

RÓWNANIA LINIOWEJ TEORII POWŁOK

USTROJE POWIERZCHNIOWE

Mechanika materiałów i konstrukcji budowlanych, studia II stopnia
rok akademicki 2012/2013

Instytut L-5, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska

ADAM WOSATKO

MARIA RADWAŃSKA



Tematyka zajęć

- 1 Zmienne stanu
- 2 Kryterium znakowania
- 3 Wielkości przekrojowe na powierzchni środkowej
 - Uogólnione przemieszczenia i odkształcenia
 - Uogólnione siły przekrojowe
- 4 Równania powłok cienkich
 - Ogólne równania powłok Sandersa
 - Równania zamkniętych powłok walcowych



Zmienne stanu w powłokach

Powłoka jest scharakteryzowana w układzie współrzędnych krzywoliniowych ξ_α , ($\alpha = 1, 2$) za pomocą 2 parametrów Lamego A_α i 2 promieni głównych krzywizn R_α .

W ogólności **stan przemieszczeń, odkształceń i uogólnionych sił przekrojowych** jest opisany w powłoce w punkcie (o współrzędnych krzywoliniowych ξ_α) leżącym na powierzchni środkowej, za pomocą następujących wielkości, pogrupowanych w trzy wektory:

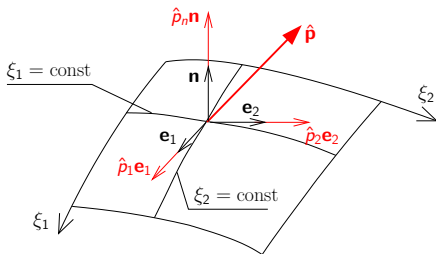
- wektor przemieszczeń: $\mathbf{u}_{(3 \times 1)}(\xi_1, \xi_2) = \{u_1, u_2, w\}$,
- wektor uogólnionych odkształceń:
 $\mathbf{e}_{(6 \times 1)}(\xi_1, \xi_2) = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \chi_{12}\}$,
- wektor uogólnionych sił przekrojowych:
 $\mathbf{s}_{(8 \times 1)}(\xi_1, \xi_2) = \{n_{11}, n_{22}, n_{12}, m_{11}, m_{22}, m_{12}, t_1, t_2\}$,

dotychczas określamy zależne od przemieszczeń i ich pochodnych: kąt obrotu normalnej ϑ_1, ϑ_2 i obrot wokół normalnej ϑ_n .



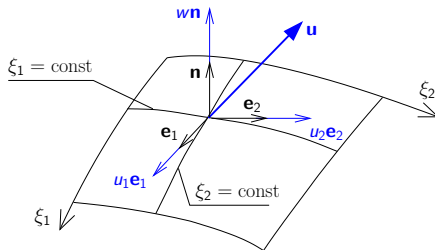
Obciążenia i przemieszczenia

Kryterium znakowania



Obciążenia powierzchniowe:

$$\hat{\mathbf{p}} = \hat{p}_1 \mathbf{e}_1 + \hat{p}_2 \mathbf{e}_2 + \hat{p}_n \mathbf{n}$$

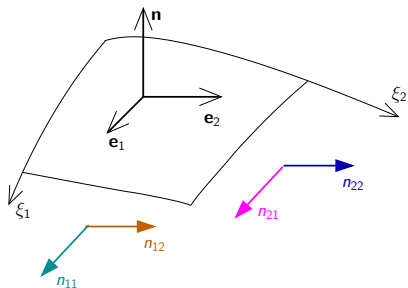


Uogólnione przemieszczenia:

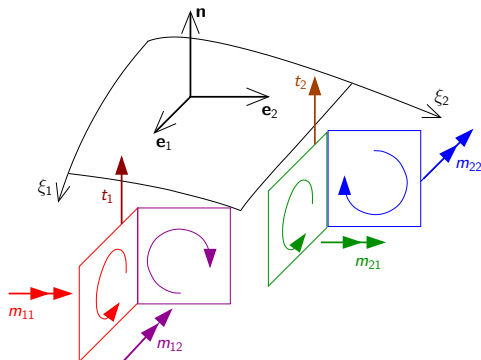
$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + w \mathbf{n}$$

Siły uogólnione

Kryterium znakowania



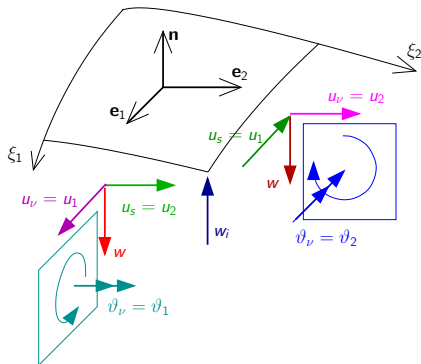
Siły tarczowe
Stan membranowy



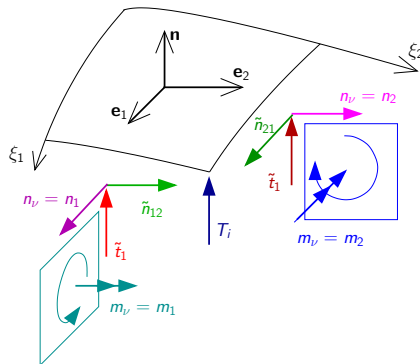
Uogólnione siły przekrojowe
Stan giętny

Wielkości brzegowe

Kryterium znakowania



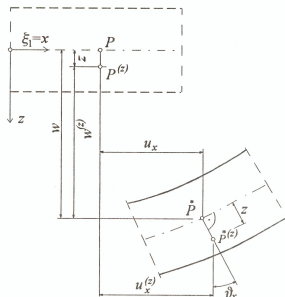
Kinematyczne
wielkości brzegowe



Statyczne
wielkości brzegowe

Kinematyczna hipoteza KIRCHHOFFA-LOVE'A

Odcinek leżący na przecięciu dwu płaszczyzn przekrojowych, prosty i prostopadły do nieodkształconej powierzchni środkowej UP - pozostaje – po przyłożeniu zewnętrznych oddziaływań – **prosty, niewydłużony i nadal prostopadły** do odkształconej powierzchni środkowej.



Kinematyczna hipoteza K-L
(graficzna interpretacja dla płaskiego UP)

Uogólnione przemieszczenia

Wektor przemieszczenia:

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + w \mathbf{n}$$

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u}$$

Wektor kątów obrotów normalnej do powierzchni środkowej:

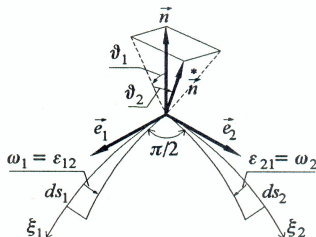
$$\vartheta = -\vartheta_2 \mathbf{e}_1 + \vartheta_1 \mathbf{e}_2 + \vartheta_n \mathbf{n} = \varphi_1 \mathbf{e}_1 + \varphi_2 \mathbf{e}_2 + \varphi_n \mathbf{n}$$

Baza wektorów na powierzchni równo oddalonej:

$$\mathbf{e}_\alpha^* = \frac{1}{A_\alpha^*} \mathbf{r}_{,\alpha}^* \approx \mathbf{e}_\alpha + \delta \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{A_\alpha} \left(u_{\beta,\alpha} - \frac{A_{\alpha,\beta}}{A_\beta} u_\alpha \right) \mathbf{e}_\beta + \frac{1}{A_\alpha} \left(w_{,\alpha} - \frac{A_\alpha}{R_\alpha} u_\alpha \right) \mathbf{n}$$

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_2^* = \mathbf{n} + \delta \mathbf{n} = \mathbf{n} - \vartheta_2 \mathbf{e}_1 + \vartheta_1 \mathbf{e}_2$$

Zależność pomiędzy przemieszczeniami i obrotami



$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, w\}$$

$$u_1^{(z)} = u_1 + z \cdot \vartheta_1 \quad u_2^{(z)} = u_2 + z \cdot \vartheta_2 \quad w^{(z)} = w$$

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + \frac{u_1}{R_1} \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + \frac{u_2}{R_2} \quad \rightarrow$$

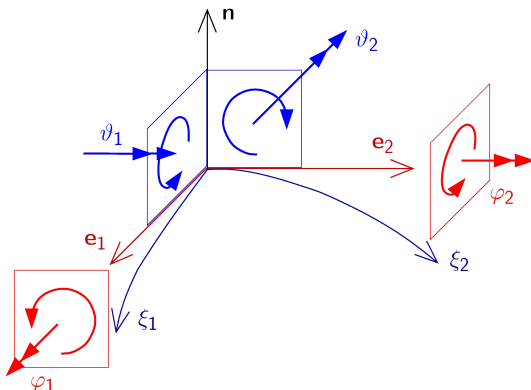
$$\vartheta_n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \right) - \left(\frac{A_{1,2} u_1}{A_1 A_2} - \frac{A_{2,1} u_2}{A_1 A_2} \right) \right]$$

Kąty obrotu – podwójne oznaczenia

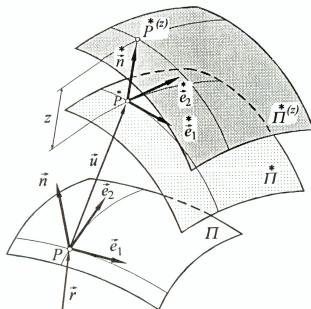
Stosujemy podwójne oznaczenia dla kątów obrotu normalnej:

$$\vartheta_1 = \varphi_2, \quad \vartheta_2 = -\varphi_1$$

z wektorami kątów φ_α równoległymi do kierunków ξ_α dla $\alpha = 1, 2$.



Uogólnione odkształcenia na powierzchni środkowej



Powierzchnie Π , Π^* , $\Pi^{*(z)}$ – niezbędne do opisu pola odkształceń

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(z)} = \frac{A_{\alpha}^{*(z)}}{A_{\alpha}^{(z)}} - 1 \approx \varepsilon_{\alpha\alpha} + \kappa_{\alpha\alpha} z \quad \gamma_{12}^{(z)} = \mathbf{e}_1^{*(z)} \cdot \mathbf{e}_1^{*(z)} \approx \gamma_{12} + \chi_{12} z$$

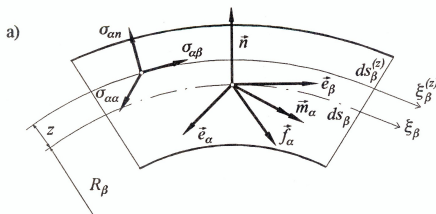
Niewydłużalność i ortogonalność odcinka zgodnie z hipotezą K-L:

$$\varepsilon_{zz}^{(z)} = \frac{\partial w^{(z)}}{\partial z} = 0 \quad \beta_{\alpha} = \vartheta_{\alpha} + \left[\frac{1}{A_{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial \xi_{\alpha}} - \frac{u_{\alpha}}{R_{\alpha}} \right] = 0 \quad \text{dla } \alpha = 1, 2$$

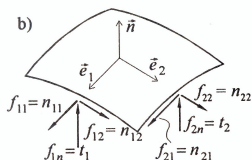


Statyczna hipoteza KIRCHHOFFA-LOVE'A

Naprężenie σ_z jest tak małe w porównaniu z pozostałymi składowymi tensora naprężenia, że dla wszystkich punktów cienkiego UP można przyjąć w związkach fizycznych $\sigma_z(\xi_1, \xi_2, z) \equiv 0$.

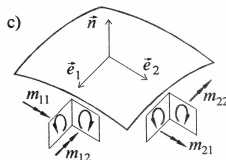


$$\sigma_\alpha(\xi_1, \xi_2, z) = \sigma_{\alpha 1} \mathbf{e}_1 + \sigma_{\alpha 2} \mathbf{e}_2 + \sigma_{\alpha n} \mathbf{n}$$



$$\vec{f}_1 = f_{11} \vec{e}_1 + f_{12} \vec{e}_2 + f_{1n} \vec{n}$$

$$\vec{f}_2 = f_{22} \vec{e}_2 + f_{21} \vec{e}_1 + f_{2n} \vec{n}$$



$$\vec{m}_1 = m_{11} \vec{e}_2 - m_{12} \vec{e}_1$$

$$\vec{m}_2 = -m_{22} \vec{e}_1 + m_{21} \vec{e}_2$$

Uogólnione siły przekrojowe
na powierzchni środkowej

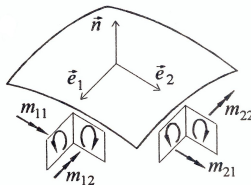
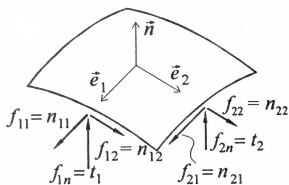
Uogólnione siły przekrojowe na powierzchni środkowej

$$f_{11} = n_{11} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{11} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz \quad f_{12} = n_{12} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{12} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz$$

$$f_{1n} = t_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{1z} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz$$

$$m_{11} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{11} z \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz \quad m_{12} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{12} z \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz$$

$$\mathbf{f}_1 = f_{11}\mathbf{e}_1 + f_{12}\mathbf{e}_2 + f_{1n}\mathbf{n} \quad \mathbf{m}_1 = +m_{11}\mathbf{e}_2 - m_{12}\mathbf{e}_1$$



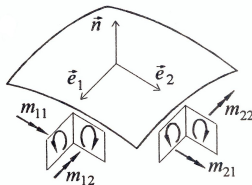
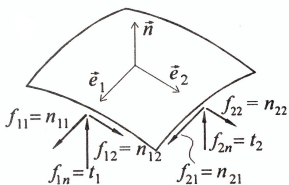
Uogólnione siły przekrojowe na powierzchni środkowej

$$f_{22} = n_{22} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{22} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz \quad f_{21} = n_{21} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{21} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz$$

$$f_{2n} = t_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{2z} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz$$

$$m_{22} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{22} z \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz \quad m_{21} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{21} z \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz$$

$$\mathbf{f}_2 = f_{21}\mathbf{e}_1 + f_{22}\mathbf{e}_2 + f_{2n}\mathbf{n} \quad \mathbf{m}_2 = -m_{22}\mathbf{e}_1 + m_{21}\mathbf{e}_2$$



Ogólne równania powłok Sandersa

I. Równania kinematyczne (6)

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} u_2 + \frac{w}{R_1}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} u_1 + \frac{w}{R_2}$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{A_1 A_2} \left(A_2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + A_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} u_1 - \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} u_2 \right)$$

$$\kappa_{11} = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2}$$

$$\kappa_{22} = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1}$$

$$\begin{aligned} \chi_{12} = A_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right] + A_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right] - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \left[\frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right] + \\ - \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \left[\frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \left[\frac{\partial(A_2 u_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial(A_1 u_1)}{\partial \xi_2} \right] \end{aligned}$$

Ogólne równania powłok Sandersa

II. Równania równowagi (5)

$$\frac{\partial(A_2 n_{11})}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(A_1 n_{12})}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} n_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} n_{22} + \frac{A_1 A_2}{R_1} t_1 + \frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) m_{12} \right] + A_1 A_2 \hat{p}_1 = 0$$

$$\frac{\partial(A_2 n_{12})}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(A_1 n_{22})}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} n_{12} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} n_{11} + \frac{A_1 A_2}{R_2} t_2 + \frac{A_2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) m_{12} \right] + A_1 A_2 \hat{p}_2 = 0$$

$$\frac{\partial(A_2 t_1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(A_1 t_2)}{\partial \xi_2} - A_1 A_2 \left(\frac{n_{11}}{R_1} + \frac{n_{22}}{R_2} \right) + A_1 A_2 \hat{p}_n = 0$$

$$\frac{\partial(A_2 m_{11})}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(A_1 m_{12})}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} m_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} m_{22} - A_1 A_2 t_1 = 0$$

$$\frac{\partial(A_2 m_{12})}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(A_1 m_{22})}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} m_{12} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} m_{11} - A_1 A_2 t_2 = 0$$

Ogólne równania powłok Sandersa

III. Równania fizyczne (6)

$$n_{11} = D^n (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22})$$

$$n_{22} = D^n (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11})$$

$$n_{12} = D^n \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{12}$$

$$D^n = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

$$m_{11} = D^m (\kappa_{11} + \nu \kappa_{22})$$

$$m_{22} = D^m (\kappa_{22} + \nu \kappa_{11})$$

$$m_{12} = D^m \frac{(1-\nu)}{2} \chi_{12}$$

$$D^m = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

IV. Warunki brzegowe

1 statyczne

$$n_\nu = \hat{n}_\nu \quad \tilde{n}_{\nu s} = n_{\nu s} + \left(\frac{3}{2R_s} - \frac{1}{2R_\nu} \right) m_{\nu s} = \hat{n}_{\nu s}$$

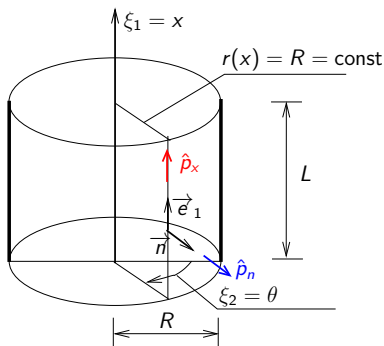
$$\tilde{t}_\nu = t_\nu + \frac{1}{A_s} \frac{\partial m_{\nu s}}{\partial \xi_s} = \hat{t}_\nu \quad m_\nu = \hat{m}_\nu$$

2 kinematyczne

$$u_\nu = \hat{u}_\nu, \quad u_s = \hat{u}_s, \quad w = \hat{w}, \quad \vartheta_\nu = \hat{\vartheta}_\nu$$

Komplet równań zamkniętych powłok walcowych

w układzie cylindrycznym w osiowo symetrycznym stanie membranowo-giętnym



$$r(x) = R$$

$$A_1 = 1 \quad A_2 = R$$

$$R_1 = \infty \quad R_2 = R$$

Dla osiowo symetrycznej powierzchni walcowej uwzględniamy przede wszystkim związki:

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial \xi_2} = 0 \quad \text{oraz} \quad R_1 = \infty$$

a dla stanu osiowo symetrycznego:

$$u_2 = u_\theta = 0$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{x\theta} = 0 \quad \chi_{12} = \chi_{x\theta} = 0$$

$$n_{12} = n_{x\theta} = 0 \quad m_{12} = m_{x\theta} = 0$$

$$t_2 = t_\theta = 0$$

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_2} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} = 0 \quad (\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{dx}$$

Komplet równań zamkniętych powłok walcowych

w układzie cylindrycznym w osiowo symetrycznym stanie membranowo-giętnym

W dowolnym punkcie na płaszczyźnie środkowej wprowadzamy jedenaście pól (funkcji zależnych jedynie od zmiennej x w osiowo symetrycznym stanie), pogrupowane w następujące wektory:

- wektor przemieszczenia $\mathbf{u}_{(2 \times 1)}^n(x) = \{u_x, w\} = \{u, w\} \quad [\text{m}]$,
- wektor odkształceń membranowych $\mathbf{e}_{(2 \times 1)}^n(x) = \{\varepsilon_x, \varepsilon_\theta\} \quad [-]$,
oraz giętnych $\mathbf{e}_{(2 \times 1)}^m(x) = \{\kappa_x, \kappa_\theta\} \quad [1/\text{m}]$,
- wektory sił membranowych $\mathbf{n}_{(2 \times 1)}(x) = \{n_x, n_\theta\} \quad [\text{kN/m}]$,
momentów $\mathbf{m}_{(2 \times 1)}(x) = \{m_x, m_\theta\} \quad [\text{kNm/m}]$,
sił poprzecznych $\mathbf{t}_{(1 \times 1)}(x) = \{t_x\} \quad [\text{kN/m}]$.

Komplet równań zamkniętych powłok walcowych

w układzie cylindrycznym w osiowo symetrycznym stanie membranowo-giętnym – sformułowanie lokalne

I. Równania kinematyczne (4)

$$\varepsilon_x = u' \quad \varepsilon_\theta = \frac{w}{R} \quad \kappa_x = -w'' \quad \kappa_\theta = 0$$

II. Równania równowagi (3)

$$n'_x + \hat{p}_x = 0 \quad t'_x - \frac{n_\theta}{R} + \hat{p}_n = 0 \quad m'_x - t_x = 0$$

III. Równania fizyczne (4)

$$n'_x = D^n(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta) \quad n_\theta = D^n(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x) \quad m_x = D^m\kappa_x \quad m_\theta = D^m\nu\kappa_x$$

$$\text{gdzie: } D^n = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad D^m = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

IV. Warunki brzegowe na linii $x_b = \text{const}$:

$$\text{a) statyczne: } n_\nu = n_x = \hat{n}_x \quad m_\nu = m_x = \hat{m}_x \quad t_\nu = t_x = \hat{t}_x$$

$$\text{b) kinematyczne: } u_\nu = u_x = \hat{u}_x \quad \vartheta_\nu = \vartheta_x = \hat{\vartheta}_x \quad w = \hat{w}$$



Komplet równań zamkniętych powłok walcowych

w układzie cylindrycznym w osiowo symetrycznym stanie membranowym

W dowolnym punkcie na płaszczyźnie środkowej wprowadzamy sześć pól:

- wektor przemieszczenia $\mathbf{u}_{(2 \times 1)}^n(x) = \{u_x, w\} = \{u, w\} ; [m]$,
- wektor odkształceń membranowych $\mathbf{e}_{(2 \times 1)}^n(x) = \{\varepsilon_x, \varepsilon_\theta\} [-]$,
- wektor sił membranowych $\mathbf{n}_{(2 \times 1)}(x) = \{n_x, n_\theta\} [kN/m]$.

I. Równania kinematyczne (2)

$$\varepsilon_x = u' \quad \varepsilon_\theta = \frac{w}{R}$$

II. Równania równowagi (2)

$$n'_x + \hat{p}_x = 0 \quad - \frac{n_\theta}{R} + \hat{p}_n = 0$$

III. Równania fizyczne (2)

$$n'_x = D^n(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta) \quad n_\theta = D^n(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x)$$

IV. Warunki brzegowe na linii $x_b = \text{const}$:

- a) statyczne: $n_\nu = n_x = \hat{n}_x$ b) kinematyczne: $u_\nu = u_x = \hat{u}_x$

