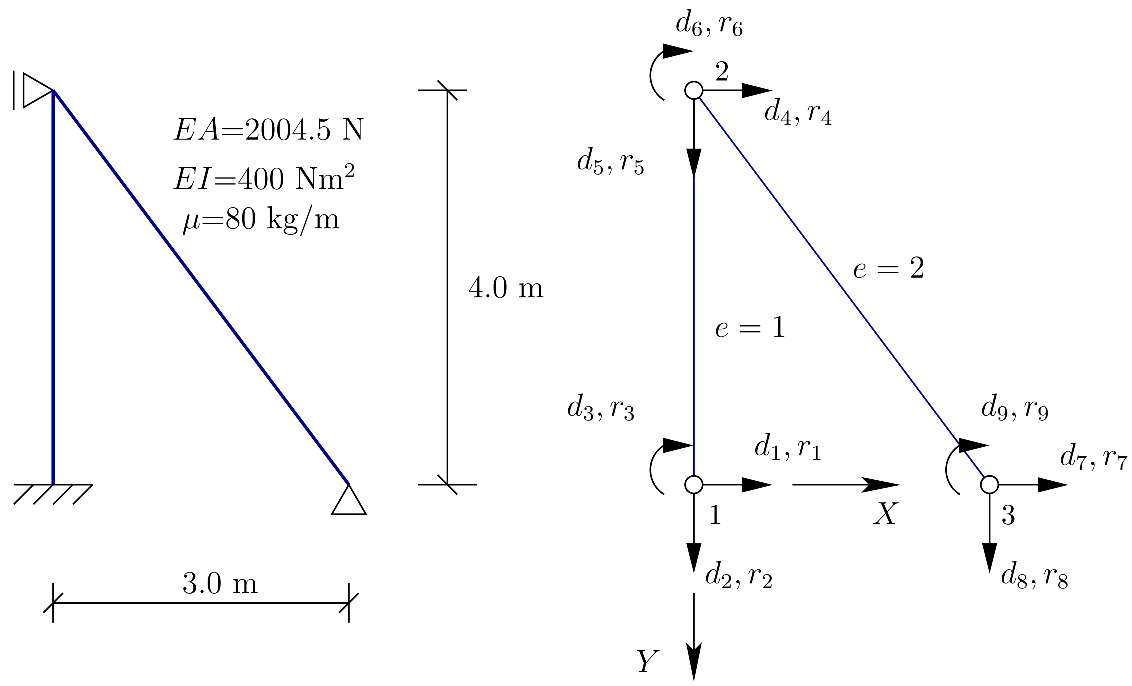
Rozwiązanie dynamiki ramy MES

Rozwiążemy dynamikę ramy pokazanej na Rys.1.



Rysunek 1: Rama i jej model skończenie elementowy

1. Obliczenie macierzy sztywności. Korzystając ze wzoru na macierz sztywności elementu ramowego:

$$
\bar{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{bmatrix}^e \tag{1}
$$

oraz ze wzoru na macierz transformacji:

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} \cos(\alpha^e) & \sin(\alpha^e) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha^e) & \cos(\alpha^e) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha^e) & \sin(\alpha^e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha^e) & \cos(\alpha^e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

i wykorzystując prawo transformacji

$$\mathbf{K}^e = (\mathbf{T}^e)^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}^e \tag{3}$$

obliczamy macierze dla elementów.

Element 1 α^1=270 °, l^1=4 m
Macierz sztywności

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 75.000 & 0.000 & 150.000 & -75.000 & 0.000 & 150.000 \\ 0.000 & 501.125 & 0.000 & 0.000 & -501.125 & 0.000 \\ 150.000 & 0.000 & 400.000 & -150.000 & 0.000 & 200.000 \\ -75.000 & 0.000 & -150.000 & 75.000 & 0.000 & -150.000 \\ 0.000 & -501.125 & 0.000 & 0.000 & 501.125 & 0.000 \\ 150.000 & 0.000 & 200.000 & -150.000 & 0.000 & 400.000 \end{bmatrix}$$

Element 2 α^2=53.13 °, l^2=5 m
Macierz sztywności

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 168.900 & 174.000 & -76.800 & -168.900 & -174.000 & -76.800 \\ 174.000 & 270.400 & 57.600 & -174.000 & -270.400 & 57.600 \\ -76.800 & 57.600 & 320.000 & 76.800 & -57.600 & 160.000 \\ -168.900 & -174.000 & 76.800 & 168.900 & 174.000 & 76.800 \\ -174.000 & -270.400 & -57.600 & 174.000 & 270.400 & -57.600 \\ -76.800 & 57.600 & 160.000 & 76.800 & -57.600 & 320.000 \end{bmatrix}$$

2. Agregacja. Globalną macierz **K** budujemy wykorzystując tablicę topologii oraz warunki ciągłości przemieszczeń uogólnionych w węzłach.

$$\begin{array}{ccc} U_1^1 = d_1 & U_2^1 = U_1^2 = d_4 & U_2^2 = d_7 \\ W_1^1 = d_2 & W_2^1 = W_1^2 = d_5 & W_2^2 = d_8 \\ \varphi_1^1 = d_3 & \varphi_2^1 = \varphi_1^2 = d_6 & \varphi_2^2 = d_9 \end{array}$$

gdzie $U_i^e,\ W_i^e,\ e, i = 1, 2$ są przemieszczeniami elementów w globalnym układzie współrzędnych, a φ_i^e kątami ugięcia. W rezultacie otrzymamy macierz sztywności w postaci

$$
\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
75.000 & 0.000 & 150.000 & -75.000 & 0.000 & 150.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 501.125 & 0.000 & 0.000 & -501.125 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
150.000 & 0.000 & 400.000 & -150.000 & 0.000 & 200.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
-75.000 & 0.000 & -150.000 & 243.900 & 174.000 & -226.800 & -168.900 & -174.000 & -76.800 \\
0.000 & -501.125 & 0.000 & 174.000 & 771.525 & 57.600 & -174.000 & -270.400 & 57.600 \\
150.000 & 0.000 & 200.000 & -226.800 & 57.600 & 720.000 & 76.800 & -57.600 & 160.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & -168.900 & -174.000 & 76.800 & 168.900 & 174.000 & 76.800 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & -174.000 & -270.400 & -57.600 & 174.000 & 270.400 & -57.600 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & -76.800 & 57.600 & 160.000 & 76.800 & -57.600 & 320.000
\end{bmatrix}
$$

3. Obliczenie macierzy bezwładności dla elementów.

Wzór na macierz bezwładności dla elementu ramowego jest w postaci

$$
\bar{\mathbf{M}}^e = \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix}
140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\
0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\
0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\
70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\
0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\
0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2
\end{bmatrix}^e \tag{4}
$$

gdzie μ masa elementu na jednostkę długości.

Znając macierze transformacji wyliczamy macierze dla elementów.

Element 1 $\mu^1 = 25$ kg/m, $l^1 = 4$ m

$$
\mathbf{M}^1 = (\mathbf{T}^1)^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{M}}^1 \mathbf{T}^1 = \begin{bmatrix}
118.857 & 0.000 & -67.048 & 41.143 & 0.000 & 39.619 \\
0.000 & 106.667 & 0.000 & 0.000 & 53.333 & 0.000 \\
-67.048 & 0.000 & 48.762 & -39.619 & 0.000 & -36.571 \\
41.143 & 0.000 & -39.619 & 118.857 & 0.000 & 67.048 \\
0.000 & 53.333 & 0.000 & 0.000 & 106.6667 & 0.0000 \\
39.619 & 0.000 & -36.571 & 67.048 & 0.000 & 48.762
\end{bmatrix}
$$

Element 2 $\mu^2 = 25$ kg/m, $l^2 = 5$ m

$$
\mathbf{M}^2 = (\mathbf{T}^2)^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{M}}^2 \mathbf{T}^2 = \begin{bmatrix}
143.086 & 7.314 & 83.809 & 56.914 & -7.314 & -49.524 \\
7.314 & 138.819 & 62.857 & -7.314 & 61.181 & -37.143 \\
83.809 & 62.857 & 95.238 & 49.524 & 37.143 & -71.429 \\
56.914 & -7.314 & 49.524 & 143.086 & 7.314 & -83.809 \\
-7.314 & 61.181 & 37.143 & 7.314 & 138.819 & -62.857 \\
-49.524 & -37.143 & -71.429 & -83.809 & -62.857 & 95.238
\end{bmatrix}
$$

4. Agregacja macierzy bezwładności.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 118.857 & 0.000 & -67.048 & 41.143 & 0.000 & 39.619 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 106.667 & 0.000 & 0.000 & 53.333 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -67.048 & 0.000 & 48.762 & -39.619 & 0.000 & -36.571 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 41.143 & 0.000 & -39.619 & 261.943 & 7.314 & 150.857 & 56.914 & -7.314 & -49.524 \\ 0.000 & 53.333 & 0.000 & 7.314 & 245.486 & 62.857 & -7.314 & 61.181 & -37.143 \\ 39.619 & 0.000 & -36.571 & 150.857 & 62.857 & 144.000 & 49.524 & 37.143 & -71.429 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 56.914 & -7.314 & 49.524 & 143.086 & 7.314 & -83.809 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -7.314 & 61.181 & 37.143 & 7.314 & 138.819 & -62.857 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -49.524 & -37.143 & -71.429 & -83.809 & -62.857 & 95.238 \end{bmatrix}$$

5. Uwzględnienie podstawowych warunków brzegowych i rozwiązanie problemu własnego. Uwzględniając warunki brzegowe

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_7 = d_8 = 0 \tag{5}$$

otrzymamy następujący problem własny $((\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{d}^A = \mathbf{0})$

$$\left(\begin{bmatrix} 771.525 & 57.600 & 57.600 \\ 57.600 & 720.000 & 160.000 \\ 57.600 & 160.000 & 320.000 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 245.486 & 62.857 & -37.143 \\ 62.857 & 144.000 & -71.429 \\ -37.143 & -71.429 & 95.238 \end{bmatrix} \right) \mathbf{d}^A = \mathbf{0} \tag{6}$$

Wartość własną obliczymy z wyznacznika (przedstawiam jeden ze sposobów rozwiązywania problemu własnego)

$$\left| \left(\begin{bmatrix} 771.525 & 57.600 & 57.600 \\ 57.600 & 720.000 & 160.000 \\ 57.600 & 160.000 & 320.000 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 245.486 & 62.857 & -37.143 \\ 62.857 & 144.000 & -71.429 \\ -37.143 & -71.429 & 95.238 \end{bmatrix} \right) \right| = 0$$

co prowadzi do równania charakterystycznego problemu w postaci

$$\begin{vmatrix} 771.525 & 57.600 & 57.600 \\ 57.600 & 720.000 & 160.000 \\ 57.600 & 160.000 & 320.000 \end{vmatrix} -$$
$$- \left(\begin{vmatrix} 771.525 & 57.600 & -37.143 \\ 57.600 & 720.000 & -71.429 \\ 57.600 & 160.000 & 95.238 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 771.525 & 62.857 & 57.600 \\ 57.600 & 144.000 & 160.000 \\ 57.600 & -71.429 & 320.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 245.486 & 57.600 & 57.600 \\ 62.857 & 720.000 & 160.000 \\ -37.143 & 160.000 & 320.000 \end{vmatrix} \right) \omega^2 +$$
$$+ \left(\begin{vmatrix} 771.525 & 62.857 & -37.143 \\ 57.600 & 144.000 & -71.429 \\ 57.600 & -71.429 & 95.238 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 245.486 & 57.600 & -37.143 \\ 62.857 & 720.000 & -71.429 \\ -37.143 & 160.000 & 95.238 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 245.486 & 62.857 & 57.600 \\ 62.857 & 144.000 & 160.000 \\ -37.143 & -71.429 & 320.000 \end{vmatrix} \right) \omega^4 -$$
$$- \begin{vmatrix} 245.486 & 62.857 & -37.143 \\ 62.857 & 144.000 & -71.429 \\ -37.143 & -71.429 & 95.238 \end{vmatrix} \omega^6 = 0$$

co daje

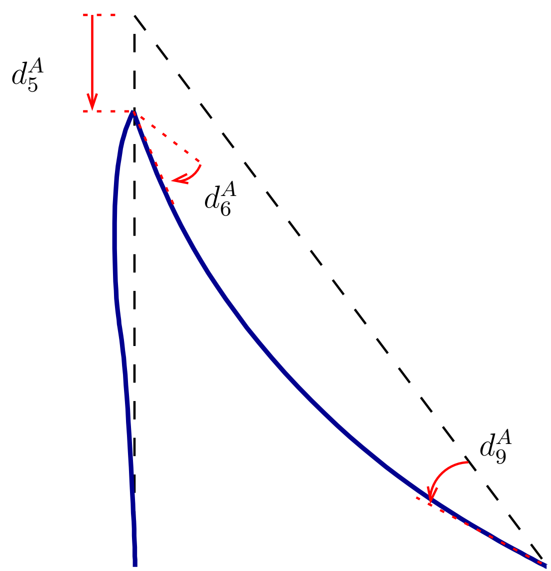
$$1.5562 \cdot 10^8 - 1.5634 \cdot 10^8 \omega^2 + 3.7111 \cdot 10^7 \omega^4 - 1.8728 \cdot 10^6 \omega^6 = 0$$

Dla przykładu wyznaczymy jeden najmniejszy pierwiastek równania charakterystycznego, który wynosi $\omega_1 = 1.2128$. Po podstawieniu tej wartości do układu równań (6) oraz przy założeniu $d_9^A = -1$ układ ten przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} 410.457 & -34.852 & 112.231 \\ -34.852 & 508.200 & 265.059 \\ 112.231 & 265.0593 & 179.921 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_5^A \\ d_6^A \\ d_9^A = -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

co daje rozwiązanie $d_5^A = 0.3196$, $d_6^A = 0.5435$ a wektor własny dla wszystkich stopni swobody wynosi

$$\mathbf{d}^A = \{0\ 0\ 0\ 0\ 0.3196\ 0.5435\ 0\ 0\ -1\}$$



Rysunek 2: Postać drgań własnych dla $\omega_1 = 1.2128$.