

Elementy równań różniczkowych cząstkowych. Szeregi Fouriera

Magdalena Jakubek

marzec 2020

Plan wykładu

- Podstawowe pojęcia - przypomnienie
- Co to są szeregi Fouriera?
- Sposoby budowania rozwiązań mających postać szeregów
- Przykłady jednowymiarowe
- Równanie płyty
- Ilustracja metody szeregów Fouriera na przykładzie zginanej płyty.

1 Podstawowe pojęcia

Rozwiązania równania Laplace'a:

$$\nabla^2 f = \Delta f = 0, \quad f \in C^2 \quad (1)$$

nazywa się funkcjami harmonicznymi.

Dział matematyki zajmujący się badaniem funkcji harmonicznymi nazywa się teorią potencjału. Rezultaty tej teorii wykorzystuje się w rozwiązywaniu szczególnych typów równań fizyki matematycznej.

Rozwiązania wielu równań różniczkowych można uzyskać jedynie wówczas, gdy rozwiązania będziemy traktować w sensie uogólnionym, czyli jako dystrybucje.

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Symbol $H(x - x_0)$ oznacza funkcję Heaviside'a:

$$H(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < x_0, \\ 1 & \text{dla } x > x_0. \end{cases} \quad (2)$$

Właściwości delty Diraca:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) \delta(x - b) dx = \delta(a - b) \quad (4)$$

$$\delta(x) = \delta(-x), \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (5)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}[\delta(x - a) + \delta(x + a)] \quad (6)$$

$$\int_0^a \delta(x - x_0) dx = 1, \quad 0 < x_0 < a. \quad (7)$$

Definicje:

- iloczyn skalarny funkcji $f(x)$, $g(x)$ w przedziale (a, b) – oznaczany przez (f, g)

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

- funkcja całkowalna z kwadratem $f(x)$ w przedziale (a, b) – funkcja, dla której istnieje całka

$$\int_a^b f(x)^2 dx$$

przyjmująca wartość skończoną

$$0 \leq \int_a^b f(x)^2 dx < \infty$$

- norma z funkcji $\|f(x)\|$

$$\|f\| = \|f(x)\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$$

- normalizacja funkcji

$$\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$$

- układ funkcji ortogonalnych $\varphi_i(x)$ w przedziale (a, b) to zbiór funkcji

$$\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots\}$$

spełniających warunek

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = \delta_{ij} \int_a^b \varphi_i(x)^2 dx = \delta_{ij} \int_a^b \varphi_j(x)^2 dx$$

- układ funkcji ortonormalnych

$$\left\{ \frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1\|}, \frac{\varphi_2(x)}{\|\varphi_2\|}, \dots, \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|}, \dots \right\}$$

spełnia warunek

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = \delta_{ij}$$

2 Szeregi Fouriera

Szereg, którego elementami są funkcje nazywamy szeregiem funkcyjnym

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_i(x)$$

gdzie:

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_i(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N w_i(x)$$

o ile granica istnieje. Dla różnych wartości x dostaniemy inną wartość granicy.

Układem trygonometrycznym nazywamy zbiór funkcji:

$$\{\sin kx, \cos kx\}_{k \in N_0} = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\} \quad (8)$$

Układ trygonometryczny spełnia warunki ortogonalności

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx = 0, \quad k \in N \quad (9)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(mx) dx = 0, \quad k, m \in N \quad (10)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } k \neq m \\ \pi & \text{jeśli } k = m \end{cases} \quad (11)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } k \neq m \\ \pi & \text{jeśli } k = m \neq 0 \\ 2\pi & \text{jeśli } k = m = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Szereg Fouriera - szczególny przypadek szeregów funkcyjnych.

Dla funkcji okresowej o okresie 2π możemy zdefiniować szereg, który nazywamy szeregiem Fouriera funkcji f :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad k = 1, 2, \dots \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + \dots + a_k \cos(kx) + b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + \dots + b_k \sin(kx) \quad (14)$$

gdzie

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

2.1 Uogólnienie szeregów Fouriera

Szereg Fouriera - sposób przedstawienia funkcji w postaci nieskończonego szeregu sinusów i cosinusów. $f(x)$ jest całkowalną funkcją na przedziale $[-l, l]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (15)$$

gdzie a_n i b_n zależą od funkcji $f(x)$.

Aby wyznaczyć współczynniki a_n należy pomnożyć obie strony równania (15) przez $\cos \frac{k\pi x}{l}$ a następnie przecałkować po przedziale $[-\pi, \pi]$ (lub ogólnie $[-l, l]$). Aby wyznaczyć współczynniki b_n należy pomnożyć to równanie przez $\sin \frac{w\pi x}{l}$ i przecałkować w tych samych granicach. Niektóre z rozwijanych w szereg Fouriera funkcji mogą być w przedziale $[-l, l]$ parzyste a inne nieparzyste, dlatego szeregi Fouriera mogą mieć tylko wyrazy z sinusami bądź tylko z cosinusami.

Współczynniki Fouriera:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx \end{aligned} \quad (16)$$

jeżeli $f(x)$ jest nieparzystą funkcją x to $a_n = 0$, a jeżeli parzystą to $b_n = 0$. Współczynniki Fouriera są określone o ile powyższe całki są skończone (wystarczy założyć, że f jest całkowalna w $[-l, l]$).

2.2 Dla jakich funkcji szereg Fouriera jest zbieżny do niej samej?

Twierdzenie Dirichleta: Jeżeli $f(x)$ ograniczona na przedziale $[-l, l]$ jest:

- przedziałami monotoniczna na $(-l, l)$
- jest ciągła w $(-l, l)$ z wyjątkiem skończonej liczby punktów nieciągłości, ale w tych punktach musi być spełniony warunek

$$f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$$

•

$$f(-l) = f(l) = \frac{1}{2}(f(-l^+) + f(l^-))$$

$$\text{to } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (17)$$

dla każdego $x \in [-l, l]$.

Dodatkowo jeżeli $f(x)$ jest okresowa i jej okres wynosi $2l$ to (17) obowiązuje dla wszystkich x z dziedziny funkcji $f(x)$.

3 Równanie ugięcia belki

Stan belki jest opisywany następującymi funkcjami:

1. $y(x)$ - ugięcie
2. $M(x)$ - moment zginający
3. $T(x)$ - siła poprzeczna

Wielkości te są związane następującymi równaniami różniczkowymi:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q(x)}{EJ} \quad (18)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{T(x)}{EJ} \quad (19)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ} \quad (20)$$

Dla jednoznacznego opisu zachowania belki jedno z powyższych równań musi być skojarzone z odpowiednimi warunkami brzegowymi. Jeżeli jako podstawowe równanie wybierzemy 18 to należy do niego dołożyć cztery warunki brzegowe. Dla belki swobodnie podpartej te warunki brzegowe przyjmują postać (zerowanie się ugięcia i momentu gnącego w podporach):

$$\begin{cases} y(0) = y(L) = 0 \\ \frac{d^2 y}{dx^2}(0) = \frac{d^2 y}{dx^2}(L) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Problem brzegowy dla belki może być rozwiązany za pomocą metody szeregów Fouriera. Główna idea polega na przedstawieniu rozwiązania w postaci szeregu trygonometrycznego, którego każdy element spełnia nałożone na rozwiązanie warunki brzegowe. Przy pomocy analogicznego szeregu trygonometrycznego przedstawia się funkcje obciążenia $q(x)$, ewentualnie własności materiałowe lub parametry geometryczne. Podstawiając przyjęte reprezentacje funkcji występujących w równaniu różniczkowym i korzystając z liniowej niezależności elementów szeregu, wyznacza się współczynniki rozwinięcia poszukiwanej funkcji $y(x)$.

Dla belki swobodnie podpartej funkcję $y(x)$ przedstawia się w postaci szeregu sinusowego:

$$y(x) = \sum_{k=1}^n y_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (22)$$

Współczynniki q_k rozwinięcia funkcji obciążenia $q(x)$ w szereg sinusowy wyznacza się ze wzorów:

$$q(x) = \sum_{k=1}^n q_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad q_k = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \quad (23)$$

Podstawienie tych rozwinięć do wzoru 18 daje równanie:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^4 \pi^4}{L^4} y_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = \frac{1}{EJ} \sum_{k=1}^n q_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (24)$$

Dla uproszczenia wprowadzamy oznaczenia:

$$\alpha_k = \frac{k^4 \pi^4}{L^4}, \quad \Delta_k = \alpha_k EJ, \quad y_k = \frac{q_k}{\Delta_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

Ostatecznie uzyskuje się wzory na:

Ugięcie:

$$y(x) = \sum_{k=1}^n y_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (26)$$

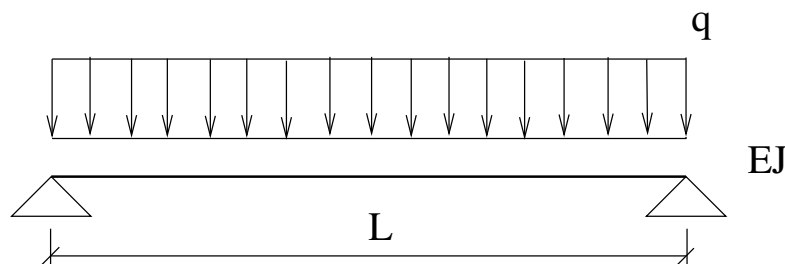
Moment:

$$M(x) = EJ \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{k=1}^n k^2 y_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (27)$$

Siłę poprzeczną:

$$T(x) = -EJ \frac{\pi^3}{L^3} \sum_{k=1}^n k^3 y_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (28)$$

3.1 Szczególne przypadki obciążeń



Obciążenie ciągłe na całej długości belki

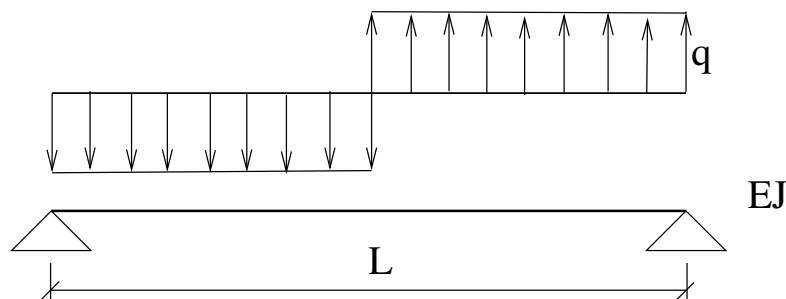
$$q(x) = \sum_{k=1}^n q_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (29)$$

$$q_k = \frac{2q_0}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = -\frac{2q_0}{L} \frac{L}{k\pi} \left[\cos \frac{k\pi x}{L} \right]_0^L = -\frac{2q_0}{k\pi} \left(\cos k\pi - \cos 0 \right) = \begin{cases} \frac{4q_0}{k\pi}, & \text{nieparzyste } k \\ 0, & \text{parzyste } k \end{cases}$$

Obciążenie antysymetryczne

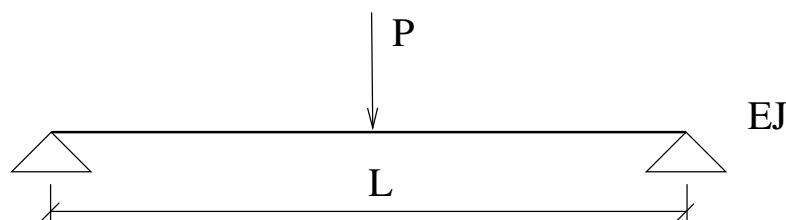
Belka z obciążeniem ciągłym na jednej połowie długości, i z obciążeniem o przeciwnym znaku i takiej samej wartości na drugiej połowie.

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q_0}{EJ} \begin{cases} 1, & x < L/2 \\ -1, & x > L/2 \end{cases}$$



$$q_k = \frac{4q_0}{L} \int_0^{L/2} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx - \frac{4q_0}{L} \int_{L/2}^L \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = -\frac{4q_0}{L} \frac{L}{k\pi} \left[\cos \frac{k\pi x}{L} \right]_0^{L/2} + \frac{4q_0}{L} \frac{L}{k\pi} \left[\cos \frac{k\pi x}{L} \right]_{L/2}^L =$$

$$-\frac{4q_0}{k\pi} \left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1 \right) + \frac{4q_0}{k\pi} \left((k\pi) - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) = \frac{4q_0}{k\pi} \left(\cos(k\pi) - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + 1 \right)$$



Obciążenie siłą skupioną

Siła skupiona musi być modelowana za pomocą funkcji uogólnionych (dystrybucji) w szczególności delty Diraca.

$$\frac{d^4}{dx^4} = \frac{P}{EJ} \delta\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

$$q(x) = \sum_{k=1}^n q_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

$$q_k = \frac{2P}{L} \int_0^L \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \frac{2P}{L} \sin\left(\frac{k\pi L/2}{L}\right) = \frac{2P}{L} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

4 Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty

$$D\nabla^2\nabla^2w = q - (1 + \nu)\frac{D\alpha_t}{h}\nabla^2\Delta T \quad (30)$$

operator Laplace'a i bilaplasjan we współrzędnych kartezjańskich

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (31)$$

$$\nabla^2\nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (32)$$

Sztywność płytowa

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (33)$$

Macierz sztywności płytowej

$$\mathbf{D} = D\mathbf{n} \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Macierze operatorowe

$$\mathbf{d}_1^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{d}_2^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Macierz krzywizn k :

$$k = -\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2w = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Wektor momentów

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \left(k - \alpha_t \frac{\Delta T}{h} \right) = -\mathbf{D} \left(\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2w + \alpha_t \frac{\Delta T}{h} \right) = -D \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (1 + \nu) \frac{\alpha_t \Delta T}{h} \\ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (1 + \nu) \frac{\alpha_t \Delta T}{h} \\ (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Wektor sił poprzecznych

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{d}_1^T \left[\mathbf{D} \left(\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2w + \alpha_t \frac{\Delta T}{h} \right) \right] + \mathbf{m} = -D \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 w + (1 + \nu) \frac{\alpha_t \Delta T}{h} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla^2 w + (1 + \nu) \frac{\alpha_t \Delta T}{h} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix} \quad (39)$$

Równanie różniczkowe cząstkowe czwartego rzędu (30), można zastąpić układem dwóch równań drugiego rzędu. Sumujemy momenty M_x i M_y

$$M = M_x + M_y = -D(1 + \nu) \left(\nabla^2 w + 2 \frac{\alpha_t \Delta T}{h} \right) \quad (40)$$

Z (40) wynika równanie różniczkowe Poissona

$$\nabla^2 w = -\frac{M}{D(1 + \nu)} - 2 \frac{\alpha_t \Delta T}{h} \quad (41)$$

Podstawiając (41) do (30) otrzymujemy drugie równanie różniczkowe Poissona.

$$\nabla^2 M = -(1 + \nu)q - (1 - \nu^2) \frac{D\alpha_t}{h} \nabla^2 \Delta T \quad (42)$$

5 Zastosowanie szeregów trygonometrycznych do obliczania płyt prostokątnych

Jedną z najstarszych metod rozwiązywania zagadnienia zginania płyt polega na przyjęciu podwójnych lub pojedynczych szeregów Fouriera. Metoda ta może być wykorzystana do analizy płyt prostokątnych o specjalnych warunkach brzegowych.

Zamknięte rozwiązania w teorii płyt można otrzymać tylko dla płyt o określonych kształtach, obciążonych w szczególny sposób. W innych przypadkach powierzchnię ugięcia płyty można wyrazić w postaci nieskończonych szeregów funkcyjnych. W podobny sposób można wyrazić uogólnione siły wewnętrzne towarzyszące ugięciu.

Trzy sposoby budowania rozwiązań mających postać szeregów:

- funkcję wyrażającą powierzchnię ugięcia płyty przedstawia się za pomocą szeregu funkcji, z których każda spełnia wszystkie warunki brzegowe, ale żadna nie spełnia równania różniczkowego.
Współczynniki szeregu – suma szeregu spełnia równanie różniczkowe zginanej płyty.
- rozwiązanie buduje się z funkcji, które spełniają równanie różniczkowe zagadnienia ale żadna nie spełnia warunków brzegowych (przynajmniej niektórych).
Współczynniki szeregu – suma szeregu spełnia potrzebne warunki brzegowe.
- żaden z wyrazów szeregu nie spełnia równania różniczkowego i warunków brzegowych.
Współczynniki szeregu wyznacza się z warunku, że suma szeregu spełnia równanie różniczkowe i dane warunki brzegowe.

Ugięcie płyty wyrażone nieskończonym szeregiem funkcji tworzących układ zupełny można uważać za "rozwiązanie ścisłe", jeżeli szereg nieskończony spełnia równanie różniczkowe i warunki brzegowe.

Szeregi Fouriera, z których będziemy korzystać, składać się będą z funkcji spełniających warunki brzegowe ale nie spełniających równania różniczkowego.

Rozważmy płytę prostokątną, swobodnie podpartą o wymiarach $a \times b$, z dowolnie rozłożonym obciążeniem $q(x, y)$.

Obciążenie płyty można przyjąć w postaci podwójnego szeregu sinusowego:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \quad (43)$$

gdzie:

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 1, 2, 3 \dots \quad (44)$$

Charakterystyczną cechą szeregu (43) jest to, że wszystkie jego parzyste pochodne będą też szeregami sinusowymi

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = - \sum_m \sum_n \alpha_m^2 q_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \quad (45)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = - \sum_m \sum_n \beta_n^2 q_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (46)$$

$$\nabla^2 q = - \sum_m \sum_n (\alpha_m^2 + \beta_n^2) q_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (47)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 q = \sum_m \sum_n (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 q_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (48)$$

Współczynniki rozwinięcia q_{mn} obliczamy, tak jak w analizie harmoniczej. Mnożymy obustronnie równość (43) przez $\sin(\alpha_k x)$ i całkujemy względem zmiennej x w przedziale $[0, a]$, a następnie wynik mnożymy przez $\sin(\beta_l y)$ i ponownie całkujemy w przedziale $[0, b]$ względem zmiennej y .

Ze względu na ortogonalność funkcji trygonometrycznych:

$$\int_0^a \sin(\alpha_k x) \sin(\alpha_m x) dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \neq m, \\ \frac{a}{2} & \text{dla } k = m. \end{cases} \quad (49)$$

$$\int_0^b \sin(\beta_l y) \sin(\beta_n y) dy = \begin{cases} 0 & \text{dla } l \neq n, \\ \frac{b}{2} & \text{dla } l = n, \end{cases} \quad (50)$$

po wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x, y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) dx dy \quad (51)$$

Można obliczyć q_{mn} dla różnych typów obciążenia $q(m, n)$.

Założmy, że funkcja wyrażająca powierzchnię ugięcia rozpatrywanej płyty ma postać szeregu podwójnego

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y). \quad (52)$$

Każda z funkcji składowych szeregu (52) na wszystkich krawędziach płyty spełnia warunki swobodnego podparcia: jeżeli swobodnie podparty brzeg płyty jest prostoliniowy, a $\Delta T = 0$ to warunki brzegowe:

$$w(s) = 0, \quad \nabla^2 w(s) = 0. \quad (53)$$

Podstawiając rozwinięte w szereg Fouriera $q(x, y)$, $w(x, y)$, $\Delta T(x, y)$ do równania:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q - (1 + \nu) \frac{D \alpha_t}{h} \nabla^2 \Delta T. \quad (54)$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} D \sum_m \sum_n (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 w_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) &= \sum_m \sum_n q_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) + \\ &+ (1 + \nu) \frac{D \alpha_t}{h} \sum_m \sum_n (\alpha_m^2 + \beta_n^2) \Delta T_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \end{aligned} \quad (55)$$

Aby równość (55) była spełniona dla każdej wartości współrzędnych x i y , między nieznanymi współczynnikami rozwinięcia funkcji wyrażającej powierzchnię ugięcia w_{mn} a znanymi współczynnikami q_{mn} i ΔT_{mn} rozwinięcia w szeregi Fouriera obciążenia i przyrostu temperatury zachodzi związek

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{\Delta_{mn}} + (1 + \nu) \frac{\alpha_t}{h} \frac{\Delta T_{mn}}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \quad (56)$$

w którym

$$\Delta_{mn} = D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 \quad (57)$$

Jeżeli znamy powierzchnię ugięcia, to ze wzorów (38,39) możemy obliczyć uogólnione siły wewnętrzne w płycie:

$$M_x = D \sum_m \sum_n \left[(\alpha_m^2 + \nu \beta_n^2) w_{mn} - (1 + \nu) \frac{\alpha_t}{h} \Delta T_{mn} \right] \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (58)$$

$$M_y = D \sum_m \sum_n \left[(\nu \alpha_m^2 + \beta_n^2) w_{mn} - (1 + \nu) \frac{\alpha_t}{h} \Delta T_{mn} \right] \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (59)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \sum_m \sum_n \alpha_m \beta_n w_{mn} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \quad (60)$$

$$Q_x = D \sum_m \sum_n \left[(\alpha_m^2 + \beta_n^2) w_{mn} - (1 + \nu) \frac{\alpha_t}{h} \Delta T_{mn} \right] \alpha_m \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (61)$$

$$Q_y = D \sum_m \sum_n \left[(\alpha_m^2 + \beta_n^2) w_{mn} - (1 + \nu) \frac{\alpha_t}{h} \Delta T_{mn} \right] \beta_n \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \quad (62)$$

Siły narożnikowe:

$$\begin{aligned}
R(0, 0) &= 2D(1 - \nu) \sum_m \sum_n \alpha_m \beta_n w_{mn}, \\
R(a, 0) &= 2D(1 - \nu) \sum_m \sum_n (-1)^m \alpha_m \beta_n w_{mn}, \\
R(0, b) &= 2D(1 - \nu) \sum_m \sum_n (-1)^n \alpha_m \beta_n w_{mn}, \\
R(a, b) &= 2D(1 - \nu) \sum_m \sum_n (-1)^{m+n} \alpha_m \beta_n w_{mn}
\end{aligned} \tag{63}$$

Przykład 1.

Szukamy parametru q_{mn} dla płyty obciążonej siłą P

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) dy dx \tag{64}$$

Podstawiamy: siłę skupioną wyrażoną jako funkcję poprzez deltę Diraca.

$$q(x, y) = P \cdot \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \\
&= \int_{-\infty}^a 0 \cdot \delta(x - x_0) dx + \int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx + \int_b^{+\infty} 0 \cdot \delta(x - x_0) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \delta(x - x_0) dx = g(x_0) = f(x_0)
\end{aligned} \tag{66}$$

gdzie

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin (a, b) \\ f(x) & \text{dla } x \in (a, b) \end{cases} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
q_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P \cdot \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) dy dx = \\
&= \frac{4}{ab} P \int_0^a \delta(x - x_0) \sin(\alpha_m x) dx \int_0^b \delta(y - y_0) \sin(\beta_n y) dy = \\
&= \frac{4}{ab} P \sin(\alpha_m x_0) \cdot \sin(\beta_n y_0)
\end{aligned} \tag{68}$$

Przykład 2. Obciążenie na całej płycie $q(x, y) = q_0$

$$\begin{aligned}
 q_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0 \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) dy dx = \\
 &= \frac{4}{ab} \left[\int_0^a q_0 \sin(\alpha_m x) \left(\int_0^b \sin(\beta_n y) dy \right) \right] dx \\
 &= \frac{4}{ab} q_0 \int_0^b \sin(\beta_n y) dy \cdot \int_0^a \sin(\alpha_m x) dx \\
 &= \frac{4q_0}{ab} \left(-\frac{1}{\beta_n} \cos(\beta_n y) \Big|_0^b \right) \cdot \left(-\frac{1}{\alpha_m} \cos(\alpha_m x) \Big|_0^a \right) \\
 &= \frac{4q_0}{ab} \left(-\frac{1}{\beta_n} \cos(\beta_n b) + \frac{1}{\beta_n} \right) \cdot \left(-\frac{1}{\alpha_m} \cos(\alpha_m a) + \frac{1}{\alpha_m} \right)
 \end{aligned} \tag{69}$$

a skoro:

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
 q_{mn} &= \frac{4q_0}{ab} \left(-\frac{b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{b}b\right) + \frac{b}{n\pi} \right) \cdot \left(-\frac{a}{m\pi} \cos\left(\frac{m\pi}{a}a\right) + \frac{a}{m\pi} \right) \\
 &= \frac{4q_0}{ab} \left(-\frac{b}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{b}{n\pi} \right) \cdot \left(-\frac{a}{m\pi} \left(\cos(m\pi) + \frac{a}{m\pi} \right) \right) \\
 &= \frac{4q_0}{ab} \frac{b}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \frac{a}{m\pi} (1 - \cos(m\pi)) \\
 &= \frac{4q_0}{mn\pi^2} (1 - \cos(n\pi)) (1 - \cos(m\pi))
 \end{aligned} \tag{71}$$

czyli

$$q_{mn} = \begin{cases} 0 & m \text{ lub } n \text{ parzyste} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & m \text{ i } n \text{ nieparzyste} \end{cases} \tag{72}$$

Literatura

1. *Matematyka dla inżynierów* Tadeusz Trajdos-Wróbel
2. *Płyty. Obliczenia statyczne* Zbigniew Kączkowski
3. *Fourier Analysis* Murray Spiegel