



### ZASTOSOWANIE ŚRODOWISKA MATLAB DO ZAGADNIEŃ BRZEGOWYCH Partial Differential Equation Toolbox (PDETOOL)

# 1. PDETOOL

Narzędzie pozwala na przybliżone rozwiązywanie zagadnień początkowo-brzegowych, brzegowych i własnych dla problemów dwuwymiarowych metodą elementów skończonych.

PRZYKŁADOWE ZADANIA:

- I. STATYKA DLA PŁASKIEGO STANU ODKSZTAŁCENIA
- II. ANALIZA MODALNA (DRGANIA WŁASNE)

## Etapy modelowania:

1. Po uruchomieniu Matlaba w oknie komend (COMMAND WINDOW) wpisujemy polecenie *pdetool* (otworzy się GUI).



2. Na początku wybieramy rodzaj zadania (płaski stan odkształcenia) *Structural Mechanics, Plane Strain* albo z rozwinięcia paska, w którym w momencie uruchomienia wyświetlone jest *Generic Scalar* albo z menu głównego: *Options*  $\rightarrow$  *Application*  $\rightarrow$  *Structural Mechanics, Plane Strain*.

PDE Modeler - [Untitled]		- ×
File Edit Options Draw Boundary PDE Mesh Solve Plot		
$\Box \pm \bigcirc \oplus \gg \partial \Omega \text{ pde } \bigtriangleup = 4 \mathbb{Q}$	Generic Scalar	X: 0.4229 Y: -0.6759
Set formula:	Generic Scalar	
	Generic System	
L	Structural Mech., Plane Stress	
	Structural Mech., Plane Strain	
	Electrostatics	
	Magnetostatics	
	AC Power Electromagnetics	
1 1	Conductive Media DC	
	Heat Transfer	
0.8 -	Diffusion	-
ne -		

- 3. Przyjmujemy parametry zadania (w pasku narzędzi ikona PDE lub z menu *PDE* → *PDE Specification*)
  - I. problem eliptyczny (*Elliptic*)
  - II. analiza modalna (*Eigenmodes*)

gdzie: E – moduł Younga, nu – współczynnik Poissona, Kx, Ky – składowe sił objętościowych, rho – gęstość materiału.

PDE Modeler - [Untitled] - x					
File Edit Options Draw Boundary PDE Mesh Solve Plot					
	$\oplus$ $\supset$ $\partial\Omega$ pde $\triangle$		Structural Mech.,	Plane Strain    X: 1  Y: 0.01581	
Set formula:					
PDE Specification - ×					
Equation: Structural mechanics, plane strain					
	Turne of PDE:	Coofficient	Value	Description	
	Type of FDE.	Coefficient	value	Description	
	Elliptic	E	200e9	Young's modulus	
	OParabolic	nu	0.3	Poisson ratio	
0.	OHyperbolic	Kx	0.0	Volume force, x-direction	
	OEigenmodes	Ку	0.0	Volume force, y-direction	
0.		rho	7860	Density -	
0.	ſ	ОК		Cancel	
	L				
0:	2 -			4	

4. Generowanie obszaru

Na początek można ustawić zakres wyświetlanego układu współrzędnych *Options*  $\rightarrow$  *Axes Limits* oraz włączyć pomocniczą siatkę *Options*  $\rightarrow$  *Grid*. Aby wygenerować model można wykorzystać z paska narzędzi gotowe ikony do zdefiniowania obszaru albo z menu głównego wybrać *Draw* i odpowiednie polecenie. Stworzone obszary automatycznie zostają nazwane.

Po narysowaniu można skorygować obszar i nazwę poprzez dwukrotne kliknięcie we wnętrze obiektu. Jeżeli narysujemy kilka obszarów to możemy dokonywać na nich różnych operacji w linii *Set formula* (domyślnie dwa narysowane obszary są sumowane np. R1+P1, ale można je również odjąć R1-P1 (przy większej liczbie obszarów obszar P1 musi znajdować się *wewnątrz* obszaru, a którego jest odejmowany) albo znaleźć część wspólną R1\*P1). Zmiany są widoczne dopiero w dalszym etapie modelowania. Aby usunąć obszar klikamy na niego raz (podświetli się brzeg na kolor czarny) i na klawiaturze wybieramy Delete.

Po narysowaniu obszaru można wykorzystać *Options*  $\rightarrow$  *Axes equal* aby skala na osiach była taka sama.

Przykładowo: modyfikacja na prostokącie R1 przez podwójne kliknięcie obszaru E1 w celu narysowaniu koła o środku w p.(2,1.5) i promieniu 0.7.



Chcemy mieć otwór, dlatego koło zostanie odjęte od prostokąta (R1-E1).



5. Warunki brzegowe – Boundary  $\rightarrow$  Boundary Mode lub ikona  $\partial \Omega$ 

Warunki Dirichleta (brzeg modelu oznaczony kolorem czerwonym), Neumanna (kolor niebieski) lub mieszane (kolor czarny). Domyślnie przyjęte są na każdym brzegu zerowe warunki Dirichleta. Aby je zmienić możemy skorzystać z odpowiedniej ikonki w pasku narzędzi albo wybrać w menu głównym Boundary → Specify Boundary Conditions. Na początku należy zaznaczyć część brzegu, dla którego chcemy dokonać zmian, a następnie albo kliknąć w niego dwukrotnie, albo wybrać w menu głównym Boundary i odpowiednią opcję. Można dokonać selekcji kilku części brzegu równocześnie poprzez wciśnięcie przy wyborach klawisza SHIFT. Przy zadawaniu warunków brzegowych należy zwrócić uwagę na równanie, które chcemy spełnić.

Przykład: załóżmy, że na lewej krawędzi jest zerowy warunek Dirichleta, na górnej krawędzi obciążenie skierowane pionowo dół o wartości 1000kN/m (brzeg z warunkiem Neumanna), na pozostałej części zerowy warunek Neumanna (czyli brzeg swobodny, nieobciążony i niepodparty).



## 6. Siatka ES

Możemy skorzystać z dwóch ikonek w pasku narzędzi równomiernie zagęszczona albo w menu głównym wybrać  $Mesh \rightarrow Initialize Mesh$  (*Refine Mesh*).



#### 7. Rozwiązanie zadania

Wybieramy odpowiednią ikonkę w pasku narzędzi lub w menu *Solve*  $\rightarrow$  *Solve PDE*. Na ekranie wyświetlą się rezultaty w postaci map warstwicowych



II. dla zadania poszukiwania postaci drgań własnych pamiętamy o przełączeniu się na problem Eigenmodes (punkt 3 instrukcji); wówczas można zmienić zakres poszukiwań wartości własnych w menu głównym Solve → Parameters.

### 8. Postprocessing



Wybieramy odpowiednią ikonkę w pasku narzędzi lub w menu głównym *Plot*  $\rightarrow$  *Parameters* w celu wyboru wyświetlenia odpowiednich map rozwiązania, konturu, postaci deformacji, siatki MES. Warto w Colormap zmienić kolory wyświetlania na jet, gdyż są bardziej czytelne



#### II. dla analizy modalnej pojawia się dodatkowa opcja wyświetlania postaci drgań własnych dla wybranego wcześniej zakresu wartości własnych poprzez wybór Eigenvalues.

UWAGA: dla naszego przykładu należy zwiększyć zakres poszukiwanych wartości własnych np. na [0, 1e7] (Solve  $\rightarrow$  Parameters).



Każde wprowadzane dane i wyniki poszczególnych etapów modelowania można eksportować do przestrzeni roboczej Matlaba w postaci macierzy. W szczególności opcja  $Mesh \rightarrow Export$  pozwala zapisać informacje o dyskretyzacji (p – współrzędne węzłów, e – krawędzie, t – elementy trójkątne),  $PDE \rightarrow Export$  zapisuje parametry rozwiązywanego równania,  $Solve \rightarrow Export$  zapisuje wyniki obliczeń

I. po wyeksportowaniu odpowiednich danych (dyskretyzacja + parametry zadania) i wyników (przemieszczenia) możliwe jest obliczenie składowych tensora naprężenia, odkształcenia, naprężenia zastępczego Misesa poprzez użycie procedury *pdesmech* przykłady: mises=pdesmech(p,t,c,u,'tensor','von Mises','application','pn','nu',0.3) sx=pdesmech(p,t,c,u,'tensor','sxx')

Mając wyeksportowany wektor rozwiązań *u* można rozdzielić współrzędne do wektorów związanych z danym kierunkiem:

m=length(u) ux=u(1:m/2) uy=u(m/2+1:m)

Plik analizy zapisywany jest w postaci M-file. Można na początku analizy zapisać taki plik i w edytorze Matlaba śledzić jakie zmiany są wprowadzane do pliku z każdego etapu modelowania. Po wczytaniu pliku (można go edytować) otwierane jest automatycznie GUI pdetool i pokazany jest zapisany etap modelowania.

# 2. Zastosowanie procedur CALFEM

Należy dokonać edycji załączonego pliku *zad2.m.* Poszczególne etapy:

- 1. Przyjęcie stałych materiałowych (o tych samych wartościach jak założone wcześniej w p. 3)
- 2. Po uruchomieniu pliku zad2.m otrzymujemy rysunki z zaznaczonymi numerami elementów i węzłów:



Numeracja węzłów:



3. Na podstawie odczytanych numerów węzłów modyfikujemy plik *zad2.m* definiując warunki brzegowe statyczne i kinematyczne. Jeśli np. w rozważanym przykładzie utwierdzony jest lewy brzeg, a obciążona siła równomiernie rozłożona skierowana w dół jest górna krawędź, to należy zdefiniować:

kinematyczne warunki brzegowe, podając w pierwszej kolumnie numery stopni swobody, które są zablokowane (np. węzeł nr 40 ma numery stopni swobody 79 w poziomie i 80 w pionie, węzeł 39 ma stopnie swobody 77 i 78 itd.):

oraz wartość siły na pionowych kierunkach w węzłach wewnętrznych krawędzi, związane z parzystymi stopniami swobody 50 - 56,

f([50:2:56], 1) = - wartość obciążania stałego \* długość obciążonej krawędzi elementu a w węzłach skrajnych

f([8, 6], 1) = - wartość obciążenia stałego \* długość obciążonej krawędzi elementu \* 0.5 Długość elementu można policzyć na podstawie długości krawędzi i liczby elementów (gdy równy podział na brzegu) lub precyzyjnej korzystając z wyeksportowanej z PDETOOL tablicy *p*.

- 4. Naprężenia zredukowane  $\sigma_{red}$ , czyli Misesa, obliczamy ze wzoru podanego wcześniej w instrukcji (mises=pdesmech...)
- 5. ||u||∞ obliczamy wg podanego w temacie zadania wzoru na podstawie wyeksportowanego rozwiązania z menu solve (PDETOOL eksportuje jedynie przemieszczenia u). Pamiętajmy, że wyeksportowany z PDETOOL wektor u zawiera najpierw kolejno wszystkie składowe x-owe, a potem składowe y-owe, natomiast przygotowany program z wykorzystaniem CALFEM wylicza przemieszczenia w układzie przemiennym [u<sub>x1</sub>, u<sub>y1</sub>, u<sub>x2</sub>, u<sub>y2</sub>, ...]. Aby obliczyć wyrażenie pod pierwiastkiem we wzorze na ||u||∞, należy odpowiednio przygotować dane. Warto pamiętać o funkcji Matlaba *max* i *min*.
- 6. W celu obliczenia naprężeń Misesa Smises w CALFEM należy wykonać pętle po elementach, w której funkcją plants obliczymy naprężenia

Sig=plants(Ex(iel,:),Ey(iel,:),[2 1],D,Ed(iel,:))

co pozwoli na wyznaczenie

Smises(iel) =  $(sqrt(1/2*((Sig(1)-Sig(3))^2 +...)))$ 

z których należy wybrać wartość maksymalną.

 Podanie częstości drgań własnych nie powinno sprawiać problemu, odczytuje się je bezpośrednio w programie. Proszę przypomnieć sobie definicję częstości kołowej ω [rad/s], jej związek z wartością własną La podawaną przez funkcję Eigen,

$$\omega = \sqrt{La}$$

oraz definicję częstotliwości f [Hz], i związek częstotliwości f z częstością ω:

 $f = \frac{\omega}{2*\pi}$