

# Elementy równań różniczkowych cząstkowych

Magdalena Jakubek

marzec 2017

- Równania różniczkowe cząstkowe
- Problem brzegowy i problem początkowy
- Klasyfikacja równań
- Rodzaje warunków brzegowych
- Najważniejsze równania fizyki matematycznej

# 1 Notacja i terminologia

## 1.1 Pochodna cząstkowa

- Pochodna cząstkowa funkcji wielu zmiennych  
Niech :  $u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = u(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{h} \quad (1)$$

Zakładamy, że granica istnieje i mierzy szybkość zmiany  $u$  przy zmianie  $x$  oraz ustalonych pozostałych zmiennych niezależnych.

- Oznaczenia:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv u_{xx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv u_{xy}, \dots \quad (2)$$

- **Ciągłość funkcji** Jeżeli dla funkcji  $u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  wszystkie pochodne cząstkowe do rzędu  $m$  są ciągłe w obszarze  $\Omega$  to o funkcji  $u$  mówimy, że jest klasy  $C^m(\Omega)$ .
- **Funkcje harmoniczne**: Funkcja  $u = u(\underline{x})$  jest harmoniczna w otwartym obszarze  $\Omega$  jeżeli ma ciągle pochodne rzędu drugiego włącznie oraz spełnia w  $\Omega$  równanie Laplace'a.
- **Liniowość** - funkcja niewiadoma i jej pochodne cząstkowe występują w równaniu w co najwyżej pierwszej potęgze, czyli liniowo. Zbiór funkcji (ciągłych, różniczkowalnych) jest przestrzenią liniową.

## 1.2 Notacja wielowskaźnikowa

Notacja używana ze względu na wygodny zapis pochodnych wyższych rzędów.

- Wektor  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  o nieujemnych składowych całkowitych  $\alpha_i$  nazywamy wielowskaźnikiem długości  $|\alpha|$ :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \sum_i \alpha_i. \quad (3)$$

- Jeżeli  $\alpha$  jest wielowskaźnikiem

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(x) \quad (4)$$

to  $D^\alpha$  – pochodna cząstkowa.

Przykład:

$$\alpha = (2, 0, 1), \quad D^\alpha u(x) = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_3}. \quad (5)$$

### 1.3 Definicja równania różniczkowego

Równanie postaci:

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \quad x \in U \quad (6)$$

nazywamy równaniem różniczkowym cząstkowym  $k$ -tego rzędu;  
funkcja

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R} \quad U \in \mathbb{R}^n \quad (7)$$

jest dana, a  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  jest niewiadomą.

Przykład:  $n = 2$ ,  $k = 3$  czyli  $n^k = 2^3 = 8$ :

$$x_1^3, \quad x_1^2 x_2, \quad x_2 x_1^2, \quad x_1 x_2 x_1, \quad x_2^2 x_1, \quad x_1 x_2^2, \quad x_2 x_1 x_2, \quad x_2^3. \quad (8)$$

### 1.4 Równanie różniczkowe cząstkowe

PDF (Partial Differential Equation) równanie zawierające funkcję niewiadomą wielu zmiennych i jej pochodne cząstkowe.

$$F(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (9)$$

W zastosowaniach technicznych poszukiwana funkcja  $u$  jest funkcją zmiennych przestrzennych  $x, y, z$  i czasu:  $u = u(x, y, z, t)$ .

Znajdowanie rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego oznacza otrzymanie prostych, jawnych wzorów albo dowodzenie istnienia i innych własności rozwiązania.

*Rozwiązaniem równania różniczkowego cząstkowego  $n$ -tego rzędu w obszarze  $U \in \mathbb{R}^n$  nazywamy taką funkcję wielu zmiennych klasy  $C^n$  w tym obszarze, która po podstawieniu wraz ze swymi pochodnymi do danego równania różniczkowego zamienia je w tożsamość w obszarze  $U$ .*

- Równanie różniczkowe jest **liniowe** jeżeli funkcja

$$F(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, \dots) \quad (10)$$

jest liniowa względem każdej ze zmiennych oraz współczynniki przy  $u$  i jej pochodnych są funkcjami tylko zmiennych niezależnych.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

- Równanie, które nie jest liniowe nazywamy **nieliniowym**.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (12)$$

- Równanie nazywamy **quasi-liniowym** jeżeli jest liniowe z uwagi na pochodną najwyższego rzędu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (13)$$

## 2 Elementy analizy wektorowej

Niech  $F = F(x, y, z)$  będzie funkcją klasy  $C^1$  zdefiniowaną w obszarze  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

- **Gradient** funkcji  $F$ :

$$\text{grad} F \equiv \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k} \quad (14)$$

- **Pochodna kierunkowa** funkcji  $F$  w kierunku wektora  $\vec{n}$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{n}} = \nabla F \cdot \vec{n} \quad (15)$$

- **Pole wektorowe**  $\vec{w}$  - funkcja o wartościach wektorowych:

$$\vec{w} = \vec{w}(x, y, z) = w_1(x, y, z) \vec{i} + w_2(x, y, z) \vec{j} + w_3(x, y, z) \vec{k} \quad (16)$$

- **Dywergencja** pola wektorowego. Niech  $\vec{w} = w(x, y, z)$  będzie klasy  $C^1$  w  $\Omega$

$$\text{div} \vec{w} = \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} \quad (17)$$

- **Laplasjan**. Jeżeli  $\vec{w} = \overrightarrow{\text{grad} F}$  to

$$\text{div} \vec{w} = \text{div} \overrightarrow{\text{grad} F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} F = \nabla^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = F_{xx} + F_{yy} + F_{zz} \quad (18)$$

$\nabla^2 F = \Delta F$  - laplasjan funkcji  $F$

## 2.1 Twierdzenie o dywergencji (Gaussa-Ostrogradskiego)

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{w} d\Omega = \iint_S \vec{w} \cdot \vec{n} dS, \quad S = \partial\Omega \quad (19)$$

gdzie:

- $\vec{w}$  pole wektorowe zdefiniowane w obszarze  $\Omega$ ,
- $\vec{n}$  normalna zewnętrzna do powierzchni  $S$ ,
- $S$  powierzchnia ograniczająca obszar  $\Omega$

## 2.2 Twierdzenie Greena

Tożsamość:

$$\vec{\nabla}(u \vec{\nabla} v) = \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + u \nabla^2 v \quad (20)$$

Podstawiając powyższą tożsamość do wzoru wynikającego z twierdzenia o dywergencji dostajemy wzory Greena:

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 v d\Omega = \int_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v d\Omega \quad (21)$$

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\Omega = \int_S \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (22)$$

## 2.3 Twierdzenie Stokesa

W klasycznym sformułowaniu dla obszaru  $\Sigma$  będącego powierzchnią trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej twierdzenie Stokesa można zapisać:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{d\Sigma} = \oint_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{dr} \quad (23)$$

gdzie:

- $\partial\Sigma$  - brzeg obszaru (obszar  $\Sigma$  spełnia określone warunki ciągłości)
- $\iint_{\Sigma}$  - całka powierzchniowa po obszarze  $\Sigma$
- $\oint_{\partial\Sigma}$  - całka krzywoliniowa po brzegu obszaru  $\Sigma$
- $\vec{d\Sigma} = \vec{n} \cdot d\Sigma$ ,
- $\vec{n}$  normalna zewnętrzna na  $\Sigma$ .

Taka forma tw. Stokesa ograniczona jest do  $\mathbb{R}^3$  ze względu na operator rotacji mający sens tylko w  $\mathbb{R}^3$ . Uogólnienie tw. Stokesa na inne wymiary wymaga wprowadzenia pojęć z rachunku form różniczkowych.

## 2.4 Rozwiązania PDE

Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych zależą od dowolnych stałych: jednej dla równania pierwszego rzędu, dwóch dla drugiego, itd.

Rozważmy równanie  $u_{xy} = 0$  – liniowe, jednorodne drugiego rzędu.

$$u_{xy} = 0, \quad \text{inny zapis} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (24)$$

Po dwukrotnym scałkowaniu, otrzymamy:

$$u(x, y) = F(x) + G(y), \quad (25)$$

gdzie  $F, G$  są dowolnymi, różniczkowalnymi funkcjami.

Rozwiązania równań cząstkowych zależą od dowolnych funkcji i by ograniczyć ilość rozwiązań należy nałożyć na równanie pewne warunki.

## 2.5 Warunki brzegowe

Zwykle istnieje nieskończona liczba funkcji spełniających dane równanie różniczkowe. W celu zapewnienia jednoznaczności zadania polegającego na rozwiązaniu równania różniczkowego nakłada się na rozwiązanie dodatkowe warunki, zwykle określone na brzegu obszaru, w którym poszukujemy rozwiązania.

Typy warunków brzegowych:

- Dirichleta:  $u = g$  na  $\partial\Omega_D$  gdzie  $g$  znana funkcja
- Neumanna:  $\frac{\partial u}{\partial n} = g$  na  $\partial\Omega_N$
- Robina:  $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g$  na  $\partial\Omega_R$  gdzie  $\alpha, \beta, g$  znane funkcje na  $\partial\Omega_R$

## 2.6 Warunki początkowe

Warunki, które musi spełniać rozwiązanie  $u$  w całym obszarze dla zmiennej  $t = T_0$  (zazwyczaj  $t \in (T_0, \infty)$ ). Warunki początkowe są wyrażane przez funkcję  $u$  oraz jej pochodne względem zmiennej  $t$  (zazwyczaj w zastosowaniach interpretowanej jako czas).

## 3 Najważniejsze równania fizyki matematycznej

- Równanie transportu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad u_t + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} = 0 \quad (26)$$

- Równania Laplace'a i Poissona:

$$\Delta u = 0, \quad \Delta u = f(x) \quad \text{gdzie} \quad \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (27)$$

- Równanie przewodnictwa cieplnego (dyfuzji):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad u_t - \Delta u = 0 \quad (28)$$

- Równanie falowe:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad u_{tt} - \Delta u = 0 \quad (29)$$

## 4 Klasyfikacja równań różniczkowych drugiego rzędu

Rozważmy równanie dwu zmiennych:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + ku = l \quad (30)$$

Zastępując  $u_{xx}$  przez  $\alpha^2$ ,  $u_{xy}$  przez  $\alpha\beta$  a  $u_{yy}$  przez  $\beta^2$ ,  $u_x - \alpha$ ,  $u_y$  przez  $\beta$  można utworzyć wielomian:

$$P(\alpha, \beta) = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + e\beta + f \quad (31)$$

Własności rozwiązań równania (30) zależą od własności algebraicznych wielomianu  $P(\alpha, \beta)$ . W szczególności typem równania rządzi wielkość  $b^2 - ac$

- $b^2 - ac < 0$  równanie eliptyczne
- $b^2 - ac = 0$  równanie paraboliczne
- $b^2 - ac > 0$  równanie hiperboliczne

Typ równania może się zmieniać w zależności od obszaru.

Przykłady:

1.

$$3u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + xu_y = 0 \quad (32)$$

jest to równanie eliptyczne bo  $b^2 - ac = -14 < 0$

2. równanie Tricomi (przepływu naddźwiękowego)

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0 \quad (33)$$

$y > 0$  eliptyczne,  $y = 0$  paraboliczne,  $y < 0$  hiperboliczne

## 4.1 Równania równowagi i ewolucyjne

- Równania eliptyczne ( w szczególności równanie Laplace'a) opisują obiekty fizyczne w stanie równowagi (niezależnie od czasu) lub w stanie ustalonym.
- Równania paraboliczne i hiperboliczne opisują obiekty fizyczne, które ewoluują w czasie. W przypadku takich równań początkowy stan obiektu (warunki początkowe) stanowi dodatkowy warunek konieczny by zadanie było dobrze postawione.

## 4.2 Zagadnienia dobrze postawione

Równanie różniczkowe wraz z warunkami brzegowymi i początkowymi definiują tzw problem początkowo-brzegowy.

Spośród wszystkich możliwych problemów początkowo-brzegowych wyróżnia się tzw problemy dobrze postawione, które charakteryzują się takimi cechami:

- istnienie rozwiązania
- jednoznaczność rozwiązania
- ciągła zależność rozwiązania od parametrów problemu (małe zmiany parametrów powodują małe zmiany rozwiązania)

Problemy nie spełniające tych warunków nazywamy źle postawionymi.

## 4.3 Dobrze i źle postawione zadania ewolucyjne na przykładzie problemu przewodzenia ciepła

Dobrze postawiony problem początkowy:

$$\begin{aligned}u_t &= k \nabla^2 u(\mathbf{x}, t) \quad \text{w} \quad \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\u(\mathbf{x}, 0) &= f(\mathbf{x}) \quad \text{w} \quad \mathbb{R}^n \\|u(\mathbf{x}, t)| &< M \quad \mathbb{R}^n, \quad t > 0\end{aligned}\tag{34}$$

Dobrze postawiony problem początkowo-brzegowy:

$$\begin{aligned}u_t &= k \nabla^2 u(\mathbf{x}, t) \quad \text{w} \quad \Omega, \quad t > 0 \\u(x, 0) &= f(x) \quad \text{w} \quad \Omega \\ \alpha(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t) + \beta(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) &= g(\mathbf{x}, t) \quad \text{na} \quad \partial\Omega \quad t > 0 \quad \alpha, \beta \geq 0\end{aligned}\tag{35}$$

Jeżeli  $\Omega$  nie jest ograniczony to funkcja  $g(\mathbf{x}, t)$  musi być dana na dostępnej części  $\partial\Omega$  i dodatkowe warunki muszą być postawione w nieskończoności.

Problem źle postawiony:

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T \\ u(x, T) &= f(x) \quad 0 < x < 1, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 \quad 0 < t < T \end{aligned} \tag{36}$$

W tym zadaniu mamy postawiony warunek na końcu przedziału czasu w punkcie  $t = T$ . Należy wyznaczyć ewolucję temperatury, która doprowadzi w chwili  $T$  do stanu opisanego funkcją  $f(x)$ . W ogólności dla dowolnej funkcji  $f$  rozwiązanie nie istnieje. Nawet jeżeli dla pewnej funkcji  $f$  rozwiązanie istnieje to nie zależy w sposób ciągły od parametrów zadania (czyli funkcji  $f$ ).

## 4.4 Znajdowanie rozwiązań

Jeżeli mamy sformułowane warunki początkowo-brzegowe dla równania, to możemy szukać rozwiązania. Nie potrafimy wyznaczyć dokładnego rozwiązania w większości przypadków, czyli nie możemy rozwiązać równania w klasycznym sensie. Możemy:

1. zajmować się PDE, dla których rozwiązanie da się wyznaczyć
2. użyć metod numerycznych i szukać rozwiązania przybliżonego

Pytania:

1. Jakie funkcje powinny być "rozwiązaniami"?
2. Czy należy żądać by rozwiązanie było analityczne w sensie rzeczywistym?
3. Czy rozwiązanie powinno być różniczkowalne nieskończenie wiele razy?
4. Czy wystarczy by rozwiązanie PDE  $k$ -tego rzędu było przynajmniej  $k$ -krotnie różniczkowalne w sposób ciągły?

## 5 Zadania

1. Dany jest obszar  $\Omega = [-2, 2] \times [-1, 1]$  oraz funkcja

$$g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x, y) = x^2 - y^2 \sin(x)$$

Dla równania Poissona zbuduj taki problem brzegowy, którego rozwiązaniem jest funkcja  $g(x, y)$ . Załóż warunki brzegowe Dirichleta na brzegach poziomych oraz warunki brzegowe Neumanna na brzegach pionowych.

2. Dany jest trójkątny obszar  $\Omega$  wyznaczony przez wierzchołki

$$A = (0, 0), \quad B = (2, 0), \quad C = (0, 1).$$

Dobierz funkcję wielomianową  $u(x, y)$ , oraz warunki brzegowe Dirichleta na brzegach pionowym  $AC$  i poziomym  $AB$ , tak by  $u(x, y)$  było rozwiązaniem równania Laplace'a z jednorodnymi warunkami brzegowymi typu Neumanna na brzegu ukośnym  $BC$ .

3. Dane jest równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0 \tag{37}$$

dla  $u = u(x, y)$ . Funkcję  $u$  wyznacza się przez funkcję  $w$  w następujący sposób

$$u(x, y) = xyw^2(x, y) \tag{38}$$

Na podstawie równania (37) sformułuj równanie na funkcję  $w$ .

4. Rozwiąż równanie  $u_{xx} = u_{yy}$  stosując podstawienie

$$\xi = \xi(x, y) = x + y, \quad \eta = \eta(x, y) = x - y$$

5. Niech  $\Omega$  będzie obszarem wyznaczonym przez wierzchołki  $A = [0, 0]$ ,  $B = [0, 1]$ ,  $C = [1, 0]$ . Dla równania Poissona z warunkami brzegowymi typu Dirichleta na brzegu  $AB$  i  $AC$  oraz warunkami Neumanna na brzegu  $BC$  sformułuj taki problem brzegowy by funkcja  $g(x, y) = x^2y$  była rozwiązaniem tego problemu.