

1 UKŁADY ALGEBRAICZNYCH RÓWNAŃ LINIOWYCH

1.1 Postać układu równań liniowych

Układ liniowych równań algebraicznych można zapisać w postaci:

1.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

2.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_j, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

3.

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

gdzie

\mathbf{A} – jest nieosobliwą, kwadratową macierzą o wymiarze $n \times n$,

\mathbf{B} – jest wektorem o n współrzędnych,

\mathbf{X} – jest wektorem poszukiwanym o n współrzędnych.

1.2 Wzory Cramera

Jeśli wyznacznik $D = \det(\mathbf{A}) \neq 0$, co oznacza, że układ równań liniowych (URL) ma jedno rozwiązanie, to poszukiwany wektor \mathbf{X} można uzyskać za pomocą **wzorów Cramera**:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Stosowanie takich wzorów wymaga obliczenia $n + 1$ wyznaczników. Z powodu wielkiej liczby działań nie stosujemy wzorów Cramera nawet dla układów niskiego stopnia.

1.3 Metody do rozwiązywania URL

Metody służące do rozwiązywania układu równań $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$ można podzielić na:

1. **metody dokładne,**
2. **metody iteracyjne (przybliżone).**

Decyzja wyboru odpowiedniej metody zależy od

- postaci macierzy \mathbf{A} ,
- specyfiki zagadnienia, które prezentuje układ.

Układy równań liniowych mogą mieć:

1. jedno rozwiązanie
2. nieskończenie wiele rozwiązań
3. brak rozwiązań (układy sprzeczne)

1.4 Metody dokładne

Przez **metodę dokładną** rozwiązywania układu równań liniowych rozumiemy metodę, która (przy braku błędów zaokrągleń) daje dokładne rozwiązanie po skończonej liczbie kroków.

Metody dokładne, które będą omówione to:

1. podstawianie w przód i podstawianie wstecz dla układów trójkątnych
2. metoda eliminacji Gaussa
3. metoda Gaussa-Jordana
4. metoda Choleskiego-Banachiewicza

1.5 Układy trójkątne

1.5.1 Macierz trójkątna górna

Układy liniowe, których macierz jest trójkątna, rozwiązuje się szczególnie łatwo. Układ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ z macierzą $\mathbf{A} \equiv \mathbf{U}$ trójkątną górną ma postać:

$$\begin{array}{cccccc} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n-1}x_{n-1} + u_{1n}x_n & = & b_1 \\ & u_{22}x_2 + \dots + u_{2n-1}x_{n-1} + u_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \dots & & \\ & & u_{n-1n-1}x_{n-1} + u_{n-1n}x_n & = & b_{n-1} \\ & & & & u_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Jeżeli założymy, że $u_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), to niewiadome można obliczyć w kolejności $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$, z wzorów:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{u_{nn}}, & x_{n-1} &= \frac{b_{n-1} - u_{n-1n}x_n}{u_{n-1n-1}}, & \dots, \\ x_1 &= \frac{b_1 - u_{1n}x_n - u_{1n-1}x_{n-1} - \dots - u_{12}x_2}{u_{11}} \end{aligned}$$

Przykład:

$$\{1r\} \quad a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \quad / \cdot \left(-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right) + \{2r\}$$

$$\{2r\} \quad a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)}$$

$$\{3r\} \quad a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)}$$

Założmy teraz, że $a_{11} \neq 0$. Wówczas z ostatnich 2 równań możemy wyeliminować x_1 odejmując od i -tego równania pierwsze pomnożone przez:

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad \text{dla } i = 2$$

Przekształcone równania przybierają postać:

$$\{1r\} \quad a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)}$$

$$\{2r\} \quad \quad \quad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)}$$

$$\{3r\} \quad a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)}$$

$$\{1r\} \quad a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \quad / \cdot \left(-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right) + \{3r\}$$

$$\{2r\} \quad a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)}$$

$$\{3r\} \quad a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)}$$

Założmy teraz, że $a_{11} \neq 0$. Wówczas z ostatnich 2 równań możemy wyeliminować x_1 odejmując od i -tego równania pierwsze pomnożone przez:

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad \text{dla } i = 3$$

Przekształcone równania przybierają postać:

$$\{1r\} \quad a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)}$$

$$\{2r\} \quad \quad \quad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{32}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)}$$

$$\{3r\} \quad \quad \quad a_{23}^{(2)}x_3 + a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)}$$

$$\{1r\} \quad a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)}$$

$$\{2r\} \quad \quad \quad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)} \quad / \cdot \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right) + \{3r\}$$

$$\{3r\} \quad \quad \quad a_{32}^{(2)}x_3 + a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)}$$

Ostatecznie przekształcony układ równań ma postać:

$$\{1r\} \quad a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)}$$

$$\{2r\} \quad \quad \quad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)}$$

$$\{3r\} \quad \quad \quad \quad \quad \quad + a_{33}^{(3)}x_3 = b_3^{(3)}$$

a więc układ trójkątny, który rozwiązujemy w Etapie II stosując **podstawianie wstecz**.

Wzory można streścić w następujący sposób: Eliminację wykonuje się w $n - 1$ krokach o numerach $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$. W k -tym kroku elementy $a_{ij}^{(k)}$ dla $j, j > k$ przekształca się wg wzorów:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)}$$

gdzie

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

dla: $i = k + 1, k + 2, \dots, n; \quad j = k + 1, k + 2, \dots, n$.

1.7 Metoda Gaussa-Jordana – pełnej eliminacji

Układ równań o postaci:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \dots & \\ a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)} \end{aligned}$$

Przekształcamy następująco:

Pierwsze równanie dzielimy przez $a_{11}^{(1)}$, a następnie od i -tego wiersza, $i = 2, 3, \dots, n$, odejmujemy wiersz pierwszy pomnożony przez $a_{i1}^{(1)}$, otrzymując:

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + a_{13}^{(2)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(2)}x_n &= b_1^{(2)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ \dots & \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)} \end{aligned}$$

Następnie drugie równanie dzielimy obustronnie przez $a_{22}^{(2)}$ i od i -tego wiersza, $i = 1, 3, \dots, n$, odejmujemy wiersz drugi pomnożony przez $a_{i2}^{(2)}$.

$$\begin{aligned} x_1 + a_{13}^{(3)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(3)}x_n &= b_1^{(3)} \\ x_2 + a_{23}^{(3)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(3)}x_n &= b_2^{(3)} \\ \dots & \\ a_{n3}^{(3)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(3)}x_n &= b_n^{(3)} \end{aligned}$$

Po $n - 1$ eliminacjach otrzymujemy układ postaci:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1^{(n)} \\ x_2 &= b_2^{(n)} \\ \dots & \\ x_n &= b_n^{(n)} \end{aligned}$$

czyli gotowe rozwiązanie.

1.8 Triangularyzacja – metoda Choleskiego-Banachiewicza

W wielu zagadnieniach numerycznych celowym jest przedstawienie danej macierzy \mathbf{A} w postaci iloczynu dwóch macierzy trójkątnych takich, aby $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$. Procedura wyznaczenia tych macierzy nosi nazwę **rozkładu LU**.

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ & & & \dots & \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Wtedy układ $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ jest równoważny układowi $\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Etapy rozwiązywania układu równań $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$:

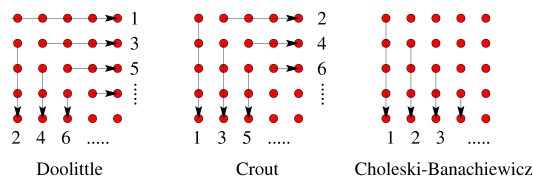
1. Rozkład $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$
2. Rozwiązanie układu z macierzą dolnotrójkątną $\mathbf{L}\mathbf{Y} = \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{Y}$
(stosując podstawianie w przód)
3. Rozwiązanie układu z macierzą górnotrójkątną $\mathbf{U}\mathbf{X} = \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$
(stosując podstawianie wstecz)

Rozkład trójkątny nie jest jednoznaczny i można go realizować w różny sposób:

1. gdy $l_{ii} = 1$ – metodą Doolittle’a,
2. gdy $u_{ii} = 1$ – metodą Crouta,
3. gdy $u_{ii} = l_{ii}$ – metodą Choleskiego-Banachiewicza.

Rozkład $\mathbf{L}\mathbf{U}$ można zrealizować:

- metodą Gaussa,
- traktując równość $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ jako układ n^2 równań z n^2 niewiadomymi l_{ij} dla $i > j$ i niewiadomymi u_{ij} dla $i \leq j$. Równania te wygodnie rozwiązywać na przemian wierszami i kolumnami zgodnie z rysunkiem.



Dla macierzy **symetrycznych dodatnio określonych** schematy zwarte są szczególnie atrakcyjne, gdyż wybór elementów głównych nie jest potrzebny. Zwykle przyjmuje się, że elementy

przekątniowe w \mathbf{L} są rzeczywiste i $\mathbf{U} = \mathbf{L}^T$.

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & \dots & l_{n1} \\ & l_{22} & l_{32} & \dots & l_{n2} \\ & & l_{33} & \dots & l_{n3} \\ & & & \dots & \\ & & & & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$l_{kk} = \sqrt{\left(a_{kk} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}^2\right)}$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} l_{kp}}{l_{kk}}$$

gdzie: $k = 1, 2, \dots, n$; $i = k + 1, k + 2, \dots, n$.

1.9 Metody przybliżone

Rozważane dotąd metody rozwiązywania układów równań liniowych są metodami bezpośrednimi, wymagającymi wykonania skończonego określonych działań.

Metody iteracyjne – w przeciwieństwie do tamtych – startują z przybliżenia początkowego, które stopniowo się ulepsza aż do otrzymania dostatecznie dokładnego rozwiązania.

Metody iteracyjne (przybliżone), które będą omówione to:

1. **metoda Jacobiego**
2. **metoda Gaussa-Seidla**

1.10 Metoda Jacobiego

W metodzie Jacobiego (**metoda iteracji prostej**) tworzy się ciąg przybliżeń $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ według wzoru:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i}{a_{ii}} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

1. Zbieżność procesu iteracyjnego zależy jedynie od właściwości macierzy \mathbf{A} .
2. Metoda jest zbieżna gdy zachodzą nierówności:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^{i-1} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

tj. jeśli wartości bezwzględne współczynników na przekątnej są dla każdego równania układu większe od sumy wartości bezwzględnych pozostałych współczynników tego równania.

3. Jako początkowe przybliżenie wybiera się często wektor $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

4. Kryteria stopu
tempo zbieżności:

$$\varepsilon^1 = \frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k+1)}\|} < \varepsilon_{\text{dop}}^1$$

$$\varepsilon^2 = \max_{1 \leq i < n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon_{\text{dop}}^2$$

Wielkość residuum:

$$\varepsilon^3 = \frac{\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{B}\|} < \varepsilon_{\text{dop}}^3$$

1.11 Metoda Gaussa-Seidla

Metoda Gaussa-Seidla stanowi pewną modyfikację metody iteracji prostej.

Polega ona na tym, że przy obliczaniu przybliżenia $(k+1)$ niewiadomej x_i , bierze się pod uwagę obliczone poprzednio przybliżenia $(k+1)$ niewiadomych x_1, x_2, \dots, x_{i-1} .

Iteracja odbywa się wg wzoru:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i}{a_{ii}} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Podane poprzednio twierdzenia o zbieżności procesu iteracyjnego pozostają w mocy.

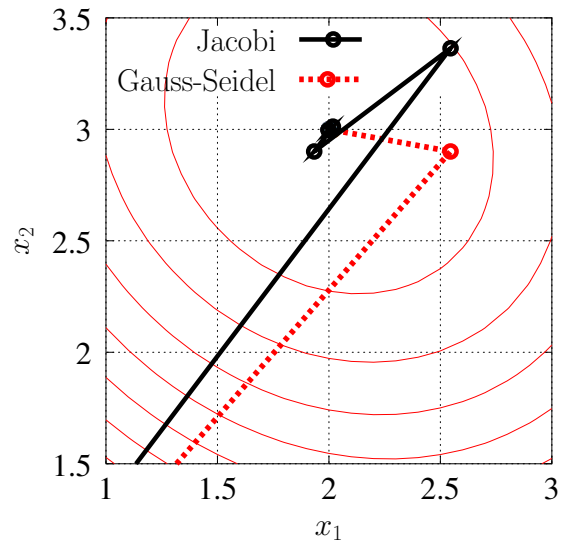
1.12 Porównanie metod iteracyjnych

Rozwiązać układ 2 liniowych równań $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ metodami iteracyjnymi i porównać tempo zbieżności oraz wartości residuum.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 28 \\ 37 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\varepsilon_{\text{dop}}^1 = \varepsilon_{\text{dop}}^2 = \varepsilon_{\text{dop}}^3 = 0.001$$

Metoda	Jacobiego	Gaussa-Seidla
Liczba kroków	6	4
x_1	1.99993	2.00002
x_2	2.99989	3.00000
ε^1	6.6834e-04	5.7638e-04
ε^2	2.3247e-04	1.6248e-04
ε^3	3.6126e-05	4.5170e-06



1.13 Odwracanie macierzy

Macierzą odwrotną macierzy kwadratowej \mathbf{A} nazywamy macierz kwadratową \mathbf{A}^{-1} spełniającą związek

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}, \quad (1)$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową.

Jeśli przyjmiemy, że $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$, to $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}$, czyli

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

gdzie \mathbf{x}_i i \mathbf{e}_i jest i -tą kolumną odpowiednio w \mathbf{X} i \mathbf{I} .

Tak więc **kolumny macierzy \mathbf{A}^{-1} są rozwiązaniami układów liniowych z prawymi stronami równymi kolumnom macierzy jednostkowej \mathbf{I} .**