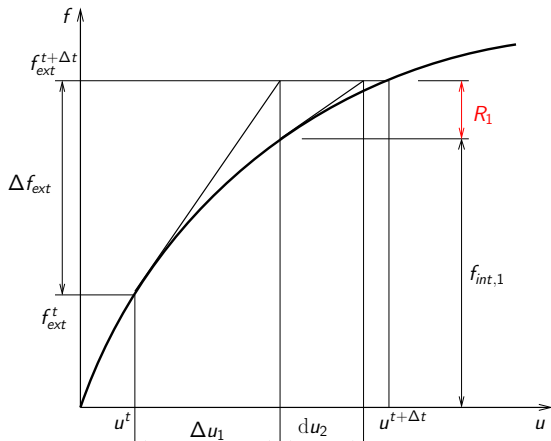
Kryterium zbieżności:

$$\frac{\|\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,j}^{t+\Delta t}\|}{\|\Delta \mathbf{f}_{ext}\|} \leq \delta$$

Schemat metody przyrostowo-iteracyjnej

Konieczne poprawki iteracyjne celem osiągnięcia stanu równowagi w chwili $t + \Delta t \rightarrow$ algorytm Newtona-Raphsona

Siły niezrównoważone (residualne): $\mathbf{R}_j = \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,j}^{t+\Delta t} \rightarrow 0$



$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int}^t$$

\mathbf{K} - operator styczny

Pierwsza iteracja:

$$\Delta \mathbf{Q}_1 = \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,0})$$

$$\sigma_1 \rightarrow \mathbf{f}_{int,1} \neq \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t}$$

Poprawki:

$$d\mathbf{Q}_j = \mathbf{K}_{j-1}^{-1} (\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,j-1}^{t+\Delta t})$$

$$\sigma_j \rightarrow \mathbf{f}_{int,j}$$

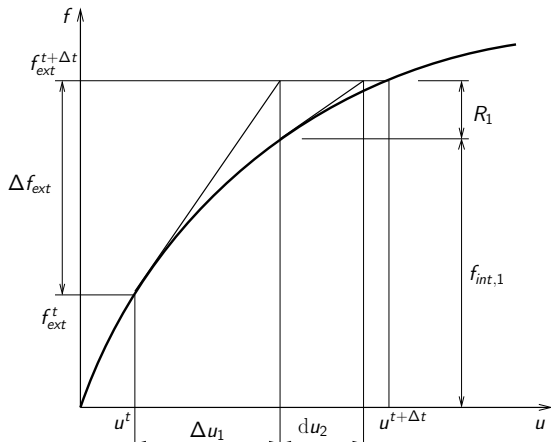
Kryterium zbieżności:

$$\frac{\|\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,j}^{t+\Delta t}\|}{\|\Delta \mathbf{f}_{ext}\|} \leq \delta$$

Schemat metody przyrostowo-iteracyjnej

Konieczne poprawki iteracyjne celem osiągnięcia stanu równowagi w chwili $t + \Delta t \rightarrow$ algorytm Newtona-Raphsona

Siły niezrównoważone (residualne): $\mathbf{R}_j = \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,j}^{t+\Delta t} \rightarrow 0$



$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int}^t$$

\mathbf{K} - operator styczny

Pierwsza iteracja:

$$\Delta \mathbf{Q}_1 = \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,0})$$

$$\sigma_1 \rightarrow \mathbf{f}_{int,1} \neq \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t}$$

Poprawki:

$$d\mathbf{Q}_j = \mathbf{K}_{j-1}^{-1} (\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,j-1}^{t+\Delta t})$$

$$\sigma_j \rightarrow \mathbf{f}_{int,j}$$

Kryterium zbieżności:

$$\frac{\|\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,j}^{t+\Delta t}\|}{\|\Delta \mathbf{f}_{ext}\|} \leq \delta$$

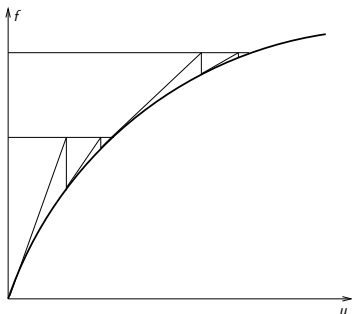
Algorytm zmodyfikowany:

$$\mathbf{K}_j = \mathbf{K}_0$$



Algorytm Newtona-Raphsona

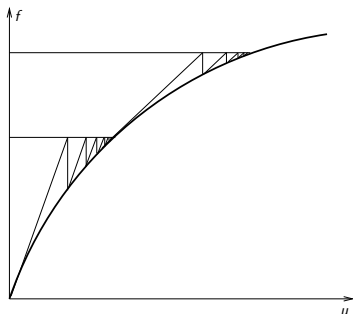
Możliwe schematy iteracji



Algorytm standardowy

$$\mathbf{K}_j$$

zmieniane w każdej iteracji



Algorytm zmodyfikowany

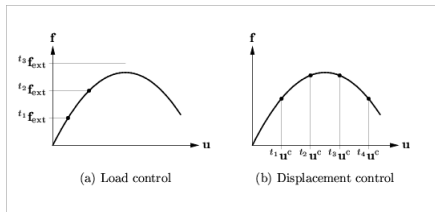
$$\mathbf{K}_j = \mathbf{K}_0$$

generowane na początku przyrostu



Sposoby przykładania przyrostów

Sterowanie siłą lub przemieszczeniem



Sterowanie parametrem łuku

