

1 Charakterystyka ustrojów powierzchniowych

Anna Stankiewicz

e-mail: astankiewicz@L5.pk.edu.pl

Tematyka zajęć

Przykłady konstrukcji inżynierskich

Klasyfikacja ustrojów powierzchniowych

Podstawowe pojęcia

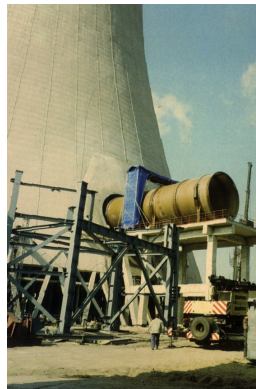
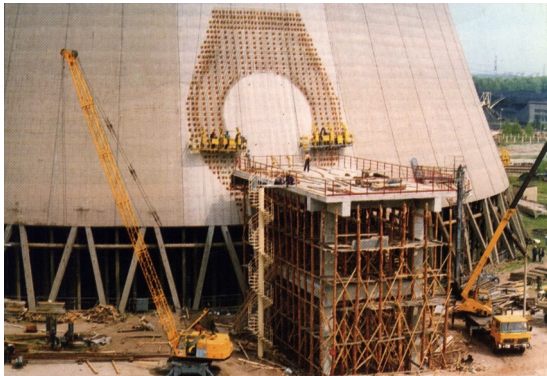
Równania teorii sprężystości dla zagadnień trójwymiarowych

Przykłady konstrukcji inżynierskich



<http://www.wsb-nlu.edu.pl/~wegrzyn/coolingt.html>

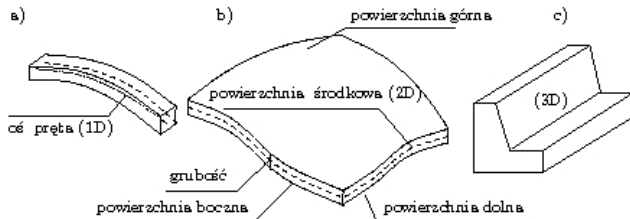
Przykłady konstrukcji inżynierskich



Podział konstrukcji

Wyróżniamy ustroje:

- a) prętowe
- b) **powierzchniowe**
- c) bryłowe



Ustrój powierzchniowy (UP) - trójwymiarowe ciało odkształcalne, którego grubość h jest mała w porównaniu z pozostałymi wymiarami.

Charakterystyka ustroju powierzchniowego

Opis UP uwzględnia:

- ▶ opis geometrii powierzchni środkowej i powierzchni równo oddalonej od niej
- ▶ opis więzów kinematycznych nakładanych na sposób deformacji
- ▶ definicje uogólnionych odkształceń w punkcie na powierzchni środkowej
- ▶ definicje uogólnionych sił przekrojowych na powierzchni środkowej
- ▶ charakterystykę podstawowych stanów naprężeń

Kryteria podziału ustrojów powierzchniowych

Ustroje powierzchniowe klasyfikujemy z uwagi na różne aspekty:

- ▶ geometrię (powierzchni środkowej)
- ▶ smukłość h/L
- ▶ stan naprężeń
- ▶ kinematykę

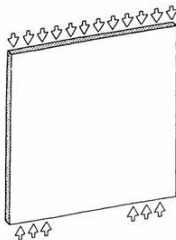
Podział ustrojów powierzchniowych

W zależności od typów powierzchni środkowej wyróżniamy:

- ▶ ustroje modelowane za pomocą **płaszczyzny** środkowej
 - ▶ tarcze
 - ▶ płyty
- ▶ ustroje modelowane za pomocą pojedynczo lub podwójnie zakrzywionej **powierzchni** środkowej
 - ▶ powłoki

Definicja tarczy

Tarczą - nazywamy płaski dźwigar powierzchniowy, modelowany za pomocą płaszczyzny środkowej, z obciążeniem leżącym jedynie w tej płaszczyźnie, o stałym wzdłuż grubości rozkładzie naprężeń.



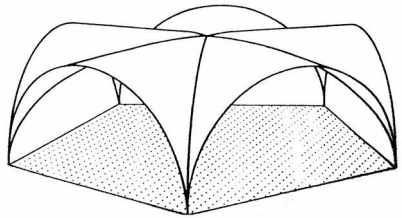
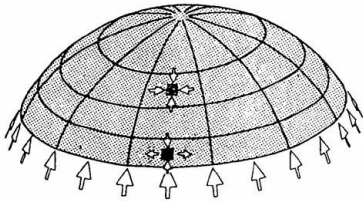
Definicja płyty

Płytą zginaną - nazywamy płaski dźwigar powierzchniowy, modelowany za pomocą płaszczyzny środkowej, z obciążeniem prostopadłym do tej płaszczyzny, o liniowo zmiennym wzdłuż grubości rozkładzie naprężeń.



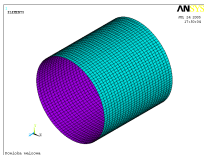
Definicja powłoki

Powłoką nazywamy dźwigar powierzchniowy zakrzywiony.

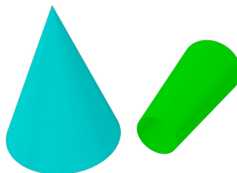


Rodzaje zakrzywionych powierzchni

Powłoki pojedynczo zakrzywione

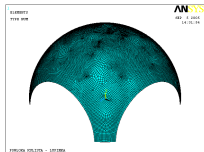


walcowa [8]

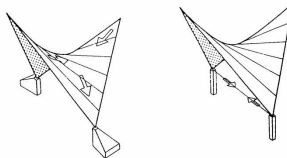


stożkowa

Powłoki podwójnie zakrzywione



kulista (elipsoidalna) [9]

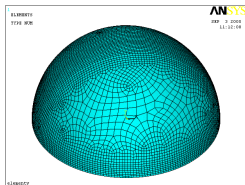


hiperboloidalna [3]

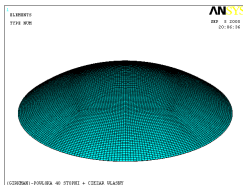
Rodzaje zakrzywionych powierzchni – ciąg dalszy

Powłoki mogą być:

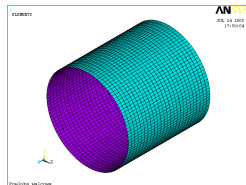
- a) silnie zakrzywione
- b) słabo zakrzywione (szczególny przypadek to powłoki mało wyniosłe opisane w kartezjańskim układzie współrzędnych)
- c) osiowo symetryczne (powstałe na skutek obrotu określonej prostej lub krzywej wokół osi obrotu)



a) [9]



b) [9]

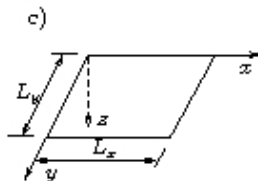
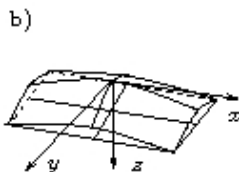
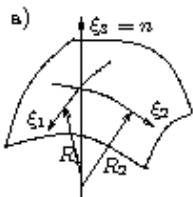


c) [8]

Rodzaje powierzchni – ciąg dalszy

Powierzchnie mogą być:

- ▶ wyniosłe
- ▶ mało wyniosłe
- ▶ płaskie

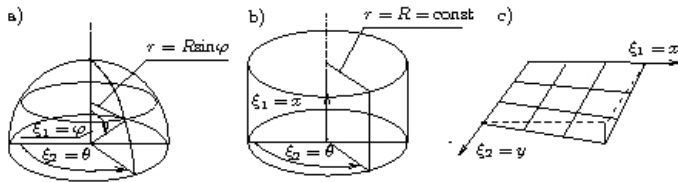


Układy współrzędnych

Powłoki modelowane są za pomocą powierzchni środkowej, która jest dwuwymiarowym obiektem geometrycznym, opisywanym dwoma **współzrędnymi krzywoliniowymi** ξ_1 i ξ_2

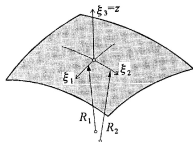
W zależności od kształtu powłoki, stosowane są następujące układy współrzędnych:

- A) sferycznych $\xi_1 = \varphi$, $\xi_2 = \Theta$
- B) walcowych $\xi_1 = x$, $\xi_2 = \Theta$
- C) kartezjańskich $\xi_1 = x$, $\xi_2 = y$



Opis powierzchni

Na powierzchni środkowej, względem tzw. głównych linii współrzędnych ξ_1, ξ_2 , wprowadzamy dwa ekstremalne **promienie głównych krzywizn** R_1, R_2



Odwrotności promieni to **krzywizny**, oznaczane k_1, k_2

$$k_{\alpha\alpha} = -\frac{1}{R_{\alpha\alpha}}, \text{ dla } \alpha=1,2$$

Średnią krzywiznę H oraz **krzywiznę Gaussa** K definiujemy jako:

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \qquad K = k_1 k_2$$

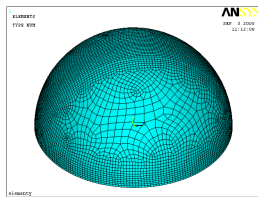
Długość łuku ds_α obliczana jest za pomocą parametrów Lamego A_α :

$$ds_\alpha = A_\alpha d\xi_\alpha, \text{ dla } \alpha=1,2$$

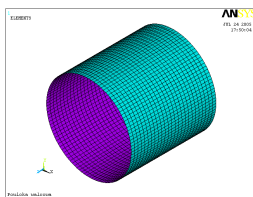
Wartości krzywizny Gaussa

Wyróżniamy powłoki:

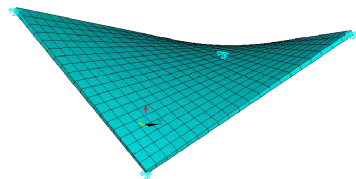
- a) o dodatniej krzywiznie GAUSSA ($K > 0$ dla powłoki kulistej),
- b) o zerowej ($K = 0$ dla powłoki walcowej),
- c) o ujemnej ($K < 0$ dla powłoki hiperboloidalnej).



A) [9]



B) [8]



C) [10]

Klasyfikacja ustrojów powierzchniowych

Podział UP ze względu na grubość:

- ▶ cienkie - obowiązuje teoria **Kirchhoffa-Love'a**
- ▶ umiarkowanie grube - obowiązuje teoria **Mindlina-Reissnera**
- ▶ grube - analiza 3D

Dla dźwigarów cienkich, model matematyczny (układ równań opisujący zachowanie się ustroju pod działaniem zewnętrznych czynników) można znacznie uprościć.

UP cienki to taki, dla którego $h/l_{min} \ll 1$.

W szczególności:

dla płyt: $h/l_{min} < \frac{1}{10}$

dla powłok: $h/R_{min} < \frac{1}{20} \div \frac{1}{30}$

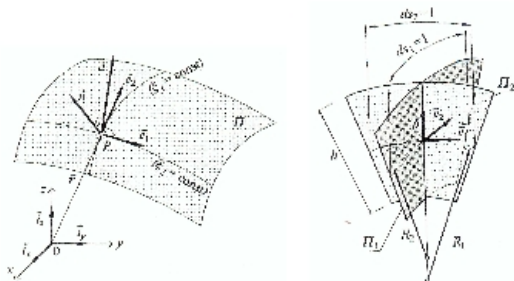
Klasyfikacja ustrojów powierzchniowych

Podział UP ze względu na rozkład naprężeń:

- ▶ jednorodny wzdłuż grubości
 - ▶ tarcza
 - ▶ powłoka w stanie bezmomentowym (błonowym)
- ▶ liniowo zmienny wzdłuż grubości
 - ▶ płyta zginana
 - ▶ powłoka w stanie membranowo-giętnym

Powierzchnia środkowa, przekrój normalny

W punkcie na powierzchni definiujemy **przekrój poprzeczny**, którym są dwa wzajemnie prostopadłe przekroje normalne Π_1, Π_2 .
Na przecięciu obu płaszczyzn Π_1, Π_2 leży **odcinek** (włókno), którego zachowanie się w trakcie deformacji podlega ścisłemu opisowi (tzn. **więzom kinematycznym Kirchhoffa-Love'a** lub **Mindlina-Reissnera**).



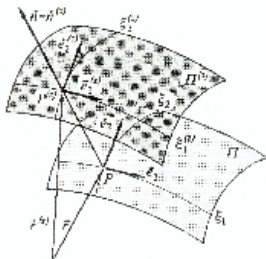
Powierzchnia środkowa, powierzchnia równo oddalona od środkowej

Położenie punktu na **powierzchni środkowej** Π opisuje wektor:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(X, Y, Z) = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2)$$

Powierzchnię równo oddaloną $\Pi^{(z)}$ opisuje równanie:

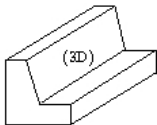
$$\mathbf{r}^{(z)} = \mathbf{r} + z\mathbf{n}, \quad \text{gdzie} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$



Równania teorii sprężystości dla zagadnień trójwymiarowych

Przyjmujemy jako znane na wstępie analizy zewnętrzne oddziaływania (obciążenia i kinematyczne wymuszenia):

- ▶ wektor obciążeń masowych $\hat{\mathbf{b}}_{(3 \times 1)} = \{\hat{b}_x, \hat{b}_y, \hat{b}_z\}$ [N/m³] w Ω
- ▶ wektor obciążeń brzegowych $\hat{\sigma}_{b(3 \times 1)} = \{\hat{\sigma}_{\nu 1}, \hat{\sigma}_{\nu 2}, \hat{\sigma}_{\nu 3}\}$ [N/m²] na $\partial\Omega_\sigma$
- ▶ wektor przemieszczeń brzegowych $\hat{\mathbf{u}}_{b(3 \times 1)} = \{\hat{u}_{\nu 1}, \hat{u}_{\nu 2}, \hat{u}_{\nu 3}\}$ [m] na $\partial\Omega_u$



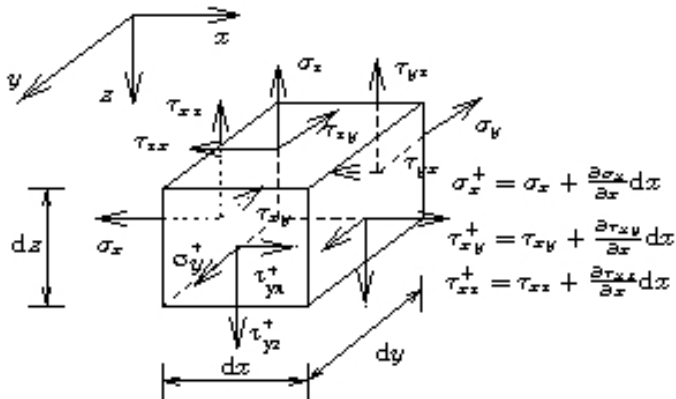
Wielkości poszukiwane dla zagadnień trójwymiarowych

Poszukiwane w obszarze Ω „skutki”:

- ▶ wektor naprężeń $\sigma_{(6 \times 1)}(x, y, z) = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\} [\text{N/m}^2]$
- ▶ wektor odkształceń
 $\varepsilon_{(6 \times 1)}(x, y, z) = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\} [-]$,
- ▶ wektor przemieszczeń $\mathbf{u}_{(3 \times 1)}(x, y, z) = \{u_x, u_y, u_z\} = \{u, v, w\} [\text{m}]$

zakładamy równość naprężeń stycznych $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

Kryterium znakowania naprężeń dla ośrodka 3D



Równania teorii sprężystości dla zagadnień trójwymiarowych

Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia brzegowego teorii sprężystości sprowadza się do zapisania **układu 15 równań różniczkowo-algebraicznych** i jego rozwiązania. Układ równań zawiera:

- ▶ **równań kinematycznych** - 6
- ▶ **równania równowagi wewnętrznej** - 3
- ▶ **równań fizycznych** - 6

Uzupełnieniem układu równań muszą być zależności opisujące więzy podporowe i obciążenia brzegowe, zwane **równaniami warunków brzegowych kinematycznych oraz statycznych**.

Równania kinematyczne i równowagi

I) równania kinematyczne (6):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y},$$

II) równania równowagi (3):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \hat{b}_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \hat{b}_y = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \hat{b}_z = 0,$$

Równania fizyczne

III) równania fizyczne (6):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)],$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}.$$

Literatura

-  [1] A. BORKOWSKI, Cz. CICHÓŃ, M. RADWAŃSKA, A. SAWCZUK, Z. WASZCZYSZYN. *Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe*. T.3, rozdz.9, Arkady, Warszawa, 1995.
-  [2] J. KOBIAK, W. STAROSOLSKI. *Konstrukcje żelbetowe*. T. 4, Arkady, Warszawa, 1991.
-  [3] W. KOLENDOWICZ. *Mechanika budowli dla architektów*. Arkady, Warszawa, 1993.
-  [4] ROBOT Millenium – Podręcznik użytkownika. RoboBAT, Kraków.
-  [5] Podręcznik użytkownika systemu ANSYS w wersji elektronicznej.

Literatura – prace L-5



[6] M. RADWAŃSKA, E. PABISEK. *Zastosowanie systemu metody elementów skończonych ANKA do analizy statyki i wyboczenia ustrojów powierzchniowych*. Pomoc dydaktyczna PK, Kraków, 1996.



[7] Z. WASZCZYSZYN, E. PABISEK, J. PAMIN, M. RADWAŃSKA. Nonlinear analysis of a RC cooling tower with geometrical imperfections and a technological cut-out. *Engineering Structures*, 2, 480-489, 2000.



[8] M. ABRAMOWICZ. *Analiza statyki powłok i paneli walcowych przy użyciu systemu ANSYS*. Praca dyplomowa magisterska, opiekun: M. Radwańska, Politechnika Krakowska, Kraków, 2005.



[9] M. FLOREK. *Wybrane zagadnienia statyki powłok kulistych – rozwiązania analityczne oraz numeryczne metodą elementów skończonych*. Praca dyplomowa magisterska, opiekun: M. Radwańska, Politechnika Krakowska, Kraków, 2005.



[10] K. KWINTA. *Analiza powłok cienkich o różnych kształtach według teorii stanu bezmomentowego*. Praca dyplomowa magisterska, opiekun: M. Radwańska, Politechnika Krakowska, Kraków, 2006.



[11] M. RADWAŃSKA. *Ustroje powierzchniowe. Podstawy teoretyczne oraz rozwiązania analityczne i numeryczne*. Skrypt PK, Kraków, 2009.