Przykład 1

Przykład przedstawia rozwiązanie problemu brzegowego

$$\begin{cases} u'' + 2u = 2x^2 - 4x + 12 \\ u(0) = 5 \\ u'(2) = 2 \end{cases} \tag{1}$$

metodami wariacyjnymi.

Zanim zaczniemy obliczenia zamienimy powyższy problem z niejednorodnymi warunkami brzegowymi na problem równoważny z jednorodnymi warunkami. W tym celu podstawimy za $u(x) = y(x) + u_0(x)$ gdzie funkcja $y(x)$ będzie spełniać jednorodne warunki brzegowe, a $u_0(x)$ jest dowolną funkcją która spełnia niejednorodne warunki. Dla naszego przykładu przyjmiemy funkcje postaci $u_0(x) = ax + b$. Po uwzględnieniu $u(0) = y(0) + a \cdot 0 + b = 5$ oraz, że $y(0) = 0$ (warunek jednorodny) $\Rightarrow b = 5$. Analogicznie dla drugiego warunku otrzymamy $u'(2) = y'(2) + a = 2 \ \Rightarrow a = 2$.

W ten sposób wyznaczoną zależność $u(x) = y(x) + 2x + 5$ wstawimy do równania (1) i otrzymamy problem brzegowy z jednorodnymi warunkami brzegowymi

$$\begin{cases} y'' + 2y = 2x^2 - 8x + 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases}$$

1. Metoda Rayleigha-Ritza

   Ogólne wzory:

$$Ay = f$$

$$A = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 2 \qquad f = 2x^2 - 8x + 2$$

$$I(y) = \frac{1}{2}(y, Ay) - (y, f)$$

$$I(y) = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 y(y'' + 2y)\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 y(2x^2 - 8x + 2)\mathrm{d}x$$

   Rozwiązania będziemy szukać w przestrzeni energii H_A co wymaga scałkowania przez części pierwszego członu ostatniego równania:

$$I(y) = \frac{1}{2}\left((yy')\Big|_0^2 + \int\limits_0^2 (-y'^2 + 2y^2)\mathrm{d}x \right) - \int\limits_0^2 y(2x^2 - 8x + 2)\mathrm{d}x$$

   Uwzględniając warunki brzegowe człon $(yy')\Big|_0^2 = 0$.

   Przyjmiemy dwie funkcje bazowe spełniające jednorodny **podstawowy** warunek brzegowy (co najmniej klasy ciągłości C^1)

$$\mathbf{\Phi} = [x \quad x^2]$$

   Wówczas $y = \mathbf{\Phi d}$, oraz

$$I(y) = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 (-\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}'^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}'\mathbf{d} + 2\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi d})\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(2x^2 - 8x + 2)\mathrm{d}x$$

Po minimalizacji funkcjonału otrzymamy

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{d}} = \int_0^2 (-\mathbf{\Phi}'^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}'\mathbf{d} + 2\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}\mathbf{d})\mathrm{d}x - \int_0^2 \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(2x^2 - 8x + 2)\mathrm{d}x = \mathbf{0} \quad (2)$$

a po podstawieniu konkretnych funkcji $\mathbf{\Phi}$

$$\int_0^2 \left(- \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2x \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. +2 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x^2 \end{bmatrix} \right) \mathrm{d}x\mathbf{d} =$$

$$= \int_0^2 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} (2x^2 - 8x + 2)\mathrm{d}x$$

Po przemnożeniu i scałkowaniu otrzymamy układ równań

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{3} & 4 \\ 4 & \frac{32}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{28}{3} \\ -\frac{208}{15} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie $y(x) = -4 \cdot \Phi_1 + 1 \cdot \Phi_2 = x^2 - 4x$ a wracając do równania wyjściowego $\boldsymbol{u(x)} = y(x) + u_0(x) = x^2 - 4x + 2x + 5 = \boldsymbol{x^2 - 2x + 5}$ co jest rozwiązaniem dokładnym.

2. Metoda sformułowania wariacyjnego (równoważna z metodą R-R)

   Startujemy z równań

$$A = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 2 \qquad f = 2x^2 - 8x + 2$$

$$(w, Ay) = (w, f)$$

$$\int_0^2 w(y'' + 2y)\mathrm{d}x = \int_0^2 w(2x^2 - 8x + 2)\mathrm{d}x$$

Pierwszy człon ostatniego równania całkujemy przez części

$$wy'\Big|_0^2 + \int_0^2 (-w'y' + 2wy)\mathrm{d}x = \int_0^2 w(2x^2 - 8x + 2)\mathrm{d}x \qquad (3)$$

Zważywszy na to, że funkcja w spełniać ma jednorodny podstawowy warunek brzegowy to $wy'\Big|_0^2 = 0$.

Podstawiamy za $y = \mathbf{\Phi d}$ i $w = \mathbf{\Phi c} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}$, oraz przyjmujemy te same funkcje bazowe co w zadaniu poprzednim.

Równanie (3) po przekształceniach przyjmie postać

$$\int_0^2 (-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}'^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}'\mathbf{d} + 2\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi d})\mathrm{d}x - \int_0^2 \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(2x^2 - 8x + 2)\mathrm{d}x = \mathbf{0}$$

a dla warunku, że równanie to jest spełnione dla każdego $\mathbf{c} \neq 0$ mamy

$$\int_0^2 (-\mathbf{\Phi}'^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}'\mathbf{d} + 2\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi d})\mathrm{d}x - \int_0^2 \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(2x^2 - 8x + 2)\mathrm{d}x = \mathbf{0}$$

co jest identyczne z równaniem (2). Dalszy tok postępowania jak w zadaniu poprzednim.

3. Metoda Bubnowa-Galerkina

Metoda to należy do grupy metod residuów ważonych. Ogólny wzór ma postać

$$(w, R) = 0 \tag{4}$$

gdzie $R = Ay - f$ a dla naszego przykładu równanie (4) przyjmie postać

$$\int_0^2 w(y'' + 2y - 2x^2 + 8x - 2)\mathrm{d}x \tag{5}$$

Rozwiązania będziemy szukać w bazie funkcji dopuszczalnych spełniających **podstawowe** i **naturalne** warunki brzegowe, oraz co najmniej klasy ciągłości C^2.

Przyjmiemy dwie funkcje bazowe $\mathbf{\Phi} = [x^2 - 4x \quad x^3 - 12x]$ a $y = \mathbf{\Phi d}$.

W metodzie B-G funkcja wagowa $w = \mathbf{\Phi c} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}$. Podstawiając te wszystkie zależności do (5) otrzymamy

$$\int_0^2 \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{\Phi}''\mathbf{d} + 2\mathbf{\Phi d} - 2x^2 + 8x - 2\right)\mathrm{d}x = 0$$

Równanie to ma być spełnione dla dowolnego $\mathbf{c} \neq 0$, oraz po podstawieniu konkretnych funkcji bazowych, przyjmie postać

$$\int_0^2 \left[\begin{array}{c} x^2 - 4x \\ x^3 - 12x \end{array}\right] \left\{ \left[\begin{array}{cc} 2 & 6x \end{array}\right] \mathbf{d} + \right.$$
$$\left. + 2\left[\begin{array}{cc} x^2 - 4x & x^3 - 12x \end{array}\right]\mathbf{d} - (2x^2 - 8x + 2) \right\} \mathrm{d}x = 0$$

Dalej całkując i przekształcając otrzymamy układ równań

$$\begin{bmatrix} \frac{352}{15} & \frac{1352}{15} \\ \frac{1352}{15} & \frac{12032}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{352}{15} \\ \frac{1352}{15} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie tego układu wynosi

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a ostateczne rozwiązanie ma postać $y(x) = 1 \cdot \Phi_1 + 0 \cdot \Phi_2 = x^2 - 4x$. Wracając teraz do równania wyjściowego $\boldsymbol{u(x)} = y(x) + u_0(x) = x^2 - 4x + 2x + 5 = \boldsymbol{x^2 - 2x + 5}$ otrzymamy to samo rozwiązanie jak we wcześniejszych metodach.

4. Metoda kollokacji

   Metoda ta jest również z rodziny metod residuów ważonych. W porównaniu do B-G różnica polega na doborze funkcji wagowej $w = \delta(x - x_i)$ gdzie x_i jest punktem kollokacji. Punktów kollokacji dobieramy tyle ile jest funkcji bazowych i powinny one zawierać sie w obszarze szukanego rozwiązania. Przyjmijmy $x_1 = \frac{2}{3}$ oraz $x_2 = \frac{4}{3}$.

   Równanie (4) ma teraz postać

$$\int_0^2 \delta(x - x_i) R(x) \mathrm{d}x = R(x_i) = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2$$

   czyli

$$R(x_i) = \left(\mathbf{\Phi}(x_i)'' + 2\mathbf{\Phi}(x_i)\right)\mathbf{d} - (2x_i^2 - 8x_i + 2) = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2$$

   dalej

$$\begin{aligned} R(x_1) = 0 \longrightarrow & \left\{\begin{bmatrix} 2 & 6 \cdot \frac{2}{3} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} & \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 12 \cdot \frac{2}{3} \end{bmatrix}\right\}\mathbf{d} = \\ & = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8 \cdot \frac{2}{3} + 2 \\ R(x_2) = 0 \longrightarrow & \left\{\begin{bmatrix} 2 & 6 \cdot \frac{4}{3} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4}{3} & \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 12 \cdot \frac{4}{3} \end{bmatrix}\right\}\mathbf{d} = \\ & = 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8 \cdot \frac{4}{3} + 2 \end{aligned}$$

   co prowadzi do układu równań

$$\begin{bmatrix} -\frac{22}{9} & -\frac{308}{27} \\ -\frac{46}{9} & -\frac{520}{27} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{22}{9} \\ -\frac{46}{9} \end{bmatrix}$$

   Powyższy układ równań daje identyczne rozwiązanie co w poprzedniej metodzie.

5. Metoda najmniejszych kwadratów

   Sposób postępowania jest podobny do tego który był stosowany w dwóch ostatnich metodach. Różnica polega w doborze funkcji wagowej $w = \dfrac{\partial R}{\partial \mathbf{d}}$.

   Residuum możemy zapisać jako

$$R = \mathbf{\Phi}''\mathbf{d} + 2\mathbf{\Phi}\mathbf{d} - (2x^2 - 8x + 2)$$

   stąd

$$w = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{\Phi}'' + 2\mathbf{\Phi}$$

   czyli równanie (4) przyjmie postać

$$\int_0^2 (\mathbf{\Phi}'' + 2\mathbf{\Phi})^{\mathrm{T}} \Big(\mathbf{\Phi}''\mathbf{d} + 2\mathbf{\Phi}\mathbf{d} - (2x^2 - 8x + 2)\Big)\,\mathrm{d}x = 0$$

   podstawiając za $\mathbf{\Phi}$ nasz wektor funkcji bazowych otrzymamy

$$\int_0^2 \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 6x \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x^2 - 4x \\ x^3 - 12x \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 6x \end{bmatrix} \mathbf{d} + \right.$$
$$\left. + 2 \begin{bmatrix} x^2 - 4x & x^3 - 12x \end{bmatrix} \mathbf{d} - (2x^2 - 8x + 2) \right\} \mathrm{d}x = 0$$

   co po scałkowaniu i przekształceniach daje układ równań

$$\begin{bmatrix} \dfrac{168}{5} & \dfrac{1864}{15} \\ \dfrac{1864}{15} & \dfrac{16672}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{168}{5} \\ \dfrac{1864}{15} \end{bmatrix}$$

   którego rozwiązaniem znów jest $\mathbf{d} = [1\ 0]^{\mathrm{T}}$.

Powyższe metody są metodami przybliżonymi. Jednakże jeżeli mamy doświadczenie w dobieraniu funkcji bazowych to w szczególnym przypadku możemy otrzymać nawet rozwiązanie ścisłe, jak w tym przykładzie. Jest to niestety rzadko spotykane by rozwiązanie z tych wszystkich metod było identyczne, a co dopiero było zgodne z rozwiązaniem ścisłym.

Przykład 2

Przykład przedstawia rozwiązanie problemu brzegowego

$$\begin{cases} u'' + 2u = 2x^2 - 4x + 12 \\ u(0) = 5 \\ u'(2) = 2 \end{cases}$$

metodą elementów skończonych w sformułowaniu wariacyjnym.

Zapiszemy powyższy problem dla jednego elementu

$$\int_0^{l^e} v^e(u^{e\prime\prime} + 2u^e)\mathrm{d}x^e = \int_0^{l^e} v^e(2(x^e + a^e)^2 - 4(x^e + a^e) + 12)\mathrm{d}x^e$$

gdzie a^e jest przesunięciem elementowego lokalnego układu współrzędnych względem układu globalnego.

Pierwszy człon przecałkujemy przez części

$$v^e u^{e\prime}\Big|_0^{l^e} + \int_0^{l^e}(-v^{e\prime}u^{e\prime} + 2v^e u^e)\mathrm{d}x^e = \int_0^{l^e} v^e(2(x^e + a^e)^2 - 4(x^e + a^e) + 12)\mathrm{d}x^e$$

Podstawiamy teraz za $u^e = \mathbf{N}^e\mathbf{d}^e$ i $v^e = \mathbf{N}^e\mathbf{c}^e = \mathbf{c}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}$ gdzie $\mathbf{N}^e$ są liniowymi funkcjami kształtu Lagrange'a ($\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x^e}{l^e} & \dfrac{x^e}{l^e} \end{bmatrix}$) otrzymujemy

$$\mathbf{c}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}u^{e\prime}\Big|_0^{l^e} + \int_0^{l^e}(-\mathbf{c}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\prime\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\prime}\mathbf{d}^e + 2\mathbf{c}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^e\mathbf{d}^e)\mathrm{d}x^e =$$

$$= \int_0^{l^e} \mathbf{c}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}(2(x^e + a^e)^2 - 4(x^e + a^e) + 12)\mathrm{d}x^e$$

dalej przekształcając

$$\mathbf{c}^{e\mathrm{T}}\left\{\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}u^{e\prime}\Big|_0^{l^e} + \int_0^{l^e}(-\mathbf{N}^{e\prime\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\prime} + 2\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^e)\mathbf{d}^e\mathrm{d}x^e - \right.$$

$$\left. - \int_0^{l^e}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}(2(x^e + a^e)^2 - 4(x^e + a^e) + 12)\mathrm{d}x^e\right\} = 0$$

Równanie to jest spełnione dla dowolnego $\mathbf{c}^e$ i po przekształceniach przyjmie postać

$$\mathbf{K}^e\mathbf{d}^e = \mathbf{p}^e - \mathbf{p}^e_b$$

gdzie

$$\mathbf{K}^e = \int_0^{l^e}(-\mathbf{N}^{e\prime\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\prime} + 2\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^e)\mathrm{d}x^e$$

$$\mathbf{p}^e = \int_0^{l^e}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}(2(x^e + a^e)^2 - 4(x^e + a^e) + 12)\mathrm{d}x^e$$

$$\mathbf{p}^e_b = \mathbf{N}^{e\mathrm{T}}u^{e\prime}\Big|_0^{l^e}$$

Przyjmujemy trzy elementy skończone o równej długości $l^e = \frac{2}{3}$. Dla poszczególnych elementów otrzymujemy macierze i wektory: ($\odot$ – nr węzła)

Element 1 $a^1 = 0$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad ① \qquad\qquad & \qquad\qquad ② \end{array} \\ \mathbf{K^1} = & \left[\begin{array}{rr} -1.055555556 & 1.722222222 \\ 1.722222222 & -1.055555556 \end{array}\right] \begin{array}{c} ① \\ ② \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{p}^1 = \left[\begin{array}{c} 3.753086419 \\ 3.555555556 \end{array}\right] \begin{array}{c} ① \\ ② \end{array}$$

$$\mathbf{p}_b^1 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right] u^{1\prime}(l^1) - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right] u^{1\prime}(0) = \left[\begin{array}{r} -u^{1\prime}(0) \\ u^{1\prime}(l^1) \end{array}\right] \begin{array}{c} ① \\ ② \end{array}$$

Element 2 $a^2 = \frac{2}{3}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad ② \qquad\qquad & \qquad\qquad ③ \end{array} \\ \mathbf{K^2} = & \left[\begin{array}{rr} -1.055555556 & 1.722222222 \\ 1.722222222 & -1.055555556 \end{array}\right] \begin{array}{c} ② \\ ③ \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{p}^2 = \left[\begin{array}{c} 3.358024674 \\ 3.358024687 \end{array}\right] \begin{array}{c} ② \\ ③ \end{array}$$

$$\mathbf{p}_b^2 = \left[\begin{array}{r} -u^{2\prime}(0) \\ u^{2\prime}(l^2) \end{array}\right] \begin{array}{c} ② \\ ③ \end{array}$$

Element 3 $a^3 = \frac{4}{3}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad ③ \qquad\qquad & \qquad\qquad ④ \end{array} \\ \mathbf{K^3} = & \left[\begin{array}{rr} -1.055555556 & 1.722222222 \\ 1.722222222 & -1.055555556 \end{array}\right] \begin{array}{c} ③ \\ ④ \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{p}^3 = \left[\begin{array}{c} 3.555555544 \\ 3.753086412 \end{array}\right] \begin{array}{c} ③ \\ ④ \end{array}$$

$$\mathbf{p}_b^3 = \left[\begin{array}{r} -u^{3\prime}(0) \\ u^{3\prime}(l^3) \end{array}\right] \begin{array}{c} ③ \\ ④ \end{array}$$

Teraz przystępujemy do agregacji macierzy i wektorów

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \qquad ① \qquad\qquad & \qquad ② \qquad\qquad & \qquad ③ \qquad\qquad & \qquad ④ \end{array} \\ \mathbf{K} = & \left[\begin{array}{rrrr} -1.055555556 & 1.722222222 & 0 & 0 \\ 1.722222222 & -2.111111111 & 1.722222222 & 0 \\ 0 & 1.722222222 & -2.111111111 & 1.722222222 \\ 0 & 0 & 1.722222222 & -1.055555556 \end{array}\right] \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{p} = \left[\begin{array}{c} 3.753086419 \\ 6.913580230 \\ 6.913580231 \\ 3.753086420 \end{array}\right] \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}$$

$$\mathbf{p}_b = \begin{bmatrix} -u^{1\prime}(0) = -u'(0) \\ u^{1\prime}(l^1) - u^{2\prime}(0) = 0 \\ u^{2\prime}(l^2) - u^{3\prime}(0) = 0 \\ u^{3\prime}(l^3) = u'(2) \end{bmatrix} \begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{matrix}$$

Stąd mamy układ równań

$$\begin{bmatrix} -1.055555556 & 1.722222222 & 0 & 0 \\ 1.722222222 & -2.111111111 & 1.722222222 & 0 \\ 0 & 1.722222222 & -2.111111111 & 1.722222222 \\ 0 & 0 & 1.722222222 & -1.055555556 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3.753086419 \\ 6.913580230 \\ 6.913580231 \\ 3.753086420 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -u'(0) \\ 0 \\ 0 \\ u'(2) \end{bmatrix}$$

Uwzględniając teraz warunki brzegowe $u(0) = d_1 = 5$ oraz $u'(2) = 2$ nasz układ równań przyjmie formę

$$\begin{bmatrix} -1 & 1.722222222 & 0 & 0 \\ 0 & -2.111111111 & 1.722222222 & 0 \\ 0 & 1.722222222 & -2.111111111 & 1.722222222 \\ 0 & 0 & 1.722222222 & -1.055555556 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3.753086419 \\ 6.913580230 \\ 6.913580231 \\ 3.753086420 - 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -1.055555556 \\ 1.722222222 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie powyższego równia - niewiadome pierwotne:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4.057109995 \\ 3.987568525 \\ 4.845214143 \end{bmatrix}$$

oraz niewiadome wtórne

$$\mathbf{p}_b = \begin{bmatrix} -2.043619209 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Funkcje kształtu są liniowymi funkcjami Lagrange'a i rozwiązanie MES spełnia jedynie podstawowy warunek brzegowy (dla $u'(2) = 1.286468 \neq 2$). Spełnienie naturalnego warunku brzegowego wymagałoby przyjęcia funkcji kształtu Hermita. Zachowując funkcje kształtu Lagrange'a błąd rozwiązania dla pochodnej możemy zmniejszyć zwiększając liczbę elementów skończonych.