

1 Równania nieliniowe

1.1 Postać ogólna równania nieliniowego

Często występującym, ważnym problemem obliczeniowym jest numeryczne poszukiwanie rozwiązań równań nieliniowych, np. algebraicznych (wielomiany), przestępnych (funkcje trygonometryczne), które przybierają postać:

$$f(x) = 0 \quad \text{lub} \quad g(x) = h(x). \quad (1)$$

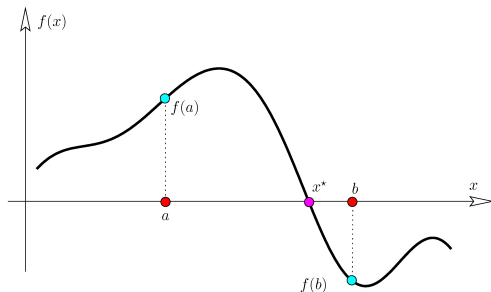
Rozwiązaniem lub **pierwiastkiem równania** (1) nazywamy każdą liczbę $x = x^*$, która spełnia to równanie.

Równanie nieliniowe charakteryzuje się tym, że może nie mieć żadnego rozwiązania lub też może mieć wiele rozwiązań. Dlatego nie można sformułować ogólnych reguł postępowania prowadzących do obliczenia jakiegokolwiek pierwiastka.

1.2 Warunki numerycznego rozwiązywania równań nieliniowych

Do obliczeń numerycznych można przystąpić dopiero wtedy gdy **wiemy, że poszukiwane rozwiązanie istnieje**.

Przy omawianiu algorytmów obliczania rozwiązań równań nieliniowych zakładamy, że równanie ma tylko **pierwiastki odosobnione**, tj. dla każdego pierwiastka równania istnieje otoczenie $[a, b]$, które nie zawiera innych pierwiastków tego równania.



Równania nieliniowe rozwiązywać będziemy **metodami iteracyjnymi**, które wymagają:

1. dokonania właściwego wyboru punktu startowego,
2. wybrania odpowiedniego algorytmu iteracyjnego zapewniającego zbieżność procesu obliczeniowego,
3. określenia kryterium stopu wynikającego z wymaganej dokładności obliczeń.

Punkt startowy musi być położony dostatecznie blisko poszukiwanego rozwiązania i znajdować się w przedziale izolacji tego pierwiastka. Zakładamy, że poszukiwany pierwiastek **istnieje**, i że znany jest jego **przedział izolacji**.

1.3 Etapy numerycznego rozwiązywania równań nieliniowych

Obliczanie przybliżone pierwiastków odosobnionych, rzeczywistych równania $f(x) = 0$ dzieli się na dwa etapy:

1. **lokalizacja pierwiastków**, a więc ustalenie możliwie małych przedziałów $[a, b]$, tzw. **przedziałów izolacji**, które zawierają jeden i tylko jeden pierwiastek;
2. **uściślenie pierwiastków przybliżonych**,
tj. określenie tych pierwiastków z żadaną dokładnością.

Każdy algorytm iteracyjnego obliczania pierwiastka generuje pewien ciąg punktów $x^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, charakteryzujący się tym, że odległości kolejnych punktów tego ciągu maleją, tzn.

$$\epsilon_k = \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{k \rightarrow \infty} \longrightarrow 0, \quad (2)$$

O metodzie iteracyjnej mówimy, że jest **szybkozbieżna** i wtedy, gdy odległości ϵ_k kolejnych punktów szybko maleją. W przeciwnym razie mówimy, że metoda jest **wolnozbieżna**.

1.4 Kryterium stopu procesu iteracyjnego

Proces iteracyjny nie może trwać w nieskończoność, dlatego należy sformułować warunek stopu, który powinien polegać na spełnieniu dwóch nierówności

$$\epsilon_k < \epsilon_x \quad \text{oraz} \quad |f(x)^{(k)}| < \epsilon_f. \quad (3)$$

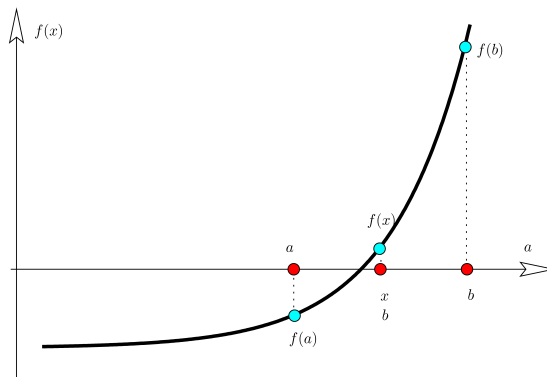
gdzie: ϵ_x, ϵ_f są małymi liczbami określającymi dokładność obliczeń.

1.5 Metoda połowienia (bisekcji)

Metoda bisekcji jest najprostszą ze wszystkich możliwych metod i jest **bardzo wolno zbieżna**. Dane jest równanie

$$f(x) = 0,$$

przy czym funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$ oraz zachodzi nierówność: $f(a) f(b) < 0$.



1.6 Metoda regula falsi. Metoda interpolacji liniowej

Regula – linia prosta. Falsi – fałszywy.

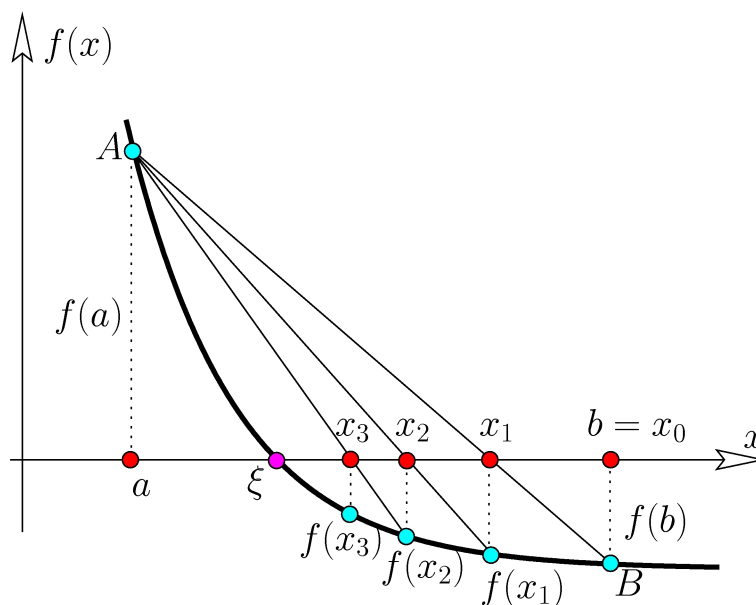
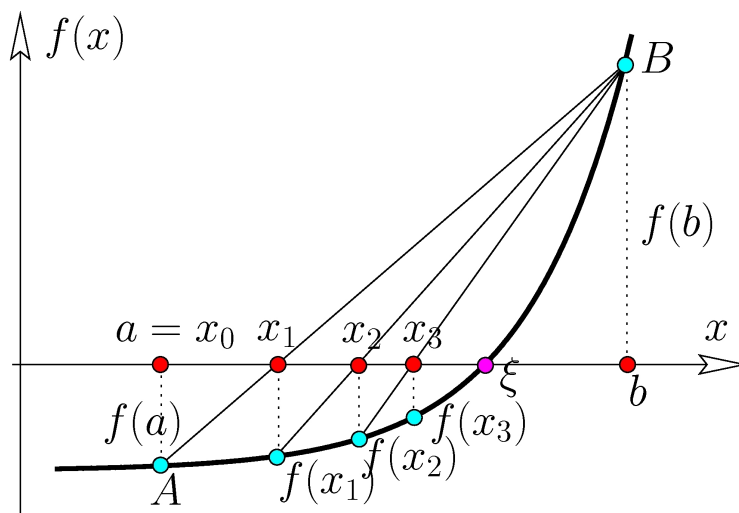
Metoda bazuje na fałszywym twierdzeniu, że w pewnym przedziale funkcja jest liniowa. Metoda ta jest szybciej zbieżna od metody bisekcji, a ponadto jej zbieżność jest również gwarantowana.

W interpretacji geometrycznej metoda interpolacji liniowej oznacza zastąpienie krzywej $f(x)$ cięciwą łączącą punkty $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}. \quad (4)$$

Dla $y = 0$ mamy

$$x_k = \frac{a f_b - b f_a}{f_b - f_a} \quad (5)$$



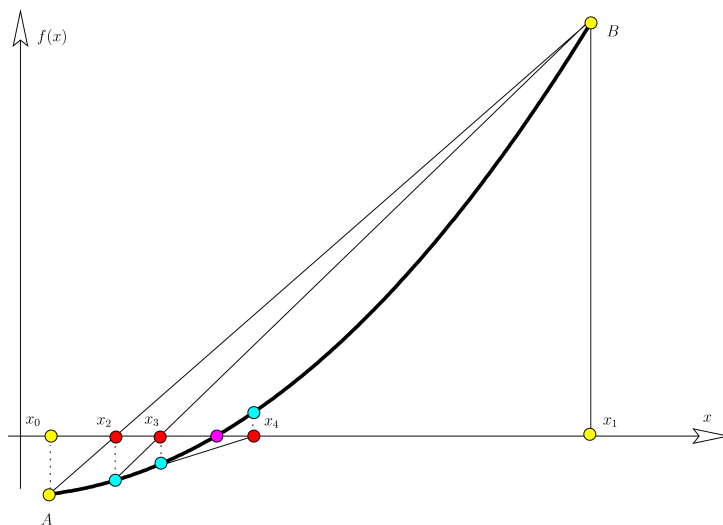
1.7 Metoda siecznych

W tej metodzie generowanie ciągu kolejnych przybliżeń wartości poszukiwanego pierwiastka odbywa się także za pomocą interpolacji liniowej.

Stosowana strategia interpolacji liniowej polega jednak na tym, że jest ona budowana na podstawie znanych wartości **dwóch ostatnio obliczonych rzędnych** funkcji $f(x)$.

W tej metodzie, $x_{(k+1)}$ wyznacza się jako odcięta punktu przecięcia siecznej przechodzącej przez punkt $A(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ oraz $B(x_k, f(x_k))$ z osią x -ów:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$



Posługiwanie się taką interpolacją może w pewnych przypadkach prowadzić do obliczenia pierwiastka x_{k+1} leżącego poza bieżącym przedziałem izolacji.

1.8 Metoda stycznych (Newtona-Raphsona)

Analizujemy funkcję f zmiennej x w otoczeniu punktu x_0 . Definiujemy iloraz (różnicowy) funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu Δx :

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Pochodna funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0 jest to granica, do której dąży iloraz, gdy Δx dąży do 0, o ile taka granica istnieje:

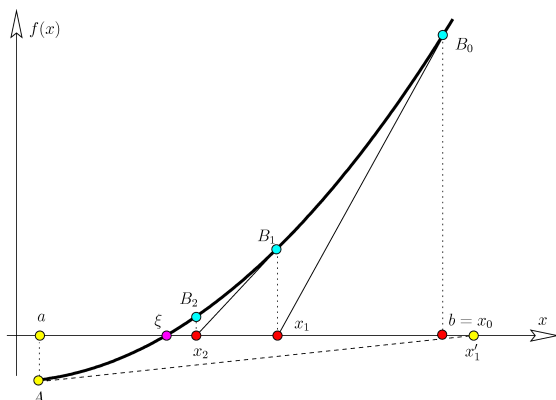
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (7)$$

Pochodna istnieje, jeśli:

- funkcja $f(x)$ jest ciągła,

- istnieje granica określona w (7)

Podstawę metody stycznych stanowi interpolacja funkcji $f(x)$ za pomocą stycznej prowadzonej w punkcie $B(x_0, f_0)$. Kolejne przybliżenia poszukiwanego pierwiastka są odciętymi punktu przecięcia stycznej z osią x :



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (8)$$

Jest to metoda najszybciej zbieżna o **zbieżności kwadratowej**.

Oznacza to, że przy spełnionych założeniach jej błąd maleje kwadratowo wraz z liczbą iteracji. Wadą metody jest fakt, że zbieżność nie zawsze musi zachodzić. W wielu przypadkach metoda bywa rozbieżna – przeważnie wtedy gdy punkt startowy jest zbyt daleko od szukanego pierwiastka równania.

Jeżeli zachodzą cztery warunki:

1. funkcje $f(x)$ jest określona i ciągła w przedziale $-\infty < x < +\infty$;
2. $f(a)f(b) < 0$;
3. $f'(x) \neq 0$ dla $a \leq x \leq b$;
4. $f''(x)$ istnieje w przedziale $(-\infty, +\infty)$ i nie zmienia znaku;

to przy zastosowaniu metody Newtona za początkowe przybliżenie x_0 można przyjąć dowolną wartość $c \in (a, b)$.

1.9 Zmodyfikowana metoda Newtona

Jeżeli pochodna $f'(x)$ zmienia się w przedziale domkniętym (a, b) nieznacznie to we wzorze

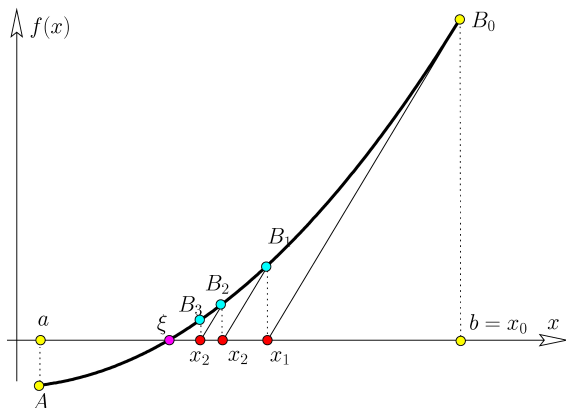
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

można przyjąć

$$f'(x_k) \approx f'(x_0).$$

Zatem kolejne przybliżenia pierwiastka x^* równania $f(x) = 0$ można obliczyć ze wzoru

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (9)$$



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

W interpretacji geometrycznej metoda ta oznacza zamianę stycznych w punktach $B_k(x_k, f(x_k))$ prostymi, równoległymi do stycznej, przeprowadzonej przez punkt $B_0(x_0, f(x_0))$.