

# Metoda Różnic Skończonych - część 1

Magdalena Jakubek

marzec 2017

## Główne zagadnienia

- Jak się konstruuje operatory różnicowe dla operatorów różniczkowych
  - na siatce prostokątnej składanie operatorów jednowymiarowych
  - dowolny układ punktów - rozwijanie funkcji w szereg Taylora
- Gwiazdy różnicowe dla operatora Laplace'a i bilaplasjanu
- Konstruowanie układu równań różnicowych dla równania Poissona w obszarze prostokątnym
- Uwzględnianie warunków Dirichleta i Neumanna w MRS w 2D
- MRS w równaniach parabolicznych i hiperbolicznych
- Warunki stabilności schematów różnicowych w powyższych równaniach
- Schematy jawne i niejawne
- Rozwiązanie niestacjonarnego zagadnienia przepływu ciepła w obszarze jednowymiarowym

## Klasyfikacja równań różniczkowych drugiego rzędu

Rozważmy równanie dwu zmiennych:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + ku = l \quad (1)$$

Zastępując:  $u_{xx} - \alpha^2$ ,  $u_{xy} - \alpha\beta$ ,  $u_{yy} - \beta^2$ ,  $u_x - \alpha$ ,  $u_y - \beta$  można utworzyć wielomian:

$$P(\alpha, \beta) = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + e\beta + f$$

Właściwości rozwiązań równania (1) zależą od właściwości algebraicznych wielomianu  $P(\alpha, \beta)$ . W szczególności typem równania rządzi wielkość  $b^2 - ac$ , zwana [wyróżnikiem](#)

- $b^2 - ac < 0$  **równanie eliptyczne**
- $b^2 - ac = 0$  **równanie paraboliczne**
- $b^2 - ac > 0$  **równanie hiperboliczne**

Typ równania może się zmieniać w zależności od obszaru.

Przykłady:

1.

$$3u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + xu_y = 0$$

jest to równanie eliptyczne bo  $b^2 - ac = -14 < 0$

2. równanie Tricomi (przepływu naddźwiękowego)

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0$$

$y > 0$  eliptyczne,  $y = 0$  paraboliczne,  $y < 0$  hiperboliczne

## Równania równowagi i ewolucyjne

- **Równania eliptyczne** (w szczególności równanie Laplace'a) opisują obiekty fizyczne w stanie równowagi (niezależnie od czasu) lub w stanie ustalonym.
- **Równania paraboliczne i hiperboliczne** opisują obiekty fizyczne, które ewoluują w czasie. W przypadku takich równań początkowy stan obiektu (warunki początkowe) stanowi dodatkowy warunek konieczny by zadanie było dobrze postawione.
- Równania eliptyczne występują w zagadnieniach brzegowych, natomiast równania paraboliczne i hiperboliczne prowadzą do zagadnień początkowo-brzegowych.

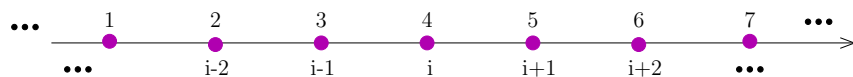
## Idea MRS

- Zastąpienie obszaru zbiorem węzłów różnicowych  
**zamiana postaci rozwiązania : z funkcji ciągłej na skończony zbiór wartości funkcji w węzłach**
- Zastąpienie pochodnych w równaniach problemu **wzorami różnicowymi**
- Rozpisanie równania różnicowego dla wszystkich punktów węzłowych, w których poszukujemy wartości funkcji
- Przedstawienie warunków brzegowych w reprezentacji różnicowej
- Zapisanie algebraicznego układu równań i jego rozwiązanie czyli wyznaczenie węzłowych wartości funkcji pierwotnej występującej w równaniu różniczkowym np. funkcji ugięcia
- Wyznaczenie wartości funkcji wtórnych.

## Zalety i wady metod różnicowych

- Łatwa konstrukcja siatki, zwłaszcza prostokątnej.
- Proste wzory dla siatki ze stałym krokiem.
- Proste zagęszczanie siatki poprzez jej połowienie.
- Zastosowanie dla różnorodnych ośrodków (niejednorodnych, anizotropowych, nieliniowych).
- Kłopoty z dopasowaniem siatki do obszaru.
- Trudności związane z warunkami brzegowymi.
- Duża liczba węzłów.

## Centralne wzory różnicowe dla zagadnienia jednowymiarowego



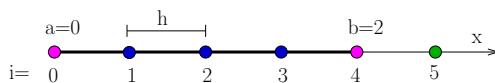
|           |                  | i-2  | i-1  | i    | i+1  | i+2 |
|-----------|------------------|------|------|------|------|-----|
| $f^I$     | $\frac{1}{2h}$   |      | (-1) | (0)  | (1)  |     |
| $f^{II}$  | $\frac{1}{h^2}$  |      | (1)  | (-2) | (1)  |     |
| $f^{III}$ | $\frac{1}{2h^3}$ | (-1) | (2)  | (0)  | (-2) | (1) |
| $f^{IV}$  | $\frac{1}{h^4}$  | (1)  | (-4) | (6)  | (-4) | (1) |

Rozwiązać problem brzegowy:

$$y''(x) = x, \quad x \in [a, b]$$

$$y(a) = 2, \quad y'(b) = 1, \quad \text{gdzie } a = 0.0, \quad b = 2.0;$$

Przedział  $[0, 2]$  dzielimy na  $n = 4$  części,  $h = 0.5$ .



Tworzymy układ równań różnicowych dla  $i = 1, 2, 3, 4$ :

$$\frac{1 \cdot y_{i-1} - 2 \cdot y_i + 1 \cdot y_{i+1}}{h^2} = x_i \quad \longrightarrow \quad y_{i-1} - 2 \cdot y_i + y_{i+1} = h^2 x_i$$

Warunki brzegowe mają następującą postać różnicową:

$$1 \cdot y_0 = 2, \quad \frac{-1 \cdot y_3 + 1 \cdot y_5}{2h} = 1 \quad \longrightarrow \quad -1 \cdot y_3 + 1 \cdot y_5 = 2h.$$

Tworzymy układ równań różnicowych dla  $i = 1, 2, 3, 4$ :

$$y_{i-1} - 2 \cdot y_i + y_{i+1} = h^2 x_i$$

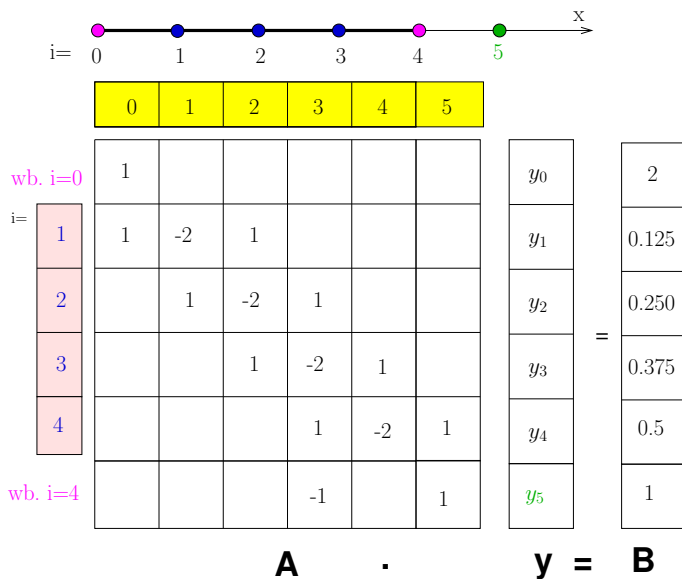
Warunki brzegowe mają następującą postać różnicową:

$$1 \cdot y_0 = 2, \quad -1 \cdot y_3 + 1 \cdot y_5 = 2h.$$

Otrzymujemy **układ równań MRS**:

|         |                                                   |
|---------|---------------------------------------------------|
| $i = 0$ | $1 \ y_0 = 2$                                     |
| $i = 1$ | $1 \cdot y_0 - 2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = 0.125$ |
| $i = 2$ | $1 \cdot y_1 - 2 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 = 0.250$ |
| $i = 3$ | $1 \cdot y_2 - 2 \cdot y_3 + 1 \cdot y_4 = 0.375$ |
| $i = 4$ | $1 \cdot y_3 - 2 \cdot y_4 + 1 \cdot y_5 = 0.500$ |
| $i = 4$ | $-1 \ y_3 + 1 \cdot y_5 = 1$                      |

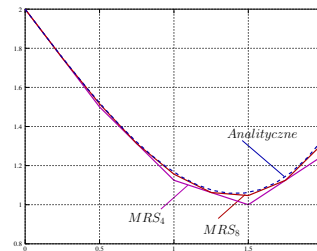
Zapis układu równań w postaci macierzowej  $\mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{B}$ :



# Wyniki

Rozwiązanie analityczne:  $y(x) = \frac{1}{6}x^3 - x + 2$

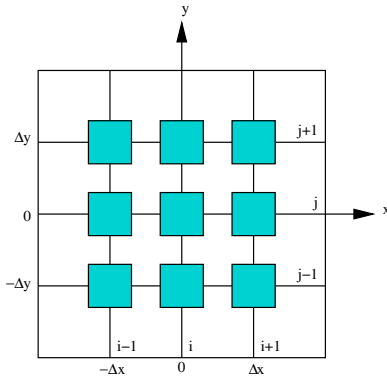
| nr | x   | MRS <sub>4</sub> | Rozwiązanie<br>analityczne |
|----|-----|------------------|----------------------------|
| 0  | 0.0 | 2.0000           | 2.0000                     |
| 1  | 0.5 | 1.5000           | 1.5208                     |
| 2  | 1.0 | 1.2500           | 1.1667                     |
| 3  | 1.5 | 1.0000           | 1.0625                     |
| 5  | 2.0 | 1.2500           | 1.3333                     |



## Siatka różnicowa

Do dyskretyzacji równania różniczkowego cząstkowego zwykle wybierana jest regularna siatka prostokątna dla zagadnień dwuwymiarowych lub sześcienna dla zagadnień 3D.

Poniżej siatka prostokątna o wymiarach oczek  $\Delta x \times \Delta y$ , na której aproksymowana jest funkcja  $u(x, y)$ :



$$u_{i,j} = u(x_0, y_0)$$

$$u_{i+1,j} = u(x_0 + \Delta x, y_0)$$

$$u_{i-1,j} = u(x_0 - \Delta x, y_0)$$

$$u_{i,j+1} = u(x_0, y_0 + \Delta y)$$

$$u_{i,j-1} = u(x_0, y_0 - \Delta y)$$

Jedną z metod tworzenia równań różnicowych jest rozwinięcie w szereg Taylora funkcji  $u(x, y)$  ciągłej i różniczkowalnej w otoczeniu punktu  $x_0$ :

$$u(x_0 + \Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_0} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_0} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x_0} + \dots \quad (2)$$

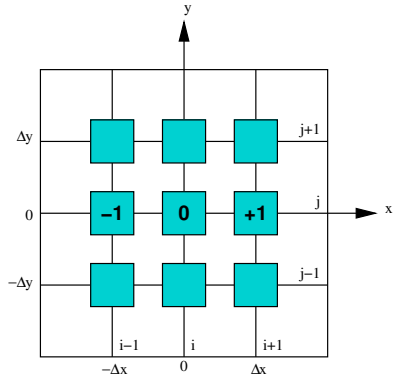
$$u(x_0 - \Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) - \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_0} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_0} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x_0} + \dots \quad (3)$$

Odejmując od siebie powyższe równania otrzymujemy różnicę centralną

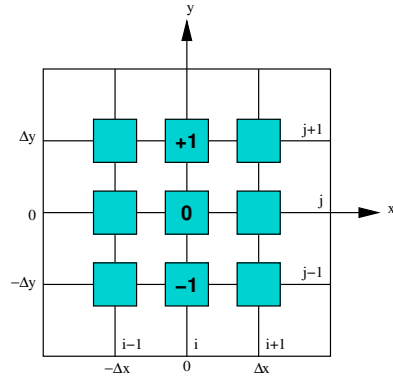
$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_0} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0 - \Delta x, y_0)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (4)$$

Dodając równania otrzymujemy aproksymację drugiej pochodnej

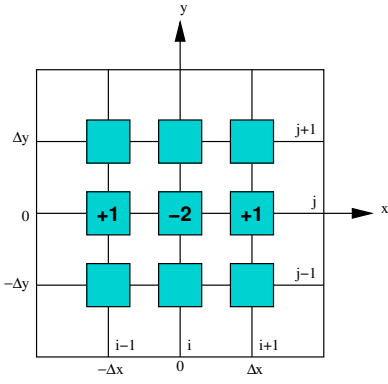
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_0} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2 \quad (5)$$



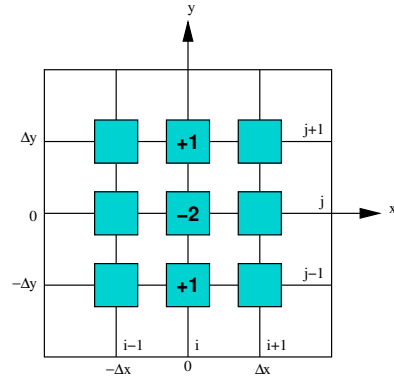
$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta^2 x)$$



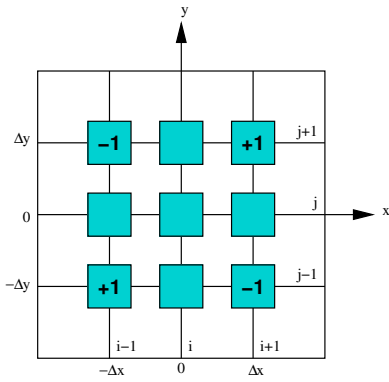
$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta^2 y)$$



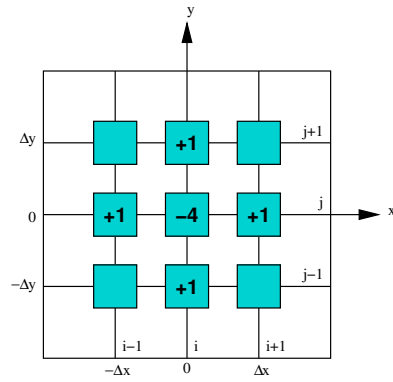
$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta^2 x} + O(\Delta^2 x)$$



$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta^2 y} + O(\Delta^2 y)$$



$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} + O(\Delta^2 x + \Delta^2 y)$$



Operator Laplace'a dla funkcji  $u(x, y)$  dla prostokątnej siatki:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

## Równanie eliptyczne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C, \quad (6)$$

$$u_{xx} + u_{yy} = C, \quad (7)$$

$$\Delta u = C, \quad (8)$$

$$\nabla^2 u = C \quad (9)$$

$C = 0$  – równanie Laplace’a (znajdowanie stanu ustalonego, brak zmiennej czasowej),

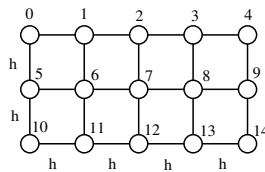
$C \neq 0$  – równanie Poissona.

Przykład:

Znaleźć wartości węzłowe dla równania

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1 \quad (10)$$

przy przyjęciu zerowych warunków brzegowych. Przyjąć siatkę aproksymacyjną, jak na poniższym rysunku. Zastosować podejście różnicowe. Obszar zadania podlega dyskretyzacji (generacja siatki) - wprowadzono



15 węzłów numerowanych od 0 do 14 równomiernie rozłożonych w obszarze. Przyjąć w obydwu kierunkach  $h = 1$ .

12 węzłów to węzły brzegowe ( $f = 0$ ). W zadaniu należy skorzystać z symetrii, która wynika z danych zadania ( $f_8 = f_6$ ).

$$f_0 = f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = f_{10} = f_{11} = f_{12} = f_{13} = f_{14} = 0.$$

Niewiadomych mamy dwie:  $f_6, f_7$ .

## Równania paraboliczne

Przykładem może być równanie dyfuzji lub nieustalonego przepływu ciepła.

$$\alpha u_{xx} - u_t = f, \quad (x, t) \in \Omega, \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq t_0 \quad (11)$$

- warunki brzegowe:

$$\begin{cases} u(a, t) = u_a, \\ u(b, t) = u_b \end{cases} \quad (12)$$

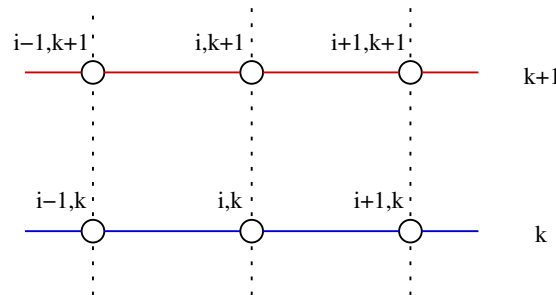
- warunek początkowy

$$u(x, t_0) = u_0 \quad (13)$$

$\alpha$  -współczynnik przewodności cieplnej,

$f = f(x, t)$  -funkcja intensywności generacji ciepła w obszarze.

Szukamy rozkładu temperatury  $u = u(x, t)$  dla każdego  $t$ . Wprowadzamy siatkę z podziałem równomiernym w obu kierunkach  $(h, \Delta t)$ . Liczba węzłów na każdym poziomie wynosi  $n$ .



Rozwiązanie polega na zastosowaniu odpowiednich schematów różnicowych, rozpiętych na węzłach siatki należących do poziomu znanego  $k$  (dla  $t = t_k$ ) oraz poziomu nieznanego  $k + 1$  (dla  $t = t_{k+1}$ ).

Najprostszy tego typu **schemat otwarty** (**jawny**, explicit) wykorzystuje trzy węzły z poziomu znanego o numerach  $(i - 1, k)$ ,  $(i, k)$ ,

$(i + 1, k)$  i jeden środkowy z poziomu nieznanego  $(i, k + 1)$ .

Po zapisaniu centralnych wzorów różnicowych na drugą pochodną (po zmiennej  $x$ )

$$(u_{xx})_{i,k} \approx \frac{u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}}{h^2} \quad (14)$$

oraz pierwszą pochodną po zmiennej  $t$  na poziomie znanym

$$(u_t)_{i,k} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} \quad (15)$$

otrzymujemy równanie dla poziomu znanego

$$\alpha \frac{u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}}{h^2} - \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} = f_{i,k} \quad (16)$$

gdzie: np  $u_{i,k} = u(x_i, t_k)$ ,  $f_{i,k} = f(x_i, t_k)$ .

Przyjmujemy:

$$\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{h^2}. \quad (17)$$

Otrzymujemy jawny wzór na wartość nieznaną  $u_{i,k+1}$

$$u_{i,k+1} = \lambda u_{i-1,k} + (1 - 2\lambda)u_{i,k} + \lambda u_{i+1,k} - \Delta t \cdot f_{i,k} \quad (18)$$

Powyższy wzór ma ograniczenie związane z dobraniem odpowiedniego kroku czasowego,  $\Delta t$ , który musi być taki, by spełniony był warunek stabilności schematu

$$\lambda < \frac{1}{2} \quad (19)$$

stąd wynika

$$\Delta t < \Delta t_{kryt} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{\alpha}. \quad (20)$$

Dokładniejsze wyniki można uzyskać gdy wykorzystamy więcej niż jeden węzeł na poziomie nieznanym. Przykładem takiego schematu jest schemat **iniejawny prosty**, który wykorzystuje trzy węzły na poziomie nieznanym:  $(i - 1, k + 1)$ ,  $(i, k + 1)$ ,  $(i + 1, k + 1)$ , a tylko jeden

na poziomie znanym  $(i, k)$ .

$$(u_{xx})_{i,k+1} \approx \frac{u_{i-1,k+1} - 2u_{i,k+1} + u_{i+1,k+1}}{h^2} \quad (21)$$

$$(u_t)_{i,k+1} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} \quad (22)$$

$$\alpha \frac{u_{i-1,k+1} - 2u_{i,k+1} + u_{i+1,k+1}}{h^2} - \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} = f_{i,k+1} \quad (23)$$

Równanie niejawne wynikające z powyższych wzorów:

$$-\lambda u_{i-1,k+1} + (1 + 2\lambda)u_{i,k+1} - \lambda u_{i+1,k+1} = u_{i,k} + \Delta t \cdot f_{i,k+1} \quad (24)$$

Należy utworzyć równania dla wszystkich węzłów wewnętrznych na poziomie nieznanym. Otrzymamy układ równań o  $n - 2$  niewiadomych. Zaletą tego schematu jest stabilność, możemy do obliczeń przyjmować dowolne  $\Delta t$ , oczywiście pamiętając, że im mniejszy krok czasowy tym mniejszy błąd rozwiązania.

## Równanie hiperboliczne

Przykłady: równania falowe, drgania (rozkład funkcji w czasie i przestrzeni), pewne równania teorii plastyczności.

$$u_{xx} - \beta u_{tt} = f, \quad (x, t) \in \Omega, \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq t_0 \quad (25)$$

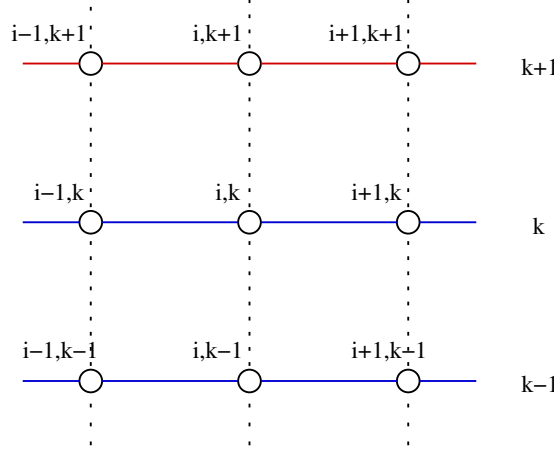
- warunki brzegowe:

$$\begin{cases} u(a, t) = u_a, \\ u(b, t) = u_b \end{cases} \quad (26)$$

- warunki początkowe

$$\begin{cases} u(x, t_0) = u_0 \\ u'_t(x, t_0) = \nu_0 \end{cases} \quad (27)$$

$\beta$  oznacza stosunek gęstości masy i modułu sprężystości ( $\beta = \frac{\rho}{E} > 0$ ),  
 $f = f(x, t)$  oznacza rozkład sił masowych w obszarze.  
Szukamy funkcji przemieszczeń  $u = u(x, t)$  w czasie.



Dwukrokowy schemat różnicowy (otwarty, jawny) będzie wykorzystywał jeden węzeł na poziomie nieznanym  $(i, k + 1)$ .

Aproksymacja drugich pochodnych po  $x$  i po czasie  $t$

$$(u_{xx})_{i,k} \approx \frac{u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}}{h^2}$$

$$(u_{tt})_{i,k} \approx \frac{u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}}{\Delta t^2}$$

Równanie różnicowe zapisujemy w punkcie  $(i, k)$

$$\frac{u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}}{h^2} - \beta \frac{u_{i,k-1} - 2u_{i,k} + u_{i,k+1}}{\Delta t^2} = f_{i,k} \quad (28)$$

Wprowadzamy oznaczenie  $\lambda = \frac{\Delta t^2}{\beta h^2}$ .

Wzór otwarty na nieznaną wartość można zapisać:

$$u_{i,k+1} = \lambda u_{i-1,k} + u_{i,k}(2 - 2\lambda) + \lambda u_{i+1,k} - u_{i,k-1} - \frac{\Delta t^2}{\beta} f_{i,k} \quad (29)$$

Schemat jest stabilny jeżeli  $\lambda < 1$ . Z powyższych warunków wynika zależność dla długości kroku czasowego  $\Delta t$

$$\Delta t < \Delta t_{kryt} = h\sqrt{\beta} \quad (30)$$