

ANALIZA STATYCZNA MES DLA USTROJÓW POWIERZNIOWYCH

USTROJE POWIERZCHNIOWE

Mechanika materiałów i konstrukcji budowlanych, studia II stopnia
rok akademicki 2011/2012

Instytut L-5, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska

ADAM WOSATKO

PODZIĘKOWANIA DLA: Marii Radwańskiej, Anny Stankiewicz,
Sławomira Milewskiego, Jerzego Pamina, Piotra Plucińskiego

Tematyka zajęć

- 1 Algorytm, porównanie z MRS
- 2 Tarcze
 - ES tarczowe
- 3 Płyty
 - ES dostosowany
 - Płyta kwadratowa
- 4 Powłoki
 - Wybrane aspekty teoretyczne
 - ES powłokowe
 - Zbiornik walcowy
- 5 Zakończenie

Typy analízy

- Statyka
- Stateczność
- Dynamika
- Przepływ ciepła
- Analiza nieliniowa: sprężysto-plastyczna, zagadnienie kontaktowe, itd.
- Problemy sprzężone
- Inne

Rozróżniamy zadania stacjonarne (niezależne od czasu) i niestacjonarne (zależne od czasu).

Analiza statyczna

W wyniku analizy statycznej, wyznaczamy statyczne skutki zewnętrznych oddziaływań na konstrukcję, pracującą w **zakresie sprężystym** przy ograniczeniu się do analizy **małych przemieszczeń i odkształceń**.

Przy powyższych założeniach mamy do czynienia z analizą materiałowo i geometrycznie liniową, z obowiązującymi zasadami superpozycji i zeszywnienia.

Metody komputerowe

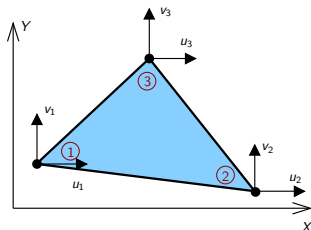
- **metoda elementów skończonych (MES)** (*ang. Finite Element Method*)
- metoda elementów brzegowych (MEB) (*ang. Boundary Element Method*)
- metoda objętości skończonych (MOS) (*ang. Finite Volume Method*)
- **metoda różnic skończonych (MRS)** (*ang. Finite Diference Method*)
- rozszerzona metoda elementów skończonych (*ang. Extended Finite Element Method*)
- metody bezsiatkowe (*ang. Meshless Method*)
- inne

Analiza MES za pomocą programów komputerowych

- 1 **Preprocessing** – typ analizy, geometria modelu, wprowadzanie danych, wybór ES, generacja siatki obliczeniowej, określenie warunków brzegowych
- 2 **Generacja i rozwiązanie układu równań** (przy użyciu solvera) – macierze elementowe, wektory prawej strony, agregacja, rozwiązanie
- 3 **Postprocessing** – analiza wyników tekstowych i zwizualizowanych

Najprostszy ES tarczowy – CST

trójkątny, 3-węzłowy



Liczba stopni swobody węzła: $LSSW = 2$

Liczba węzłów elementu: $LWE = 3$

Liczba stopni swobody elementu:

$$LSSE = LSSW \times LWE = 6$$

Wektory przemieszczeń węzła i elementu:

$$\mathbf{q}_w = \{u_w, v_w\}^T$$

$$\mathbf{q}^{e\ n} = \{u_1, v_1 | u_2, v_2 | u_3, v_3\}^T$$

dla $w = 1, \dots, LWE$, $e = 1, \dots, LE$

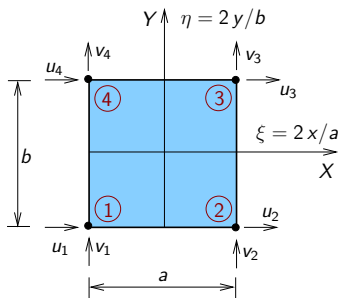
Do aproksymacji **obu przemieszczeń** u i v używane są biliniowe funkcje kształtu $N_i, i = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{u}_{(2 \times 1)}^n = \mathbf{N}_{(2 \times 6)}^n \mathbf{q}_{(6 \times 1)}^{e\ n}$$

CST – *Constant Strain Triangle*

ES tarczowy – Q4

prostokątny, 4-węzłowy



Liczba stopni swobody węzła: $LSSW = 2$

Liczba węzłów elementu: $LWE = 4$

Liczba stopni swobody elementu:

$$LSSE = LSSW \times LWE = 8$$

Wektory przemieszczeń węzła i elementu:

$$\mathbf{q}_w = \{u_w, v_w\}^T$$

$$\mathbf{q}^{e\ n} = \{u_1, v_1 | u_2, v_2 | u_3, v_3 | u_4, v_4\}^T$$

dla $w = 1, \dots, LWE$, $e = 1, \dots, LE$

Do aproksymacji **obu przemieszczeń** $u(\xi, \eta)$ i $v(\xi, \eta)$ używane są funkcje kształtu $N_i(\xi, \eta)$, $i = 1, 2, 3, 4$, biliniowe (liniowe względem dwu bezwymiarowych unormowanych współrzędnych $\xi, \eta \in [-1, +1]$):

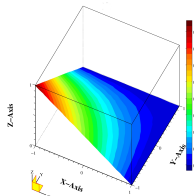
$$\mathbf{u}^n(\xi, \eta)_{(2 \times 1)} = \{u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)\} = \mathbf{N}_{(2 \times 8)}^n \mathbf{q}_{(8 \times 1)}^{e\ n} \rightarrow$$

$$u(\xi, \eta) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4$$

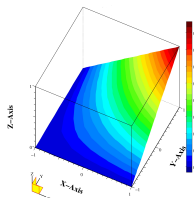
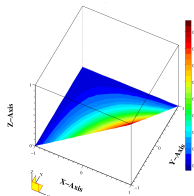
$$v(\xi, \eta) = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4$$

Biliniowe funkcje kształtu

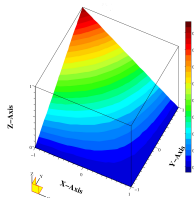
dla ES tarczowego 4-węzłowego



$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$



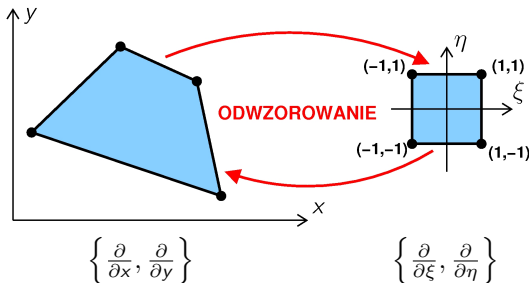
$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$



Bazowy element wzorcowy

dla elementu Q4

Część obliczeń wykonywana jest na elemencie wzorcowym,
np. wyznaczanie macierzy pochodnych funkcji kształtu: $\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}$.



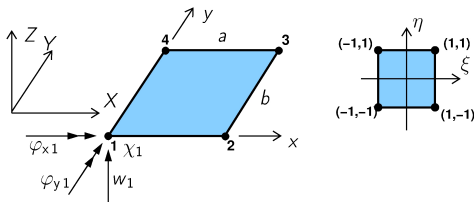
Element
wzorcowy:
 $\xi, \eta \in [-1, 1]$

Macierz Jacobiego - relacja między pochodnymi

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie: } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Prostokątny ES płytowy

4-węzłowy, dostosowany



Stopnie swobody w węźle:

$$\mathbf{q}_w = \{w, \varphi_x, \varphi_y, \chi\}_w = \{w, \partial w / \partial y, -\partial w / \partial x, \partial^2 w / \partial x \partial y\}_w$$

[4×1]

Stopnie swobody w elemencie:

$$\mathbf{q}^e = \{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \chi_1 | w_2 \dots | \dots | \dots \chi_4\}$$

[16×1]

Aproksymacja pola ugięcia

Bezwymiarowe współrzędne powierzchniowe:

$$\xi = 2 \left(\frac{x}{a} \right) - 1, \quad \eta = 2 \left(\frac{y}{b} \right) - 1$$

Wielomianowa aproksymacja:

$$w(\xi, \eta) = (\alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3)(\beta_1 + \beta_2 \eta + \beta_3 \eta^2 + \beta_4 \eta^3) =$$

$$C_1 +$$

$$C_2 \xi + C_3 \eta +$$

$$C_4 \xi^2 + C_5 \xi \eta + C_6 \eta^2 +$$

$$C_7 \xi^3 + C_8 \xi^2 \eta + C_9 \xi \eta^2 + C_{10} \eta^3 +$$

$$C_{11} \xi^3 \eta + C_{12} \xi^2 \eta^2 + C_{13} \xi \eta^3 +$$

$$C_{14} \xi^3 \eta^2 + C_{15} \xi^2 \eta^3 +$$

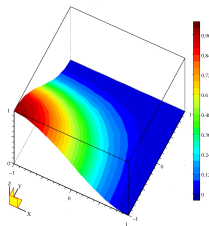
$$C_{16} \xi^3 \eta^3$$

$$\mathbf{u}^e_{[1 \times 1]} = \{w(\xi, \eta)\} = \mathbf{N}_{[1 \times 16]}(\xi, \eta) \cdot \mathbf{q}^e_{[16 \times 1]} =$$

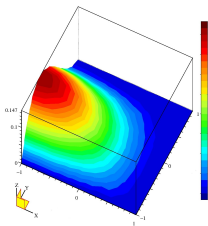
$$= \{N_1^1, N_1^2, N_1^3, N_1^4, | N_2^1 \dots | \dots | \dots N_4^4\} \cdot \{w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \chi_1 | w_2 \dots | \dots | \dots \chi_4\}^T$$

Bisześciennne funkcje kształtu

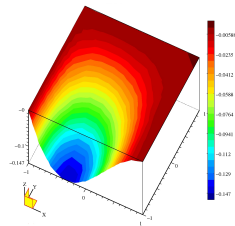
dla pierwszego węzła elementu płytowego, 4-węzłowego (bazowego)



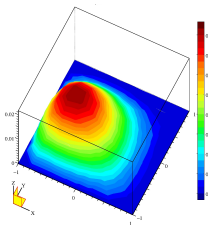
N_1^1 odpowiadająca w_1



N_1^2 odpowiadająca φ_{x1}

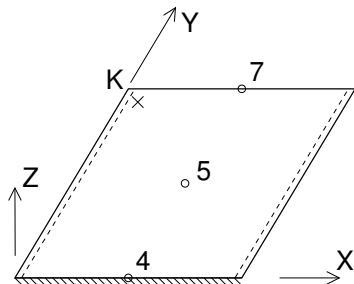


N_1^3 odpowiadająca φ_{y1}



N_1^4 odpowiadająca χ_1

Płyta kwadratowa



Dane:

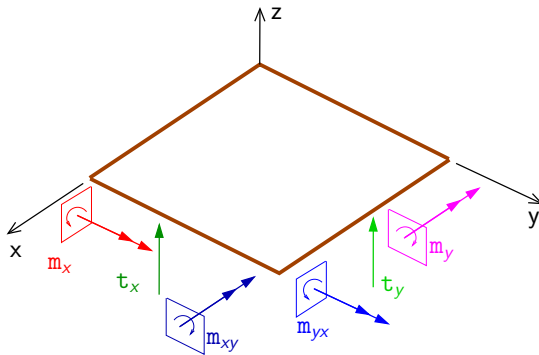
- wymiary płyty
 $L_X = L_Y = 3.0 \text{ m}$
- grubość płyty $h = 0.12 \text{ m}$
- obciążenie
 $p_z = q = -14.4 \text{ kN/m}^2$
- moduł Younga
 $E = 32.0 \cdot 10^6 \text{ kPa}$
- współczynnik Poissona $\nu = 0$

Sztywność giętna płyty wynosi $D^m = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 4608 \text{ kNm}$.

Kryterium znakowania – tablice i ROBOT

Momenty i siły poprzeczne

W tablicach inżynierskich i programie ROBOT przyjęto oś 0Z skierowaną góry, co pociąga za sobą oznaczanie dodatnich momentów zginających powodujących rozciągające naprężenia na powierzchni górnej.



Płyta kwadratowa – wyniki

Porównanie wielkości charakterystycznych

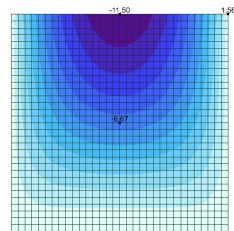
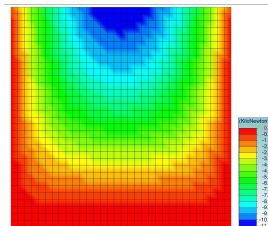
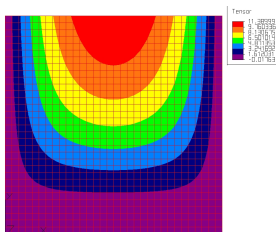
		w_7 [mm]	m_{x7} [$\frac{kNm}{m}$]	m_{x5} [$\frac{kNm}{m}$]	m_{y5} [$\frac{kNm}{m}$]	m_{y4} [$\frac{kNm}{m}$]
Tablice inż.		-2.303	-11.37	-6.58	-2.19	15.23
Program	Siatka					
ALGOR	8×8	-2.316	-11.27	-6.53	-2.15	13.20
GRAITEC	8×8	-2.344	-11.51	-6.64	-2.31	12.27
ROBOT	8×8	-2.355	-11.63	-6.73	-2.30	14.96
ALGOR	32×32	-2.344	-11.39	-6.59	-2.19	14.75
GRAITEC	32×32	-2.392	-11.44	-6.66	-2.18	14.47
ROBOT	32×32	-2.394	-11.50	-6.67	-2.21	15.19
ROBOT	128×128	-2.410	-11.47	-6.68	-2.16	15.29

Można analizować także momenty w narożu, gdzie spotykają się – swobodna i przegubowo podparta krawędź – są to momenty główne m_I, m_{II} (o różnych znakach !): $m_{IK} = -m_{IIK} = 0.0156 \cdot q \cdot L_X \cdot L_Y$.

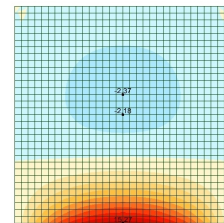
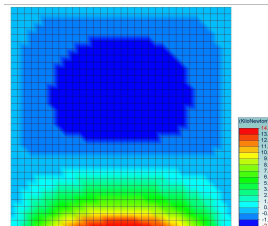
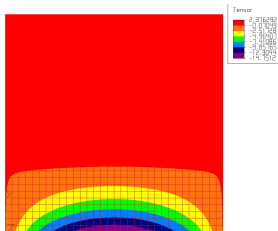
Płyta kwadratowa – wyniki

Mapy konturowe m_x i m_y

m_x



m_y



ALGOR

GRAITEC

ROBOT

Klasyfikacja powłok ze względu na smukłość

Powłoki:

- I) cienkie $\rightarrow$ stosujemy teorię KIRCHHOFFA-LOVE'A,
- II) umiarkowanie cienkie $\rightarrow$ stosujemy teorię MINDLINA-REISSNERA,
- III) grube $\rightarrow$ obliczamy zagadnienia 3D, np. typowe zagadnienie z mechaniki rury grubościennej.

Trójparametrowa teoria powłok

KIRCHHOFFA-LOVE'A – powłoki cienkie

Powłoka cienka

Powłoka jako ustrój powierzchniowy charakteryzuje się wartością grubości dużo mniejszą od promieni głównych krzywizn:

$$\frac{h}{R_{min}} < \frac{1}{20} \div \frac{1}{30}.$$

Hipoteza kinematyczna $\rightarrow$

niezależne kinematyczne pola w powłokach to **trzy liniowe**

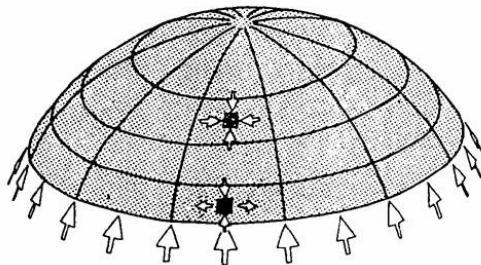
przemieszczenia: $u_1(\xi_1, \xi_2)$, $u_2(\xi_1, \xi_2)$, $w(\xi_1, \xi_2)$, w kierunkach lokalnej bazy $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$, wprowadzanej w punkcie powierzchni środkowej powłoki.

Hipoteza statyczna $\rightarrow$

w powłokach cienkich naprężenia $\sigma_n, \tau_{1n}, \tau_{2n}$ są nieporównywalnie mniejsze od pozostałych naprężeń.

Stan membranowy

Stan membranowy – rozkład naprężeń wzdłuż grubości jest jednorodny.



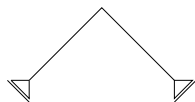
Stan ten jest w powłokach najkorzystniejszy (optymalny) z punktu wykorzystania materiału. Przy spełnieniu pewnych warunków podparcia i obciążenia może być on zrealizowany w rzeczywistych konstrukcjach.

Zaburzenia stanu membranowego

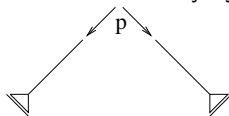
źródłami stanu giętnego

- Szybki wzrost momentów i sił poprzecznych w kierunku źródła
- Szybkie ich zanikanie, gdy nie istnieje w pobliżu inne źródło

Stan membranowy i jego zaburzenia



warunki brzegowe



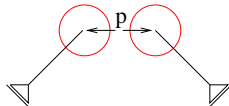
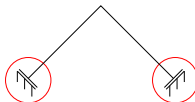
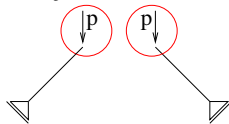
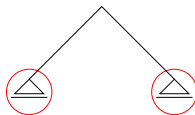
obciążenie konturowe



załomy



zmiana grubości



Podział ES powłokowych

- ES oparte na teorii powłok
 - ES geometrycznie jednowymiarowe
 - ES dwuwymiarowe płaskie trój- i czterowęzłowe
 - ES dwuwymiarowe zakrzywione oparte na teorii powłok cienkich KIRCHHOFFA-LOVE'A albo na teorii powłok umiarkowanie cienkich MINDLINA-REISSNERA
- ES tzw. zdegenerowane, oparte na równaniach kontinuum 3D, zmodyfikowanych hipotezami powłokowymi, spójne z pięcioparametrową teorią powłok MINDLINA-REISSNERA
- ES bryłowe, korzystające z równań kontinuum 3D, opisujące powłoki grube

Powyższa klasyfikacja wiąże się z:

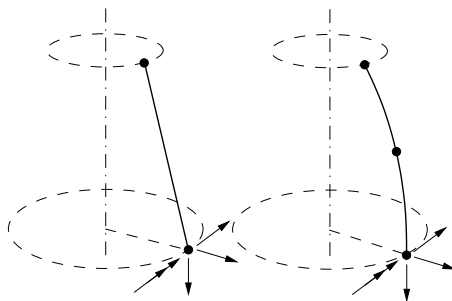
- liczbą aproksymowanych pól wewnątrz ES,
- liczbą i rodzajem stopni swobody węzła,
- wzorami użytymi do obliczania energii wewnętrznej oraz sposobem całkowania po obszarze ES przy liczeniu macierzy sztywności i wektorów węzłowych obciążeń.

ES powłokowe 1D

dla powłok obrotowych

Elementy skończone geometrycznie jednowymiarowe dyskretyzują południk powłoki osiowo symetrycznej, z zastosowaniem analitycznego rozwinięcia wszystkich funkcji w szereg trygonometryczny zmiennej obwodowej.

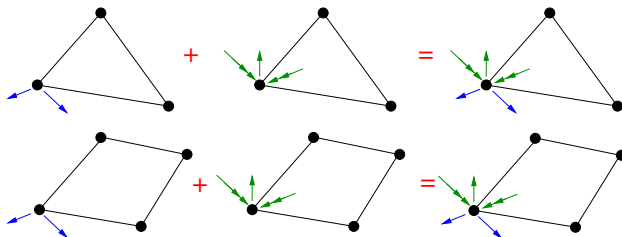
$$\mathbf{u}(\xi, \Theta) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^J u^j(\xi) \cos(j\Theta) \\ \sum_{j=1}^J v^j(\xi) \sin(j\Theta) \\ \sum_{j=1}^J w^j(\xi) \cos(j\Theta) \end{bmatrix}$$



Płaskie powłokowe ES 2D

o 3 i 4 węzłach

Elementy skończone powłokowe płaskie z 3 i 4 węzłami są utworzone w wyniku superpozycji ES tarczowych i ES płytowych.

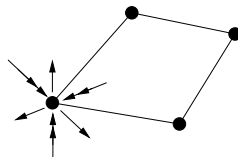
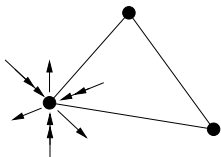


W węzle takiego ES, stosując model przemieszczeniowy, występują następujące stopnie swobody:

$$\mathbf{q}_w^n = \{u, v\}_w \quad \mathbf{q}_w^m = \{w, \varphi_1, \varphi_2\}_w \quad \mathbf{q}_w = \{\mathbf{q}^n \mathbf{q}^m\}_w = \{u, v, w, \varphi_1, \varphi_2\}_w$$

Płaskie powłokowe ES 2D

dostępne w programie ROBOT



Do dyskretyzacji powłok z załomami i/lub rozgałęzieniami musi być wprowadzony do węzła trzeci rotacyjny stopień swobody φ_n czyli węzłowy **szósty** stopień swobody, a zatem:

$$\mathbf{q}_w = \{u, v, w, \varphi_1, \varphi_2 \mid \varphi_n\}_w.$$

Kąt φ_n - obrotu wokół normalnej nie może być pomijany przy aproksymacji przemieszczeń powierzchni środkowej, ze względu na konieczność transformacji wektorów obrotów do układu globalnego (X, Y, Z) .

Zakrzywione powłokowe ES 2D

oparte na klasycznej trójparametrowej teorii powłok cienkich

Aproksymacja pola przemieszczeń

(3 składowe translacyjne):

$$\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2) = \{u_1(\xi_1, \xi_2), u_2(\xi_1, \xi_2), w(\xi_1, \xi_2)\} = \\ = \{u(\xi_1, \xi_2), v(\xi_1, \xi_2), w(\xi_1, \xi_2)\} = \underset{[3 \times LSSE]}{\mathbf{N}} \cdot \underset{[LSSE \times 1]}{\mathbf{q}^e}.$$

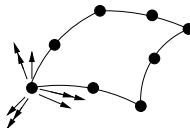
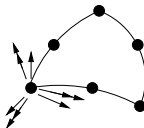
Wektor SSW:

$$\mathbf{q}_w = \{u, v, w, \varphi_1, \varphi_2\}_w \text{ lub } \mathbf{q}_w = \{u, v, w, \varphi_1, \varphi_2 | \varphi_n\}_w$$

LSSW = 6

LW = 6

LSSE = 36



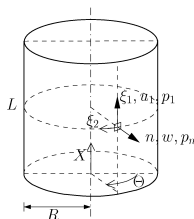
LSSW = 6

LW = 8

LSSE = 48

Zbiornik walcowy

Równanie różniczkowe przemieszczeniowe 4-go rzędu dla osiowo symetrycznego stanu membranowo-giętnego i jego rozwiązanie



$$w^{IV}(x) + 4\beta^4 w(x) = \frac{1}{D_m} [p_n + \frac{\nu}{R} (\int p_1 dx + C_1)]$$

$$\text{gdzie: } \beta = \sqrt{\frac{1}{Rh}} \cdot \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}$$

$$w(x) = \underbrace{w^o(x)}_{\text{całka ogólna}} + \underbrace{\bar{w}(x)}_{\text{całka szczególna}} =$$

$$= \underbrace{e^{-\beta x} [B_1 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x)]}_{\text{szybko maleje przy wzroście } x} + \underbrace{e^{+\beta x} [B_3 \cos(\beta x) + B_4 \sin(\beta x)]}_{\text{szybko rośnie przy wzroście } x} + \bar{w}(x)$$

$\bar{w}(x)$ – funkcja ugięcia dla stanu bezmomentowego osiowo symetrycznego

$w^o(x)$ – funkcja ugięcia opisująca lokalny stan giętny

- Pojawiają się moment $m_1(x)$ i siła poprzeczna $t_1(x)$.
- Ulegają modyfikacji przemieszczenie $w(x)$ i siła równoleżnikowa $n_2(x)$.

Zbiornik walcowy

Dane

Geometria, materiał, obciążenie

- wysokość $L = H = 20.0$ m
- promień $R = 10.0$ m
- grubość $h = 0.12$ m
- moduł Younga $E = 15.0 \cdot 10^6$ kPa
- współczynnik Poissona $\nu = \frac{1}{6} \approx 0.1667$

- ciężar własny

$$p_1 = -\gamma_b h = -24 \cdot 0.12 = -2.88 \text{ kPa}$$

- parcie hydrostatyczne

$$p_n = \gamma_c (L - x) = 10(20 - x) \text{ kPa}$$

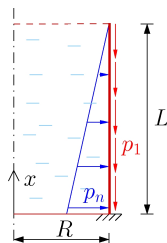
- szttywność giętna

$$D^m = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 2221.7 \text{ kNm}$$

- warunki brzegowe

$$w(0) = 0, w'(0) = 0,$$

$$m_1(L) = 0, t_1(L) = 0$$



Powłoka długa?

$$\beta = 1.193 \frac{1}{m}, \lambda = \frac{\pi}{\beta} \approx 2.63 \text{ m}$$

λ - długość półfali

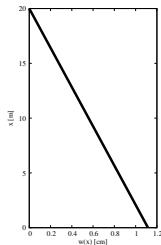
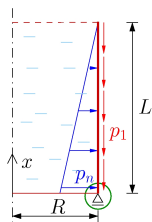
Czy $3 \cdot \lambda < L$?

$$\approx 7.9 \text{ m} < 20 \text{ m} \Rightarrow \text{TAK}$$

Zbiornik walcowy – stan bezmomentowy

Rozwiązanie analityczne

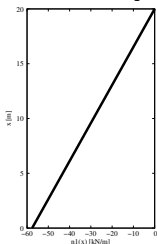
Premieszczenie normalne w



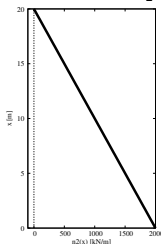
Funkcja przemieszczenia normalnego:

$$w(x) = \bar{w}(x) = \frac{R}{Eh}(\gamma_c R + \nu \gamma_b h)(L - x)$$

Siła południkowa n_1

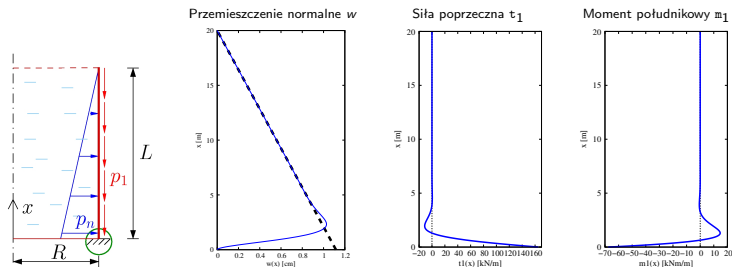


Siła równoleżnikowa n_2

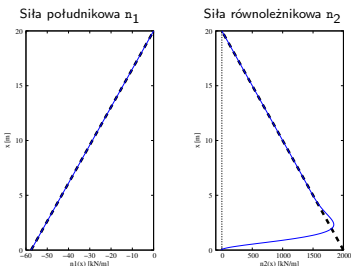


Zbiornik walcowy – zaburzenie stanu bezmomentowego

Rozwiązanie analityczne



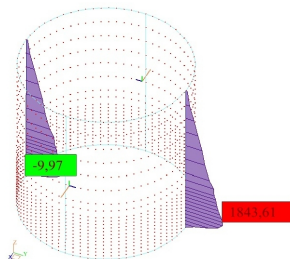
$$m_1(0) = -67.6 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$



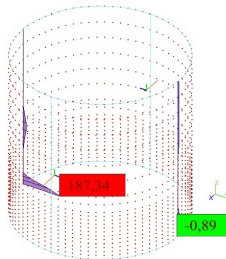
$$n_2(2) = 1841 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Zbiornik walcowy – zaburzenie stanu bezmomentowego

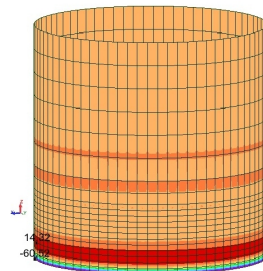
Rozwiązanie numeryczne – ROBOT



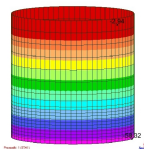
Siła równoleżnikowa p_2



Siła poprzeczna t_1



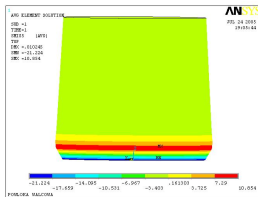
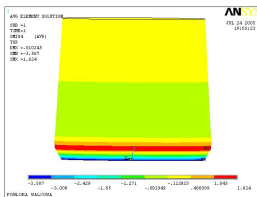
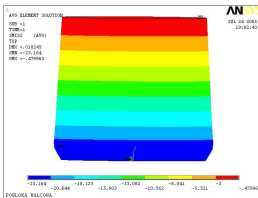
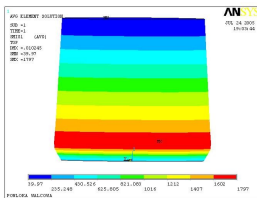
Moment południkowy m_1



Siła południkowa p_1 od ciężaru własnego

Zbiornik walcowy – zaburzenie stanu bezmomentowego

Rozwiązanie numeryczne – ANSYS

Moment południkowy m_1 Moment równoleżnikowy m_2 Siła południkowa n_1 Siła równoleżnikowa n_2 

Zbiornik walcowy – zaburzenie stanu bezmomentowego

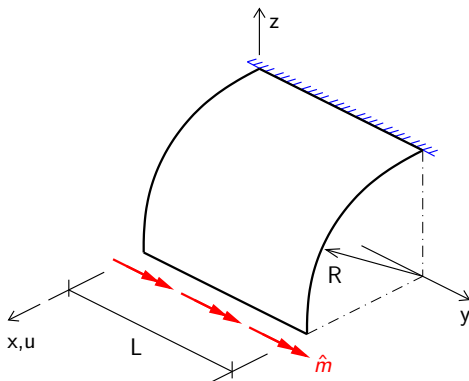
Podsumowanie

Rozwiązanie analityczne					
	W_{max} [cm]	$n_{2,max}$ [$\frac{kN}{m}$]	$n_{2,min}$ [$\frac{kN}{m}$]	$m_{1,max}$ [$\frac{kNm}{m}$]	$m_{1,min}$ [$\frac{kNm}{m}$]
położenie x [m]	2.3	2.32	0.0	1.3	0.0
wartość	1.028	1841.3	-9.60	14.68	-67.64
Rozwiązania numeryczne					
ANKA (ES 1D)	1.024	1835.9	-14.25	13.96	-67.67
ROBOT (ES 2D)	1.024	1846.8	-9.97	14.32	-60.52
ANSYS (ES 2.5D)	1.020	1847.8	-7.10	13.72	-58.19

	Typ elementu	LE	LSSU aktywnych
ANKA	SRSK – 1D	20	80
ROBOT	płaski – 2D	1280	7680
ANSYS	zdegenerowany SHELL 93 – 2.5D	2800	50400

Test nierozciągliwego zginania walcowej powłoki otwartej

Weryfikacja jakości ES powłokowych



Wariantujemy:

- wielkości geometryczne powłoki:
 $R/h = 10, \dots, 100$,
- typ siatki ES: regularna – nieregularna.

Momentowe obciążenie brzegowe powinno wywołać:

- przesunięcie brzegu zgodne z analitycznym rozwiązaniem:

$$u = \frac{\hat{m} R^2}{D^m},$$

gdzie: $D^m = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$

- zerowe** siły membranowe,
- stałe momenty m_2 .

Dodatkowo kontroli podlega stosunek maksymalnego membranowego naprężenia do maksymalnego naprężenia ze stanu giętnego.

„Nie ma czegoś takiego jak książkowy przypadek.”

prawo Murphy'ego

Dziękuję za uwagę

Literatura

-  M. RADWAŃSKA. *Ustroje powierzchniowe. Podstawy teoretyczne oraz rozwiązania analityczne i numeryczne*. Skrypt PK, Kraków, 2009.
-  A. BORKOWSKI, Cz. CICHON, M. RADWAŃSKA, A. SAWCZUK, Z. WASZCZYSZYN. *Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe*. T.3, rozdz.9, Arkady, Warszawa, 1995.
-  Cz. CICHON, W. CECOT, J.KROK, P. PLUCIŃSKI. *Metody komputerowe w liniowej mechanice konstrukcji. Wybrane zagadnienia*. Skrypt PK, wydanie 2, Kraków, 2010.
-  G. RAKOWSKI, Z. KACPRZYK. *Metoda elementow skończonych w mechanice konstrukcji*. Oficyna Wyd. PW, Warszawa, 2005.
-  R.D. COOK, D.S. MALKUS, M.E. PLESHA, R.J WITT. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. University of Wisconsin–Madison, John Wiley&Sons, 2002.
-  O.C. ZIENKIEWICZ, R.L. TAYLOR, J.Z. ZHU. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. VI edition, Elsevier Butterworth Heineman, 2005.