

PŁYTY – OPIS W UKŁADZIE KARTEZJAŃSKIM

Charakterystyczne wielkości i równania

USTROJE POWIERZCHNIOWE
Mechanika materiałów i konstrukcji budowlanych, studia II stopnia
rok akademicki 2012/2013

Instytut L-5, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska

ADAM WOSATKO



Tematyka wykładu

- 1 Założenia dla teorii płyt cienkich
- 2 Hipotezy KIRCHHOFFA-LOVE'A
- 3 Równania dla teorii płyt cienkich
- 4 Siły przekrojowe i warunki brzegowe



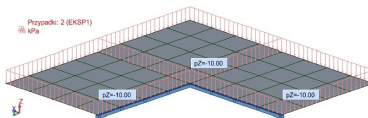
Definicja płyty

Dźwigar powierzchniowy jest specyficznym ciałem odkształcalnym, w którym jeden wymiar (grubość) jest wyraźnie mniejszy od dwóch pozostałych.

Płyta jest dźwigarem powierzchniowym, na który może działać obciążenie zgodne z kierunkiem prostopadłym do płaszczyzny środkowej $\mathcal{P}^0$. Takie obciążenie wywołuje ugięcia. Rozkład naprężeń po grubości płyty jest **liniowy**.



W. KOLENDOWICZ. *Mechanika budowli dla architektów*. Arkady, Warszawa, 1993.



Teorie dla płyt zginanych

W modelu obliczeniowym nakłada się różne więzy kinematyczne i statyczne na zachowanie się płyty w zależności od jej grubości.

- Więzy KIRCHHOFFA-LOVE'A dla płyt cienkich, gdzie $\frac{h}{L} < \frac{1}{10}$.
- Więzy MINDLINA-REISSNERA dla płyt umiarkowanie grubych.

Dla obu przypadków obowiązują inne równania kinematyczne – związki pomiędzy przemieszczeniami a odkształceniami.

Kiedy stosuje się teorię cienkich dźwigarów powierzchniowych?

płyty

$$\frac{h}{L} < \frac{1}{10}$$

powłoki

$$\frac{h}{R_{min}} < \frac{1}{20} \div \frac{1}{30}$$

Główne założenia

dla liniowej teorii cienkich dźwigarów powierzchniowych

- A Obowiązuje **zasada zeszywnienia**, tzn. przemieszczenia są na tyle małe, że równania równowagi można odnosić do nieodkształconego ustroju. Obowiązują **liniowe związki geometryczne CAUCHY'EGO** między przemieszczeniami i odkształceniami.
- B Materiał jest **liniowo sprężysty**, tzn. obowiązuje uogólnione prawo HOOKE'A.



Założenia zawężające rozważania

dla liniowej teorii cienkich dźwigarów powierzchniowych

- a Dźwigar jest jednorodny (w szczególności nieuwarstwiony) o stałej grubości $h(\xi_1, \xi_2) = \text{const.}$, gdzie ξ_1 i ξ_2 są współrzędnymi powierzchniowymi.
- b Materiał jest izotropowy o stałych:
 - E – moduł YOUNGA
 - ν – współczynnik POISSONA
 - α_t - współczynnik rozszerzalności cieplnej
- c Rozpatrywane są zagadnienia przy **obciążeniach** przykładanych **statycznie**, tzn. będziemy pomijali siły bezwładności i energię kinetyczną.

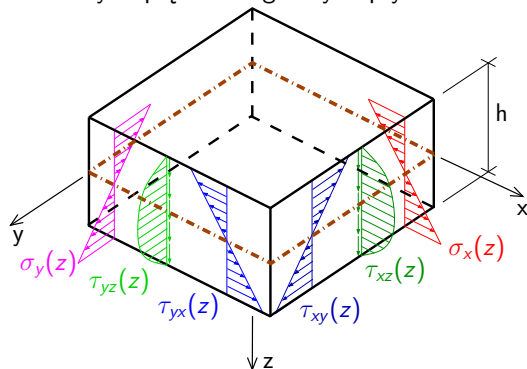


Wielkości poszukiwane w modelu 3D płyty

dla punktu $P(x, y, z)$ z powierzchni równo oddalonej od środkowej

- Pole przemieszczeń:
 $\mathbf{u}(x, y, z) = \{u, v, w\}$
- Pole odkształceń:
 $\epsilon(x, y, z) = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$
- Pole naprężeń:
 $\sigma(x, y, z) = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}$

Rozkłady naprężeń w zginanych płytach



Hipotezy KIRCHHOFFA-LOVE'A dla płyt

Hipoteza kinematyczna

Odcinek po deformacji pozostaje prosty:

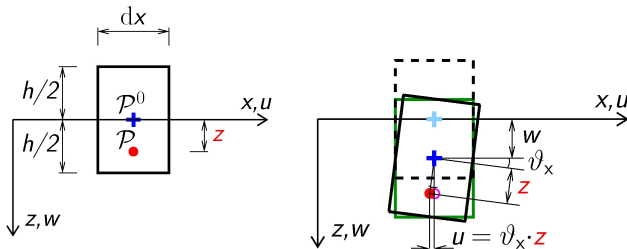
$$u(x, y, z) = \vartheta_x(x, y, 0) \cdot z, \quad v(x, y, z) = \vartheta_y(x, y, 0) \cdot z,$$

prostopadły do odkształconej powierzchni środkowej:

$$\vartheta_x(x, y, 0) = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \vartheta_y(x, y, 0) = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

oraz niewydłużony: $\varepsilon_z(x, y, z) = 0$.

Płaszczyzna Oxz



Płaszczyzna Oyz – analogicznie

Hipotezy KIRCHHOFFA-LOVE'A dla płyt

Hipoteza statyczna

Naprężenie σ_z jest tak małe w porównaniu z pozostałymi składowymi tensora naprężeń, że dla wszystkich punktów płyty (powłoki) można przyjąć w związkach fizycznych:

$$\sigma_z(\xi_1, \xi_2, z) \equiv 0.$$

Komplet równań

dla punktu $\mathcal{P}(x, y, z)$ z powierzchni równo oddalonej od środkowej

Równania kinematyczne

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(z)} &= \frac{\partial u_x^{(z)}}{\partial x}, & \varepsilon_y^{(z)} &= \frac{\partial u_y^{(z)}}{\partial y}, & \gamma_{xy}^{(z)} &= \frac{\partial u_x^{(z)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(z)}}{\partial x}, \\ \varepsilon_z^{(z)} &= \frac{\partial w^{(z)}}{\partial z} = 0, & \gamma_{xz}^{(z)} &= 0, & \gamma_{yz}^{(z)} &= 0\end{aligned}$$

Równania równowagi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \hat{b}_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \hat{b}_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \hat{b}_z &= 0\end{aligned}$$

Równania fizyczne

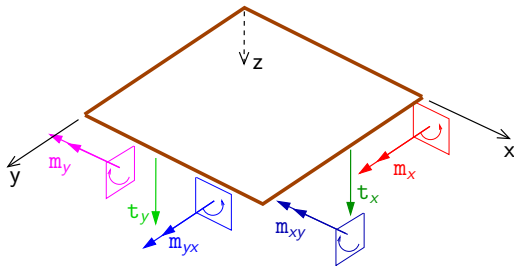
$$\begin{aligned}\sigma_x^{(z)} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_x^{(z)} + \nu \varepsilon_y^{(z)} \right), & \sigma_y^{(z)} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_y^{(z)} + \nu \varepsilon_x^{(z)} \right), & \tau_{xy}^{(z)} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}^{(z)} \\ \sigma_z^{(z)} &= 0, & \tau_{xz}^{(z)} &= 0, & \tau_{yz}^{(z)} &= 0\end{aligned}$$



Wielkości poszukiwane w modelu 2D płyty

dla punktu $\mathcal{P}^0(x, y, 0)$ z powierzchni środkowej

- Pole przemieszczeń uogólnionych: $\mathbf{u}^m(x, y, 0) = \{w\}$
- Pole odkształceń uogólnionych:
 $\mathbf{e}^m(x, y, 0) = \{\kappa_x, \kappa_y, \chi_{xy}\}, \quad \mathbf{e}^t(x, y, 0) = \{0, 0\}$
- Pole naprężeń uogólnionych:
 - momenty zginające $\mathbf{s}^m(x, y, 0) = \{m_x, m_y, m_{xy}\}$
 - siły poprzeczne $\mathbf{s}^t(x, y, 0) = \{t_x, t_y\}$



Dane jest pole obciążeń powierzchniowych: $\hat{\mathbf{p}} = \{\hat{p}_z\}$.

Komplet równań

dla punktu $\mathcal{P}^0(x, y, 0)$ z powierzchni środkowej

Równania kinematyczne

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Równania równowagi

$$\frac{\partial \mathbf{t}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} + \hat{p}_z = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{m}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{m}_{xy}}{\partial y} - \mathbf{t}_x = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{m}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{m}_y}{\partial y} - \mathbf{t}_y = 0$$

Równania fizyczne

$$\mathbf{m}_x = D^{\mathbf{m}} \cdot (\kappa_x + \nu \kappa_y), \quad \mathbf{m}_y = D^{\mathbf{m}} \cdot (\kappa_y + \nu \kappa_x), \quad \mathbf{m}_{xy} = D^{\mathbf{m}} \cdot \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \chi_{xy}$$

gdzie:

$$D^{\mathbf{m}} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad - \text{sztywność płytowa}$$



Komplet równań

dla punktu $\mathcal{P}^0(x, y, 0)$ z powierzchni środkowej – zapis macierzowy

Równania kinematyczne

$$\underset{[3 \times 1]}{\mathbf{e}^m} = \underset{[3 \times 1]}{\mathbf{L}^m} \underset{[1 \times 1]}{\mathbf{u}^m}, \quad \text{gdzie:} \quad \underset{[3 \times 1]}{\mathbf{L}^m} = \begin{bmatrix} -\partial^2/\partial x^2 \\ -\partial^2/\partial y^2 \\ -2\partial^2/\partial x \partial y \end{bmatrix}$$

Równania równowagi

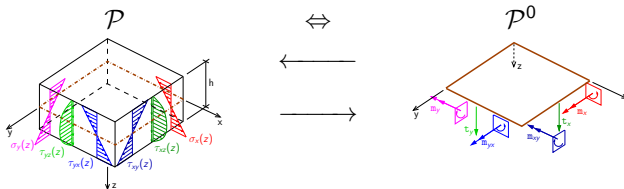
$$\underset{[1 \times 3]}{(\mathbf{L}^m)^T} \underset{[3 \times 1]}{\mathbf{s}^m} = \underset{[1 \times 1]}{\hat{\mathbf{p}}}$$

Równania fizyczne

$$\underset{[3 \times 1]}{\mathbf{s}^m} = \underset{[3 \times 3]}{\mathbf{D}^m} \underset{[3 \times 1]}{\mathbf{e}^m}, \quad \text{gdzie:} \quad \underset{[3 \times 3]}{\mathbf{D}^m} = D^m \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$



Relacje sformułowań 3D i 2D



Powrót z powierzchni środkowej na równo oddaloną $\mathcal{P} \Leftarrow \mathcal{P}^0$

$$\varepsilon_x^{(z)} = \kappa_x \cdot z, \quad \varepsilon_y^{(z)} = \kappa_y \cdot z, \quad \gamma_{xy}^{(z)} = \kappa_{xy} \cdot z,$$

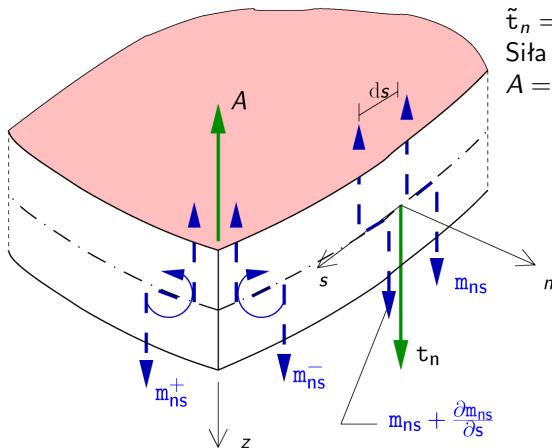
$$\sigma_x = \frac{12m_x}{h^3} \cdot z, \quad \sigma_y = \frac{12m_y}{h^3} \cdot z, \quad \tau_{xy} = \frac{12m_{xy}}{h^3} \cdot z$$

Przejście na powierzchnię środkową $\mathcal{P}^0 \Leftarrow \mathcal{P}$

$$m_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \cdot z \, dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \cdot z \, dz, \quad m_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \cdot z \, dz,$$

$$t_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} \, dz, \quad t_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} \, dz$$

Zastępcza siła poprzeczna i siła narożna



Zastępcza siła poprzeczna

$$\tilde{t}_n = t_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}$$

Siła narożna

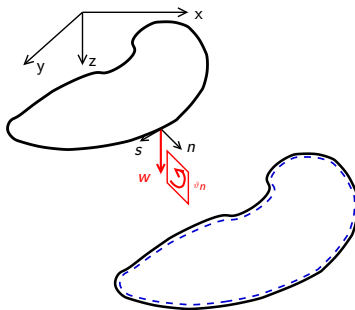
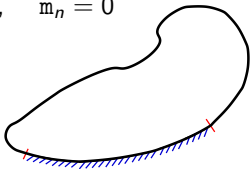
$$A = m_{ns}^- + m_{ns}^+$$

Warunki brzegowe

Warunki kinematyczne, statyczne lub mieszane dla podstawowych typów brzegów płyty

brzeg swobodny nieobciążony:

$$\tilde{t}_n = 0, \quad m_n = 0$$



brzeg zamocowany (utwierdzony):

$$w = 0, \quad \vartheta_n = 0$$

naroże

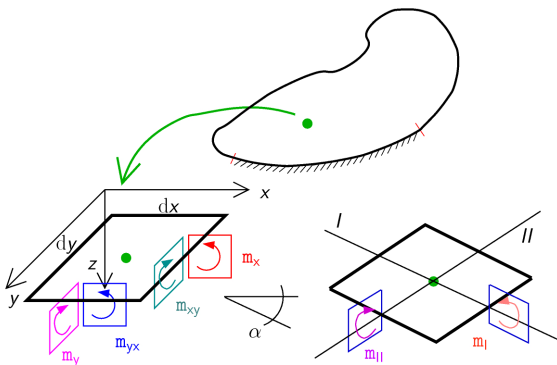


podparte: $w = 0$ swobodne: $A = 0$

brzeg przegubowo podparty (zawiasowo):

$$w = 0, \quad m_n = 0$$

Momenty główne



Główne momenty zginające:

$$m_{I,II} = \frac{1}{2}(m_x + m_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4m_{xy}^2}$$

Kierunki główne: $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y}$

Literatura

-  M. RADWAŃSKA. *Ustroje powierzchniowe. Podstawy teoretyczne oraz rozwiązania analityczne i numeryczne.*
Skrypt PK, Kraków, 2009.
-  A. BORKOWSKI, Cz. CICHON, M. RADWAŃSKA, A. SAWCZUK, Z. WASZCZYSZYN. *Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe.*
T.3, rozdz.9, Arkady, Warszawa, 1995.
-  W. STAROSOLSKI. *Konstrukcje żelbetowe.*
T. 1,2 i 3, wyd. XII, PWN, Warszawa, 2008.