

TARCZE PROSTOKĄTNE

Charakterystyczne wielkości i równania

USTROJE POWIERZCHNIOWE
Mechanika materiałów i konstrukcji budowlanych, studia II stopnia
rok akademicki 2012/2013

Instytut L-5, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska

ADAM WOSATKO

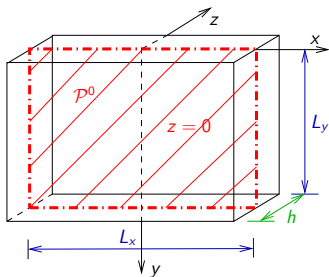
Tematyka wykładu

- 1 Definicja tarczy, kryterium znakowania
- 2 Równania tarcz prostokątnych
- 3 Przykłady – rozwiązania analityczne
 - Jednokierunkowe rozciąganie
 - Czyste ścinanie
 - Belko-ściana – opis zagadnienia

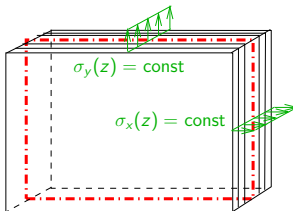


Definicja tarczy

Tarcza jest dźwigarem powierzchniowym, który można traktować jako plik warstw. W dowolnej warstwie (na płaszczyźnie środkowej $\mathcal{P}^0$ i równo oddalonej) panuje **płaski stan naprężenia**. Rozkład naprężeń po grubości tarczy jest stały.



Tarcza prostokątna



Rozkład naprężeń
normalnych wzdłuż grubości

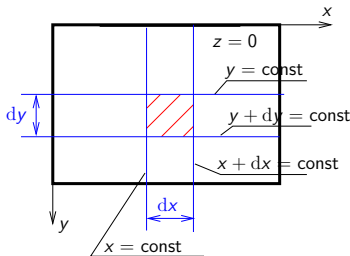
Rozważania na tym wykładzie ograniczamy do **tarcz prostokątnych**.



Model dwuwymiarowy tarczy

Założenia:

- **Modelem dwuwymiarowym tarczy jest jej płaszczyzna środkowa.**
- Grubość tarczy jest stała $h = \text{const}$.
- Panuje płaski stan naprężenia.
- Tarcze prostokątne opisujemy za pomocą kartezjańskiego układu współrzędnych.



Płaszczyzna środkowa z elementarnym powierzchniowym wycinkiem

Zmienne stanu dla tarczy

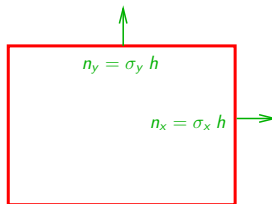
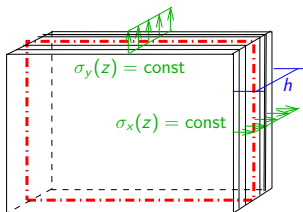
W dowolnym punkcie $\mathcal{P}^0$ na płaszczyźnie środkowej wprowadzamy osiem pól (funkcji zależnych od x, y), pogrupowanych w trzy wektory:

- wektor przemieszczenia (styczne do płaszczyzny środkowej):
 $\mathbf{u}_{(2 \times 1)}^n(x, y) = \{u_x, u_y\} = \{u, v\} \quad [\text{m}],$
- wektor odkształcenia (odkształcenia liniowe i postaciowe):
 $\mathbf{e}_{(3 \times 1)}^n(x, y) = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\} \quad [-],$
- wektor sił tarczowych (normalnych i stycznych):
 $\mathbf{n}_{(3 \times 1)}(x, y) = \{n_x, n_y, n_{xy}\} \quad [\text{kN/m}].$

Rozkłady tych niewiadomych poznamy w wyniku rozwiązania zagadnienia brzegowego.



Czym są siły tarczowe?



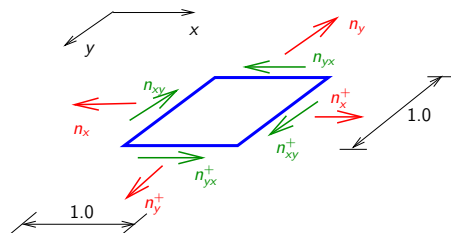
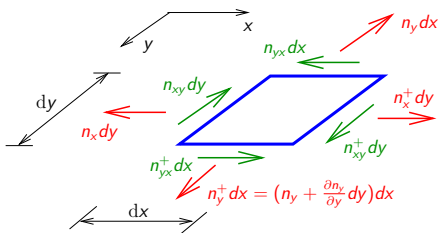
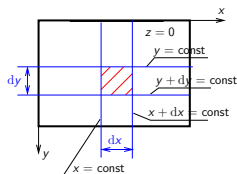
Siła tarczowa – wypadkowa składowej naprężenia wyznaczona na jednostkę długości linii przekrojowej z płaszczyzny środkowej:

$$n_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \, dz = \sigma_x h$$

$$n_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \, dz = \sigma_y h$$

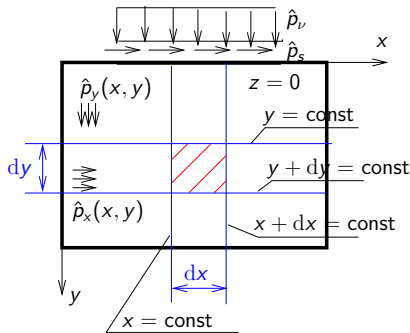
$$n_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \, dz = \tau_{xy} h = \tau_{yx} h = n_{yx}$$

Kryterium znakowania sił tarczowych



Kryterium znakowania sił tarczowych dla elementarnego wycinka $dx \times dy$ (po lewej) lub wycinka z jednostkowymi długościami linii brzegowych (po prawej).

Obciążenia i wymuszenia kinematyczne



Znane są wielkości zadane, sprowadzone do płaszczyzny środkowej:

- obciążenia powierzchniowe: $\hat{\mathbf{p}}(x, y) = \{\hat{p}_x, \hat{p}_y\}$ [kN/m²],
- obciążenia brzegowe: $\hat{\mathbf{p}}_b = \{\hat{p}_\nu, \hat{p}_s\}$ [kN/m],
- brzegowy wymuszenia kinematyczne: $\hat{\mathbf{u}}_b = \{\hat{u}_\nu, \hat{u}_s\}$ [m].

Komplet równań tarcz prostokątnych

Sformułowanie lokalne

I. Równania kinematyczne (3)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

II. Równania równowagi (2)

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} + \hat{p}_x = 0 \quad \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + \hat{p}_y = 0$$

III. Równania fizyczne (3)

$$n_x = D^n (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad n_y = D^n (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad n_{xy} = D^n \gamma_{xy}$$

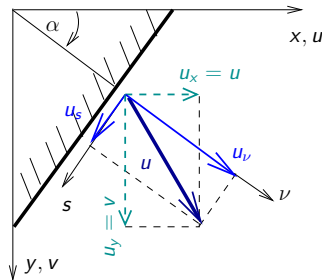
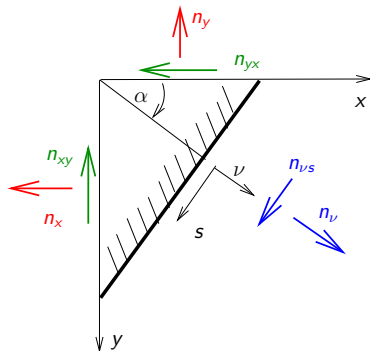
gdzie: $D^n = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}$ – sztywność tarczowa

IV. Warunki brzegowe w ogólnej postaci:

- a) kinematyczne: $u_\nu = \hat{u}_\nu \quad u_s = \hat{u}_s$
- b) statyczne: $n_\nu = \hat{p}_\nu \quad n_{\nu s} = \hat{p}_s$
- c) mieszane (jeden warunek kinematyczny i jeden statyczny).



Kryterium znakowania wielkości brzegowych



Warunki brzegowe:

- a) kinematyczne: $u_n = \hat{u}_n$ $u_s = \hat{u}_s$
- b) statyczne: $n_n = \hat{p}_n$ $n_{ns} = \hat{p}_s$
- c) mieszane – jeden warunek kinematyczny i jeden statyczny.

Możliwości uwzględnienia warunków brzegowych

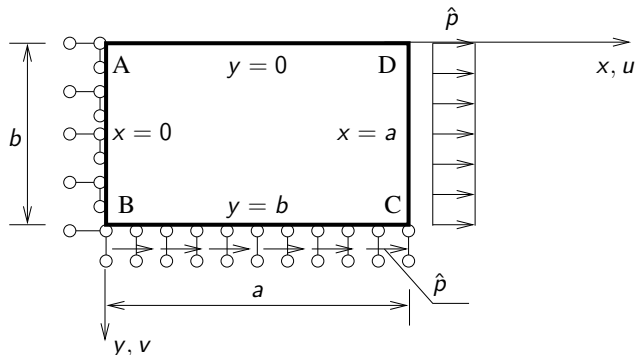
Różne warianty warunków brzegowych, w zależności od przyłożonych więzów kinematycznych i/lub obciążeń brzegowych:

brzeg $x = 0$: $u_\nu = u_x = 0$, $u_s = u_y = 0$,

brzeg $x = a$: $n_\nu = n_x = \hat{p}_\nu = \hat{p}$, $n_{\nu s} = n_{xy} = 0$,

brzeg $y = 0$: $n_\nu = n_y = 0$, $n_{\nu s} = n_{yx} = 0$,

brzeg $y = b$: $u_\nu = u_y = 0$, $n_{\nu s} = n_{yx} = \hat{p}_s = \hat{p}$.



Komplet równań tarcz prostokątnych

Zapis macierzowy

I. Równania kinematyczne

$$\underset{[3 \times 1]}{\mathbf{e}^n} = \underset{[3 \times 2]}{\mathbf{L}^n} \underset{[2 \times 1]}{\mathbf{u}^n}, \quad \text{gdzie:} \quad \underset{[3 \times 2]}{\mathbf{L}^n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

II. Równania równowagi

$$\underset{[2 \times 3]}{(\mathbf{L}^n)^T} \underset{[3 \times 1]}{\mathbf{n}} = \underset{[2 \times 1]}{\mathbf{p}^n}$$

III. Równania fizyczne

$$\underset{[3 \times 1]}{\mathbf{n}} = \underset{[3 \times 3]}{\mathbf{D}^n} \underset{[3 \times 1]}{\mathbf{e}^n}, \quad \text{gdzie:} \quad \underset{[3 \times 3]}{\mathbf{D}^n} = D^n \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$D^n = \frac{E h}{1-\nu^2}$$



Równania przemieszczeniowe tarcz

Dwa równania równowagi wyrażamy przez połączone równania fizyczne i kinematyczne:

I. R. kinematyczne + III. R. fizyczne $\rightarrow$ II. R. równowagi

W efekcie otrzymujemy dwa przemieszczeniowe równania różniczkowe drugiego rzędu o następującej postaci:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v = -\frac{1}{D^n} \hat{p}_x$$
$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v = -\frac{1}{D^n} \hat{p}_y$$

Siły tarczowe główne i ich kierunki

Wartości ekstremalnych sił tarczowych

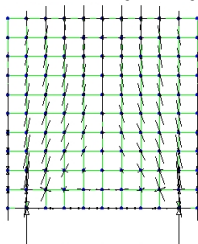
$$n_{I,II} = \frac{1}{2}(n_x + n_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(n_x - n_y)^2 + 4n_{xy}^2}$$

Kierunki główne

Wartość kąta α – pomiędzy osią Ox a kierunkiem maksymalnej siły n_I :

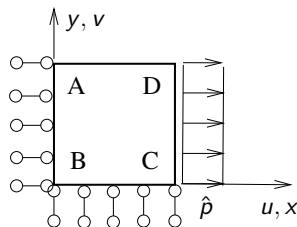
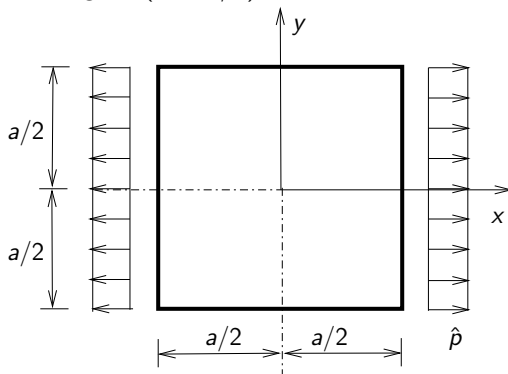
$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2n_{xy}}{n_x - n_y}$$

Trajektorie sił głównych – pokazują linie, wzdłuż których występują ekstremalne siły.



Tarcza jednokierunkowo rozciągana

Dana jest tarcza kwadratowa rozciągana w jednym kierunku za pomocą brzegowego obciążenia $p_\nu = +\hat{p} = \text{const}$ na dwóch przeciwległych brzegach ($x = \pm a/2$).



Zadanie będzie rozwiązywane jako zagadnienie brzegowe 1/4 obszaru w ujęciu lokalnym.

Układ równań i warunki brzegowe

dla 1/4 obszaru tarczy kwadratowej

Komplet 8 równań (różniczkowych i algebraicznych):

I. R. kinematyczne (3): $\varepsilon_x = u_{,x} \quad \varepsilon_y = v_{,y} \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}$

II. R. równowagi (2): $n_{x,x} + n_{yx,y} + \hat{p}_x = 0 \quad n_{xy,x} + n_{y,y} + \hat{p}_y = 0$

III. R. fizyczne (3):

$$\varepsilon_x = (n_x - \nu n_y)/(Eh) \quad \varepsilon_y = (n_y - \nu n_x)/(Eh) \quad \gamma_{xy} = 2(1 + \nu)n_{xy}/(Eh)$$

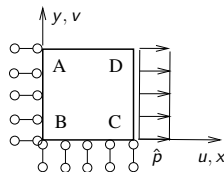
Dla czterech linii brzegowych 1/4 obszaru:

brzeg $x = 0$: $u_\nu = u(0, y) = 0, \quad n_{\nu s} = n_{xy} = 0,$

brzeg $y = 0$: $v_\nu = v(x, 0) = 0, \quad n_{\nu s} = n_{yx} = 0,$

brzeg $x = a/2$: $n_\nu = n_x = +\hat{p}, \quad n_{\nu s} = n_{xy} = 0,$

brzeg $y = a/2$: $n_\nu = n_y = 0, \quad n_{\nu s} = n_{yx} = 0.$



Tarcza jednokierunkowo rozciągana

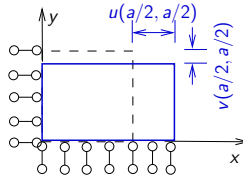
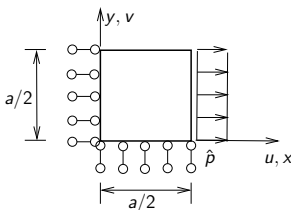
Rozwiązanie analityczne

- Pole sił tarczowych (otrzymanych przez przecałkowanie równań równowagi, z uwzględnieniem statycznych warunków brzegowych):

$$n_x(x, y) = +\hat{p} = \text{const} \quad n_y(x, y) = n_{xy}(x, y) = 0$$
- Pole odkształceń (obliczonych z algebraicznych równań fizycznych):

$$\varepsilon_x(x, y) = \hat{p}/(Eh) \quad \varepsilon_y(x, y) = -\nu\hat{p}/(Eh) \quad \gamma_{xy}(x, y) = 0$$
- Pole przemieszczeń (wyznaczonych z przecałkowania równań kinematycznych, z uwzględnieniem kinematycznych warunków brzegowych):

$$u(x, y) = \frac{\hat{p}}{Eh}x \quad v(x, y) = -\frac{\nu\hat{p}}{Eh}y$$



Tarcza jednokierunkowo rozciągana

Rozwiązanie dla określonych danych liczbowych

Dane:

Wymiary: $a = b = 1.0 \text{ m}$ $h = 0.01 \text{ m}$

Moduł Younga: $E = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ Współczynnik Poissona: $\nu = 0.3$

Obciążenie: $\hat{p} = 100 \text{ kN/m}$ $\hat{p}_x(x, y) = \hat{p}_y(x, y) = 0.0$

Na podstawie rozwiązania analitycznego:

$$n_x(x, y) = \hat{p} = 100 \text{ kN/m} = \text{const} \quad n_y(x, y) = n_{xy}(x, y) = 0$$

$$\varepsilon_x(x, y) = +5.0 \cdot 10^{-5} \quad \varepsilon_y(x, y) = -1.5 \cdot 10^{-5} \quad \gamma_{xy} = 0$$

$$u(+a/2, y) = u(+0.5, y) = +2.50 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$v(x, +a/2) = v(x, +0.5) = -0.75 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Należy zauważyć, że w tarczy kwadratowej przy niezerowym współczynniku Poissona zachodzą następujące związki:

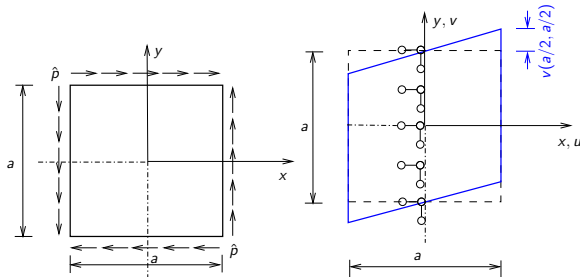
$$\varepsilon_x(x, y) = -\nu \varepsilon_y(x, y) \quad u(+a/2, +a/2) = -\nu v(+a/2, +a/2)$$



Tarcza kwadratowa w stanie czystego ścinania

Czyste ścinanie – niezerowe siły styczne i odkształcenia postaciowe.

Do rozwiązania analitycznego wykorzystujemy identyczny komplet 8 równań jak dla przykładu jednokierunkowego rozciągania.



Do równań dołączamy nowe warunki brzegowe dla całej tarczy:

$$\text{brzeg } x = 0: \quad u(0, y) = v(0, y) = 0,$$

$$\text{brzegi } x = \pm a/2: \quad n_{\nu s} = n_{xy} = +\hat{p}, \quad n_{\nu} = n_x = 0,$$

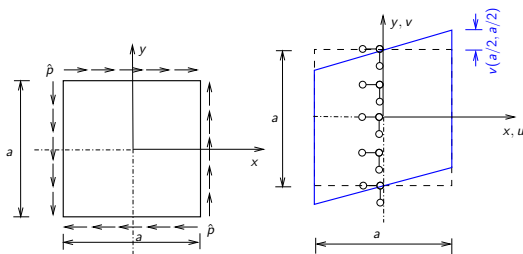
$$\text{brzegi } y = \pm a/2: \quad n_{\nu s} = n_{yx} = +\hat{p}, \quad n_{\nu} = n_y = 0.$$

Tarcza kwadratowa w stanie czystego ścinania

Rozwiązanie analityczne

Otrzymujemy następujące rozkłady sił tarczowych, odkształceń i przemieszczeń:

- $n_x(x, y) = n_y(x, y) = 0$ $n_{xy}(x, y) = +\hat{p} = \text{const}$
- $\varepsilon_x(x, y) = \varepsilon_y(x, y) = 0$ $\gamma_{xy}(x, y) = \frac{2(1+\nu)\hat{p}}{Eh} = \text{const}$
- $u(x, y) = 0$ $v(x, y) = \frac{2(1+\nu)\hat{p}}{Eh}x$



Tarcza kwadratowa w stanie czystego ścinania

Rozwiązanie dla określonych danych liczbowych

Dane:

Wymiary: $a = b = 1.0 \text{ m}$ $h = 0.01 \text{ m}$

Moduł Younga: $E = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ Współczynnik Poissona: $\nu = 0.3$

Obciążenie: $\hat{p}_s = \hat{p} = 100 \text{ kN/m}$ $\hat{p}_x(x, y) = \hat{p}_y(x, y) = 0.0$

Na podstawie rozwiązania analitycznego:

$$n_x(x, y) = n_y(x, y) = 0 \quad n_{xy}(x, y) = +100 \text{ kN/m} = \text{const}$$

$$\varepsilon_x(x, y) = \varepsilon_y(x, y) = 0.0 \quad \gamma_{xy}(x, y) = +1.3 \cdot 10^{-4} = \text{const}$$

$$u(x, y) = 0.0$$

$$v(x, y) = 1.3 \cdot 10^{-4} x \quad \rightarrow \quad v(\pm a/2, y) = \pm 0.65 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$



Belko-ściana – opis zagadnienia

Istotne są proporcje między wymiarami charakterystycznymi dla belki zginanej (L - długość, h - wysokość, b - szerokość). Mamy do czynienia z konstrukcjami:

- belkowymi, gdy $h < 0.4L$
- tarczowymi, gdy $0.4L \leq h \leq L$ – takie konstrukcje są nazywane **belko-ścianami**.

Zasadniczą zmianą, przy wzroście wysokości h jest zmiana rozkładu naprężeń normalnych $\sigma_x(const, y)$ w kierunku wysokościowym.

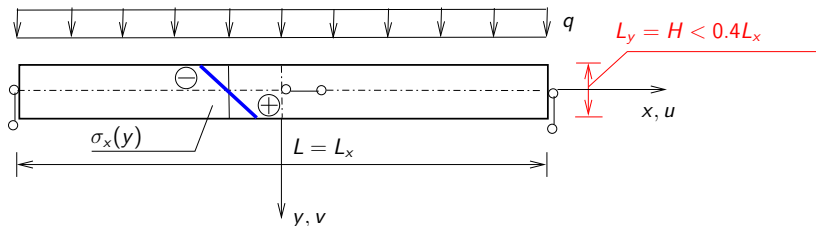
Przykładowo w swobodnie podpartych na obu końcach dźwigarach z obciążeniem na górnym brzegu:

- w belkach (niskich) jest on **liniowy**, z jednakowymi co do bezwzględnej wartości naprężeniami we włóknach skrajnych,
- w tarczy mamy do czynienia z **nieliniowym** rozkładem naprężeń, np. z charakterystycznym gwałtownym wzrostem naprężeń rozciągających na dolnym brzegu tarczy.



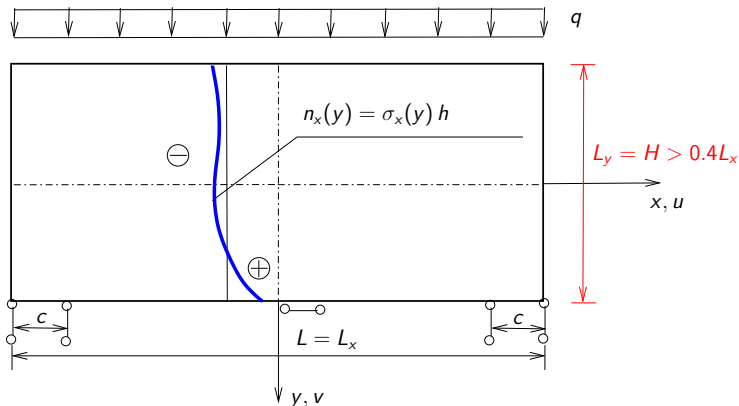
Belka niska

Rozkład naprężeń σ_x wzdłuż pionowej linii przekrojowej



Belka wysoka

Rozkład naprężeń σ_x wzdłuż pionowej linii przekrojowej



Literatura



M. RADWAŃSKA. *Ustroje powierzchniowe. Podstawy teoretyczne oraz rozwiązania analityczne i numeryczne.*
Skrypt PK, Kraków, 2009.



A. BORKOWSKI, Cz. CICHÓŃ, M. RADWAŃSKA, A. SAWCZUK, Z. WASZCZYSZYN. *Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe.*
T.3, rozdz.9, Arkady, Warszawa, 1995.



W. STAROSOLSKI. *Konstrukcje żelbetowe.*
T. 1,2 i 3, wyd. XII, PWN, Warszawa, 2008.

