Ćwiczenie 1. - *Badanie zmienności funkcji kwadratowej*

Ćwiczenie 1. pokazuje krok po kroku tworzenie prostego dokumentu w Mathcadzie.
Dokument ten składa się z następujących elementów:

1. Zdefiniowanie funkcji kwadratowej f(x) = ax^2 +bx +c,
2. Wykonanie wykresu tej funkcji,
3. Utworzenie tablicy wartości funkcji,
4. Obliczenie miejsc zerowych,
5. Obliczenie pola powierzchni pod wykresem funkcji.

1. Zdefiniowanie współczynników *a, b, c*

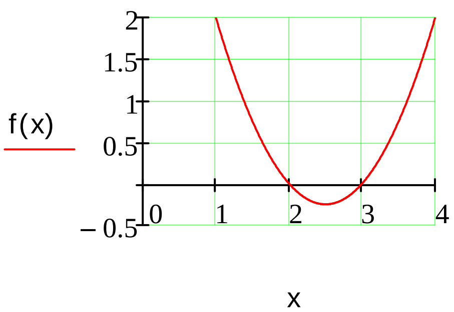
Postać danych w dokumencie	Znaki wpisywane z klawiatury (oddzielone przecinkami)
$a := 1$	**a, : (dwukropek), 1**
$b := -5$	**analogicznie, jak wyżej**
$c := 6$	**analogicznie, jak wyżej**

2. Zdefiniowanie funkcji

Postać wzoru w dokumencie	Znaki wpisywane z klawiatury (oddzielone przecinkami)
$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	**f(x), : (dwukropek), a, *, x, ^, 2, spacja, +, b, *, x, +, c**

3. Utworzenie wykresu funkcji

Postać wykresu w dokumencie



Opis czynności

1. utworzyć okienko wykresu z klawiatury przez kombinacje klawiszy **Shift+@**
2. w pole opisu funkcji wpisać *f(x)*
3. w pole argumentu wpisać *x*
4. w polach zakresu argumentu podać 0 i 4
5. sformatować wykres przez podwójne kliknięcie i wybranie odpowiednich opcji:

- (Axes style -> crossed),
- (X-axis -> Grid Lines, Numbered),
- (Number of Grids -> 4),
- (Y-axis - **analogicznie**)

4. Obliczenie tablicy wartości funkcji

4.1. Zdefiniowanie zbioru wartości argumentu x - x = {1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5 4.0}

ogólna postać wyrażenia: *wartość początkowa, druga wartość, wartość końcowa*

Postać wzoru w dokumencie	Znaki wpisywane z klawiatury
$x := 1, 1.5 .. 4$	**x, : (dwukropek), 1, , (przecinek), 1.5, ; (średnik), 4**

4.2. Obliczenie zbioru wartości funkcji f(x)

f(x) =

2
0.75
0
-0.25
0
0.75
2

f(x), =

wycentrowanie tabelki:
1. wskazać kursorem tabelkę,
2. kliknąć prawy przycisk myszki,
3. wybrać Aligment/Center

5. Obliczenie miejsc zerowych funkcji kwadratowej

Postać wzoru i obliczeń w dokumencie — Znaki wpisywane z klawiatury

$\Delta := b^2 - 4\cdot a\cdot c$ $\quad \Delta = 1$ — **D, Ctrl+g, :, b, ^, 2, spacja, -4, *, a, *, c**
D, Ctrl+g, =

$x_1 := \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$ $\quad x_1 = 2$ — **x, . (kropka), 1, :, - b, -, \, D, Ctrl+g, spacja, spacja, /, 2, *, a**
x, .(kropka), 1, =

$x_2 := \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$ $\quad x_2 = 3$ — **analogicznie do x1**

6. Obliczenie pola powierzchni pod wykresem funkcji kwadratowej

Postać wzoru i obliczeń w dokumencie — Znaki wpisywane z klawiatury

$\int_1^2 f(x)\,dx = 0.833$ — **&, f(x), Tab, x, Tab, 1, Tab, 2, spacja, =**

Zadanie

1. Przygotuj dokument pokazujący na wykresach poniższe cztery wielomiany 3. stopnia.

$H_1(\xi) := 1 - 3\cdot\xi^2 + 2\cdot\xi^3$ $\quad H_2(\xi) := \xi - 2\cdot\xi^2 + \xi^3$ $\quad 0 \le \xi \le 1$

$H_3(\xi) := 3\cdot\xi^2 - 2\cdot\xi^3$ $\quad H_4(\xi) := -\xi^2 + \xi^3$

Porada: Aby otrzymać literę ξ naciśnij: **x, Ctrl+g**.

Ćwiczenie 2. - *Interpolacja Lagrange'a*

Ćwiczenie 2. ilustruje kolejne kroki tworzenia dokumentu dotyczącego interpolacji pewnej funkcji za pomocą wielomianów bazowych Lagrange'a 2. stopnia.
Dokument składa się z następujących elementów:
1. Zdefiniowanie funkcji interpolowanej g(x) = sin(x)*e^x,
2. Wykonanie wykresu g(x) w przedziale [0,8] z przyrostem $\Delta x = 0.1$,
3. Określenie węzłów interpolacji,
4. Obliczenie wartości funkcji interpolowanej w węzłach interpolacji,
5. Zdefiniowanie wielomianów bazowych Lagrange'a 2. stopnia,
6. Zdefiniowanie wielomianu interpolacyjnego $\phi(x)$,
7. Wykonanie wykresu obu funkcji g(x) i $\phi(x)$,
8. Zastosowanie funkcji pspline() i interp() do interpolacji funkcji.

1. Zdefiniowanie funkcji interpolowanej

Postać wzoru w dokumencie

$g(x) := \sin(x) \cdot \exp(x)$

Znaki wpisywane z klawiatury
(oddzielone przecinkami)

g(x), : (dwukropek), sin(x), *, exp(x)

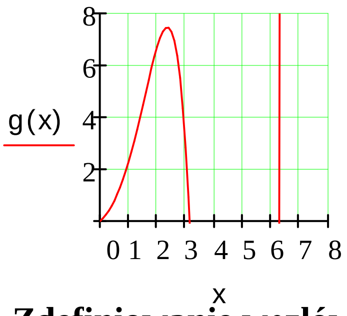
2. Utworzenie wykresu funkcji

Postać wykresu w dokumencie

$x := 0, 0.1 .. 8$

Opis czynności

x, : (dwukropek), 0, , (przecinek), 0.1, ; (średnik), 8



1. utworzyć okienko wykresu z klawiatury przez kombinacje klawiszy **Shift+@**
2. w pole opisu funkcji wpisać g*(x)*
3. w pole argumentu wpisać *x*
4. w polach zakresu argumentu podać 0 i 8
5. sformatować wykres przez podwójne kliknięcie i wybranie odpowiednich opcji

3. Zdefiniowanie węzłów interpolacji

$x_0 := 0$ $x_1 := 1$ $x_2 := 2$

$g_0 := g(x_0)$ $g_1 := g(x_1)$ $g_2 := g(x_2)$

4. Obliczenie wartości funkcji interpolowanej w węzłach interpolacji

$g(x_0) = 0$ $g(x_1) = 2.287$ $g(x_2) = 6.719$

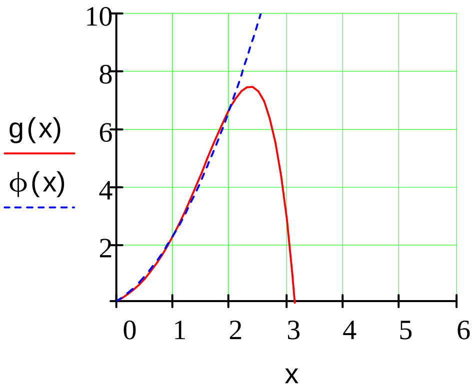
5. Zdefiniowanie wielomianów bazowych Lagrange'a

$$L_0(x) := \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)} \quad L_1(x) := \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)} \quad L_2(x) := \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)}$$

6. Zdefiniowanie wielomianu interpolacyjnego

$\phi(x) := L_0(x)\cdot g_0 + L_1(x)\cdot g_1 + L_2(x)\cdot g_2$

7. Wykres funkcji interpolowanej i wielomianu interpolacyjnego



1. utworzyć okienko wykresu z klawiatury przez kombinacje klawiszy **Shift+@**
2. w pole opisu funkcji wpisać: " g*(x), ϕ(x)"*
3. w pole argumentu wpisać *x*
4. w polach zakresu argumentu podać 0 i 6
5. sformatować wykres przez podwójne kliknięcie i wybranie odpowiednich opcji

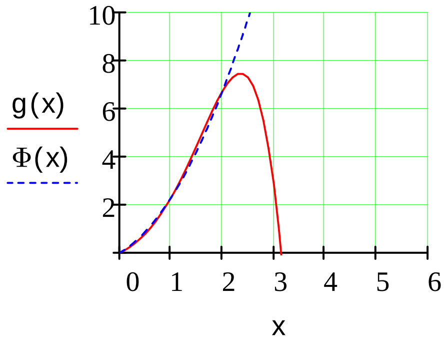
8. Interpolacja Lagrange'a - zastosowanie funkcji pspline()

$$vx := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad vy := \begin{pmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \end{pmatrix}$$

Zdefiniowanie węzłów interpolacji w wektorach *vx* i *vy*.

Aby zdefiniować wektor *vx* naciśnij: **vx, :, Ctrl+m**, wpisz odpowiednio liczbę wierszy i kolumn oraz wpisz wartości składowych. Analogicznie dla *vy*.

$\Phi(x) := \mathrm{interp}(\mathrm{pspline}(vx, vy), vx, vy, x)$ Obliczenie wartości wielomianu $\Phi(x)$



Ćwiczenie 3. - *Operacje na wektorach i macierzach*

Początkowy indeks wektorów i macierzy w Mathcadzie przechowywany jest w zmiennej globalnej ORIGIN. Domyślna wartość wynosi 0. Poniższe polecenie zmienia to ustawienie na 1.

ORIGIN := 1 **ORIGIN (DUŻE LITERY), : (dwukropek), 1**

1. Definiowanie wektorów i macierzy - 1. sposób

Sposób 1. - definicja niezerowych elementów

Postać danych w dokumencie | Znaki wpisywane z klawiatury (oddzielone przecinkami)

$V_1 := 1.11$ **V, [(lewy nawias kwadratowy), : , 1.11**

$V_3 := 3.33$ **analogicznie, jak wyżej**

$$V = \begin{pmatrix} 1.11 \\ 0 \\ 3.33 \end{pmatrix}$$ **V, =**

Wystarczy zdefiniować niezerowe wyrazy wektora lub macierzy (pozostałe automatycznie są równe 0). Wymiar wektora jest określony przez aktualnie zdefiniowany, maksymalny indeks (w przykładzie jest to 3). Analogicznie określane są wymiary macierzy.

$A_{1,1} := 2.3$ **A, [, 1, 1, : , 2.3**

$A_{3,2} := 5.5$ **analogicznie, jak wyżej**

$$A = \begin{pmatrix} 2.3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5.5 \end{pmatrix}$$ **A, =**

Sposób 2. - definicja wszystkich elementów

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B, : , Ctrl+M, w okienku wpisać wymiary i wpisać kolejne elementy macierzy

2. Definiowanie macierzy jednostkowej

$I := \mathrm{identity}(3)$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Operacje algebraiczne na wektorach i macierzach

3.1. Transpozycja macierzy

$C := B^T$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **C, : , B, Ctrl+1 (jeden)**

3.2. Suma i różnica macierzy

$A + C = \begin{pmatrix} 3.3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6.5 \end{pmatrix}$ $\quad A - C = \begin{pmatrix} 1.3 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 4.5 \end{pmatrix}$

3.3. Iloczyn macierzy

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2.3 & 4.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 5.5 \end{pmatrix}$ $\quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2.3 & 0 \\ 4.6 & 5.5 \end{pmatrix}$

3.4. Wyznacznik macierzy |D|

$F := A \cdot B$ $\quad |F| = 0$ **| , F , =**

3.5. Macierz odwrotna

$E := (B \cdot A)^{-1}$ $\quad E = \begin{pmatrix} 0.435 & 0 \\ -0.364 & 0.182 \end{pmatrix}$

4. Macierze funkcji

$H(x) := \begin{pmatrix} 2 \cdot x & \frac{1}{2} \cdot x^2 \\ \frac{1}{4} \cdot x^2 & x^3 \end{pmatrix}$ Definicja macierzy funkcji *H(x)*

Obliczenia symboliczne: **Ctrl+. (kropka)**

Obliczenia numeryczne:

$H(0.5) = \begin{pmatrix} 1 & 0.125 \\ 0.063 & 0.125 \end{pmatrix}$

$H\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

5. Operacje na blokach macierzy

Do operowania blokami służą specjalne funkcje:

- *submatrix(A, wg, wd, kl, kp)* - wyciągnięcie bloku prostokątnego z macierzy *A*, ograniczonego przez wiersze górny *wg* i dolny *wd* oraz przez kolumny lewą *kl* i prawą *kp*,
- *augment(M, N)* - sklejenie dwóch macierzy *M* i *N* w poziomie,
- *stack(P, R)* - sklejenie dwóch macierzy *P* i *R* w pionie,

5.1 Wyciągnięcie bloków z macierzy K

$K := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

$b_1 := \text{submatrix}(K, 2, 3, 2, 3)$ $\quad b_2 := \text{submatrix}(K, 2, 3, 4, 4)$

$b_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

5.2 Sklejenie dwóch bloków w poziomie

$b_3 := \mathrm{augment}(b_1, b_2)$ $\quad b_3 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

5.3 Sklejenie dwóch bloków w pionie

$b_4 := \mathrm{stack}(b_1, b_2^T)$ $\quad b_4 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

<u>Ćwiczenie 4. - *Rozwiązywanie układów równań liniowych AX=B*</u>

$$M(a,b) := \begin{pmatrix} \frac{a \cdot b}{3} & \frac{a^2 \cdot b}{4} \\ \frac{a \cdot b^2}{4} & a \cdot b \end{pmatrix}$$ Zdefiniowanie macierzy funkcyjnej *M(a,b)*

$A := M(1,2)$ Zdefiniowanie macierzy *A*

$|A| = 0.833$ Obliczenie wyznacznika

$B := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Zdefiniowanie wektora *B*

$X := A^{-1} \cdot B$ $\quad X = \begin{pmatrix} 3.6 \\ -0.8 \end{pmatrix}$ Numeryczne obliczenie rozwiązania *X*

$X \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{18}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ Symboliczne obliczenie rozwiązania *X*

<u>Ćwiczenie 5. - *Całkowanie macierzy funkcji:*</u>

$Q(x) := \begin{pmatrix} x & x^2 \\ x^2 & x^3 \end{pmatrix}$ Zdefiniowanie macierzy funkcji Q(x)

$i := 1..2 \qquad j := 1..2$ Zdefiniowanie zakresu indeksów

$D_{i,j} := \int_0^1 Q(x)_{i,j}\, dx$ Zdefiniowanie macierzy D zawierającej wartości całek macierzy Q

$D = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.333 \\ 0.333 & 0.25 \end{pmatrix}$ Wynik całkowania macierzy funkcji Q(x)

<u>Zadanie</u>

Przygotuj dokument rozwiązujący układ równań liniowych *KX=F*, gdzie macierz *K* i wektor *F* są dowolnymi blokami o wymiarach, odpowiednio 2x2 i 2x1 macierzy *KG* i wektora *FG*. Zastosuj 3 poznane funkcje do operowania blokami. Zdefiniuj macierz *KG* i wektor *FG* oraz przyjmij wartości stałych *a,b,c,d*.

Ćwiczenie 6. - ***Operacje z macierzami boolowskimi***

Celem ćwiczenia jest sposób definiowania macierzy boolowskich (zawierających wartości 0 i 1) i operacje z wykorzystaniem takich macierzy**.**

$A1_{5,10} := 0$

A1 =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$A1_{1,2} := 1$ $A1_{2,3} := 1$ $A1_{3,6} := 1$ $A1_{4,7} := 1$ $A1_{5,9} := 1$

A1 =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

$$K := \begin{pmatrix} 9 & 13 & -62 & 93 & 56 \\ 22 & -77 & -45 & 62 & 23 \\ 33 & 66 & -84 & 6 & 7 \\ 28 & -43 & 58 & 52 & 55 \\ 27 & 21 & 15 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$K2 := A1^T \cdot K \cdot A1$

K2 =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	9	13	0	0	-62	93	0	56	0
3	0	22	-77	0	0	-45	62	0	23	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	33	66	0	0	-84	6	0	7	0
7	0	28	-43	0	0	58	52	0	55	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	27	21	0	0	15	11	0	12	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Ćwiczenie 7. - *Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych*

Celem ćwiczenia jest rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego 2. rzędu za pomocą zamiany wyjściowego równania na układ dwóch równań różniczkowych 1. rzędu i rozwiązania tego układu równań metodą Runge-Kutty IV rzędu z wykorzystaniem wbudowanej funkcji Mathcada ***rkfixed[.].***

1. Zdefiniowanie równania różniczkowego zwyczajnego 2. rzędu

$y'' - 2y' + 2y = e^{2\cdot t}\sin(t)$, $0 \le t \le 1$ z warunkami początkowymi: $y(0) = -0.4$ i $y'(0) = -0.6$

2. Zamiana wyjściowego równania na układ dwóch równań 1. rzędu

Przyjmując, że: $u_1(t) = y(t)$ i $u_2(t) = y'(t)$ wyjściowe równanie możemy zamienić na układ równań:

$$u'_1(t) = u_2(t),$$

$$u'_2(t) = e^{2\cdot t}\sin(t) - 2\,u_1(t) + 2\,u_2(t)$$

z warunkami początkowymi: $u_1(0) = -0.4$ i $u_2(0) = -0.6$

3. Rozwiązanie układu równań za pomocą funkcji *rkfixed[.]*

3.1 Zdefiniowanie wektora kolumnowego F(t, u), którego elementy zawierają prawe strony równań rozwiązywanego układu.

$$F(t,u) := \begin{pmatrix} u_2 \\ \exp(2\cdot t)\cdot\sin(t) - 2\cdot u_1 + 2\cdot u_2 \end{pmatrix}$$

3.2 Wywołanie funkcji Mathcada *rkfixed[.]* z odpowiednimi argumentami.

rkfixed[y0, a, b, N, F] ogólna postać wywołania funkcji ***rkfixed[.],*** gdzie:

y0 - wektor kolumnowy zawierający warunki początkowe równań rozwiązywanego układu,
a, b - odpowiednio początek i koniec przedziału, w którym poszukujemy rozwiązania,
N - liczba podprzedziałów rozpatrywanego przedziału,
F - zdefiniowany powyżej wektor prawych stron równań rozwiązywanego układu.

3.3 Rozwiązanie układu równań.

$$W := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} -0.4 \\ -0.6 \end{pmatrix}, 0, 1, 10, F\right]$$

Rozwiązanie układu równań zostało zapisane w 3-kolumnowej macierzy W, której kolumny zawierają kolejno wartości węzłowe: zmiennej t, zmiennej $u_1(t) = y(t)$ i zmiennej $u_2(t) = y'(t)$.

W =

0	-0.4	-0.6
0.1	-0.462	-0.632
0.2	-0.526	-0.64
0.3	-0.589	-0.614
0.4	-0.647	-0.537
0.5	-0.694	-0.389
0.6	-0.721	-0.144
0.7	-0.718	0.229
0.8	-0.67	0.772
0.9	-0.556	1.535
1	-0.353	2.579