

# Przykładowe zadania z Matematyki II

2018-04-05

1. W przedziale  $[0, 1]$  dokonano aproksymacji ciągłej funkcji  $y = e^x$  za pomocą czterech pierwszych jednomianów. Obliczyć wyraz  $B_2$  wektora prawej strony układu równań algebraicznych, wynikającego z zastosowania MNK.
2. W przedziale  $[-1, 1]$  dokonano aproksymacji ciągłej funkcji  $y = e^x$  za pomocą czterech pierwszych wielomianów Czebyszewa. Obliczyć współczynnik aproksymacji  $a_1$  wynikający z zastosowania MNK.
3. Dla danych  $X = [-2 \ 0 \ 1 \ 3]$ ,  $Y = [0 \ 3 \ 4 \ 1]$  zbudować postać spline'u kwadratowego na drugim odcinku. Przyjąć  $\alpha = -1$ .
4. Znaleźć cztery węzły interpolacji w przedziale  $[-3, 4]$  korzystając z odpowiedniego wielomianu Czebyszewa.
5. Dobrać parametr  $a$  w taki sposób, by funkcje bazowe  $\varphi_1(x) = x$  oraz  $\varphi_2(x) = x^2 - a$  były ortogonalne w przedziale  $[-2, 1]$ .
6. Sprawdzić czy funkcje bazowe  $\varphi_1(x) = -x$  oraz  $\varphi_2(x) = x^2 - 4$  są ortonormalne w przedziale  $[0, 2\sqrt{2}]$ .
7. Znaleźć najlepszą ważoną aproksymację za pomocą MNK dla zbioru danych  $X = [-9 \ -4 \ 0 \ 1]$ ,  $Y = [-4 \ 5 \ 0 \ 1]$  i zbioru funkcji bazowych  $[1 \ \sqrt{|x|}]$ . Przyjąć funkcję wagową  $\omega(x) = |x|$ .
8. Wyprowadź schemat jawny prosty dla równania  $u_{xx} - u_{tt} - 2u_t = 4$ . Określ typ tego równania.
9. Dla jakich wartości  $x$  równanie  $u_{xx} + xu_{xt} - (x - 1)u_{tt} + xu_t = \sin(x)$  jest typu eliptycznego?
10. Obliczyć wartości rozwiązania na pierwszym nieznanym poziomie czasowym dla równania  $u_{tt} = u_t$  w przedziale  $x \in [-1 \ 4]$  oraz  $t \geq 0$ . Warunki początkowo-brzegowe przyjąć na podstawie funkcji  $u(x, t) = (x + 1)(x - 4) + t$ . Przyjąć  $h = 1$ ,  $\Delta t = 0.1$  oraz schemat jawny prosty.

11. Znaleźć rozkład temperatury po czasie  $t = 0.2s$  stosując dwa kroki czasowe oraz schematy jawny i niejawny. Przyjąć równanie nieustalonego przepływu ciepła w postaci  $u_{xx} = u_t - x$  oraz warunki brzegowe  $u(-1, t) = 0$ ,  $u(2, t) = 3$ , warunek początkowy  $u(x, 0) = x + 1$  i krok przestrzenny  $h = 1$ . Sprawdzić warunek stabilności schematu jawnego.
12. Znaleźć postać drgań belki swobodnie podpartej po czasie  $t = 0.3s$  stosując trzy kroki czasowe oraz schemat jawny. Przyjąć równanie drgań w postaci  $u_{xx} = u_{tt} + t$  oraz warunki brzegowe  $u(0, t) = 0$ ,  $u(1, t) = 0$ , warunki początkowe  $u(x, 0) = x(1 - x)$ ,  $u_t(x, 0) = \sin(\pi x)$  i krok przestrzenny  $h = 0.25$ . Sprawdzić warunek stabilności schematu jawnego.
13. Dany jest trójkątny obszar  $\Omega$  wyznaczony przez wierzchołki  $A = (0, 0)$ ,  $B = (2, 0)$ ,  $C = (0, 1)$ .  
Dobierz funkcję wielomianową  $u(x, y)$ , oraz warunki brzegowe Dirichleta na brzegach pionowym AC i poziomym AB, tak by  $u(x, y)$  było rozwiązaniem równania Laplace'a z jednorodnymi warunkami brzegowymi typu Neumanna na brzegu ukośnym BC.
14. Niech  $\Omega$  będzie obszarem wyznaczonym przez wierzchołki  $A = [0, 0]$ ,  $B = [0, 1]$ ,  $C = [1, 0]$ . Dla równania Poissona z warunkami brzegowymi typu Dirichleta na brzegu  $AB$  i  $AC$  oraz warunkami Neumanna na brzegu  $BC$  sformułuj taki problem brzegowy by funkcja  $g(x, y) = x^2 y$  była rozwiązaniem tego problemu.
15. Sprawdź czy funkcje  $f(x) = x^2 \sin(x)$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  są ortogonalne w  $\Omega = [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ .