POLITECHNIKA KRAKOWSKA im. TADEUSZA KOŚCIUSZKI
WYDZIAŁ INŻYNIERII LĄDOWEJ
INSTYTUT METOD KOMPUTEROWYCH w INŻYNIERII LĄDOWEJ (L-5)

Piotr Pluciński

PRACA DYPLOMOWA

WYBOCZENIE SPRĘŻYSTE BELEK I RAM O PRZEKROJU CIENKOŚCIENNYM

Promotor: dr hab.inż. CZESŁAW CICHOŃ, prof. PK

KRAKÓW - 21.08.1998

Spis treści

1.Wstęp i podstawowe założenia

Analiza stateczności prętów cienkościennych jest ciągle nie rozwiązanym do końca problemem, ważnym dla praktyki inżynierskiej. Jest to widoczne już w najprostszym, lecz najpowszechniejszym przypadku przekroju dwuteowego. W zależności od wielkości smukłości pręta, może wystąpić wyboczenie giętne tzw. zwichrzenie (duża smukłość pręta przy stosunkowo grubych półkach), lub wyboczenie skrętne. Przykładowo, belki stalowe formowane na zimno są bardziej podatne na wyboczenie skrętne niż belki formowane na gorąco ponieważ są one cieńsze. Podobnie, bardziej podatne na wyboczenie skrętne są belki szerokostopowe. Szczególnie ważne jest rozważenie możliwości wyboczenia skrętnego dla belek wykonanych z materiału o wysokiej wytrzymałości. Problem się znacznie komplikuje, gdy konstrukcja jest wykonana z prętów cienkościennych o przekroju otwartym i niesymetrycznym. Wówczas ma miejsce sprzężenie obu opisanych form wyboczenia i dla poprawnego opisu tego zjawiska konieczne jest wyjście poza standardową (liniową) teorię wyboczenia.

Dokładny opis wyboczenia konstrukcji zdyskretyzowanej elementami skończonymi z obrotowymi stopniami swobody wymaga uwzględnienia nieprzemiennego charakteru skończonych obrotów. Jest to ważne w szczególności w geometrycznie nieliniowej analizie konstrukcji cienkościennych, w których wyboczeniu towarzyszą duże przemieszczenia i duże gradienty przemieszczeń.

Z kinematyki wiadomo, że końcowa pozycja ciała sztywnego, poddanego dwóm obrotom skończonym jest zależna od kolejności wykonywania tych obrotów, jeśli tylko osie obrotu są ustalone w przestrzeni i nierównoległe. Powoduje to, że funkcje nieliniowe obrotów nie są w ogólności zdefiniowane w sposób jednoznaczny i są różne dla różnych sekwencji przyłożenia tych obrotów. Konsekwencją tego jest niejednoznaczność nieliniowych równań geometrycznych (związków pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami) i niejednoznaczność funkcjonału całkowitej energii potencjalnej ustroju. W rezultacie macierz sztywności stycznej jest niesymetryczna.

Powyższe trudności nie występują jeśli wprowadzona zostanie definicja tzw. **obrotu półstycznego** (ang. semitangential rotation), zaproponowana przez Argyrisa i wsp.[2], przez analogię do skręcenia półstycznego (w Dodatku 1 zdefiniowano różne typy momentów skręcających).

Zmiana definicji obrotów wymaga również przedefiniowania momentów. Iloczyn macierzy sztywności stycznej przez wektor przemieszczeń, z wykorzystaniem definicji obrotów półstycznych, prowadzi do wektora obciążenia zawierającego tzw. momenty półstyczne. Momenty te są konserwatywne i w konsekwencji macierz sztywności stycznej jest symetryczna.

Termin moment półstyczny można wyjaśnić za Argyrisem w ten sposób, że jest to wektor średni z dwóch wektorów momentów a mianowicie momentu wokół ustalonej osi i momentu śledzącego (dokładniej: jest to połowa zmiany momentu śledzącego, spowodowanej obrotem jego punktu przyłożenia). Należy wyraźnie podkreślić, że chociaż moment wokół ustalonej osi i moment śledzący są niekonserwatywne, to moment półstyczny jest konserwatywny.

W analizie wyboczenia konstrukcji metodą elementów skończonych (MES) istotną rolę odgrywa macierz sztywności geometrycznej. W pracy macierz tą dla elementu cienkościennego wyprowadzono wykorzystując teorię zawartą w artykule Kima i wsp. [5].

Przyjęto, że materiał jest liniowo sprężysty i odkształcenia są małe. Zakłada się też, że stan przedwyboczeniowy przemieszczeń jest pomijalnie mały. Do budowy modelu numerycznego wykorzystano metodę elementów skończonych w sformułowaniu przemieszczeniowym. Zastosowano opis materialny przyjmując tensor odkształcenia Greena-Lagrangea oraz konsekwentnie definicje obrotów i momentów półstycznych.

Przyjęto założenia teorii Własowa prętów cienkościennych o przekroju otwartym [6]:

1. Powierzchnia środkowa pręta deformuje się tak, jakby w płaszczyźnie każdego przekroju poprzecznego rozpostarta była na linii środkowej sztywna tarcza, idealnie jednak wiotka dla deformacji w kierunku prostopadłym do przekroju poprzecznego,
2. Odkształcenia kątowe w punktach powierzchni środkowej są pomijalnie małe,
3. Naprężenia normalne do powierzchni równoległych do powierzchni środkowej są pomijalnie małe w stosunku do dwóch pozostałych naprężeń normalnych.

Powyższe założenia transformują trójwymiarowy problem do problemu jednowymiarowego. Założenie drugie (zwane też założeniem Wagnera) oznacza przyjęcie teorii zginania Eulera-Bernoulliego, ponieważ zaniedbanie naprężeń stycznych implikuje w przypadku zginania, że przekrój poprzeczny pozostaje płaski i normalny do powierzchni środkowej. Liczne weryfikacje doświadczalne, w szczególności założenia Wagnera, wykazały że wymienione założenia są do zaakceptowania dla belek cienkościennych dostatecznie smukłych, w których stosunek długości do szerokości jest większy od 10 [3].

Przy wyprowadzeniu macierzy sztywności elementu skończonego przyjęto, że parametry przemieszczeniowe od deformacji osiowej i momentów zginających są zdefiniowane w osi ciężkości, natomiast parametry pozostałe w środku ścinania (ta nazwa, a nie równorzędnie stosowana w literaturze: środek zginania, będzie używana w pracy). W analizie uwzględniono pełne sprzężenia stanów giętnych i skrętnego, wynikające z niesymetrii przekroju poprzecznego. Przemieszczenie osi pręta interpolowano wielomianem liniowym Lagrange'a natomiast do interpolacji pozostałych przemieszczeń i kąta skręcenia użyto wielomianów sześciennych Hermita.

Praca składa się z 10 rozdziałów i 6 dodatków. W rozdziale drugim zawarto opis pola przemieszczeń i obrotów skończonych. W następnych rozdziałach opisano kolejno: równania geometryczne i siły przekrojowe dla przekroju cienkościennego; całkowitą energię dla elementu skończonego; interpolację pola przemieszczeń; równania równowagi; macierz korekcyjną sztywności (dla dowolnego przyłożenia siły); przykłady wykorzystujące powyższą teorię; podsumowanie, oraz literaturę wykorzystaną przy pisaniu pracy. Dodatki zawierają: opis różnych typów momentów skręcających (qusistyczny, półstyczny i pseudostyczny); wyprowadzenie macierzy liniowej sztywności i sztywności geometrycznej dla różnych typów warunków brzegowych; przykładowe obliczenia charakterystyk geometrycznych przekrojów cienkościennych; wydruki plików do obliczeń macierzy liniowej sztywności (lkim.for) i macierzy geometrycznej sztywności (gkim.for), oraz zbioru danych i fragmentów zbioru wynikowego (dla przykładu 8.1 przyp. 2a).

2.Opis pola przemieszczeń i obrotów skończonych

Przemieszczenie całkowite $\underline{U}$ punktu przekroju poprzecznego jest sumą przemieszczeń liniowych (translacyjnych) $\underline{U}_o$ i przemieszczeń od obrotu $\left(\underline{X}-\underline{X}_o\right)$

$$\underline{U}=\underline{U}_o+\left(X-\underline{X}_o\right), \tag{1}$$

gdzie:

$\underline{X}_o, \underline{X}$ - wektory wodzące punktu w konfiguracji początkowej i aktualnej.

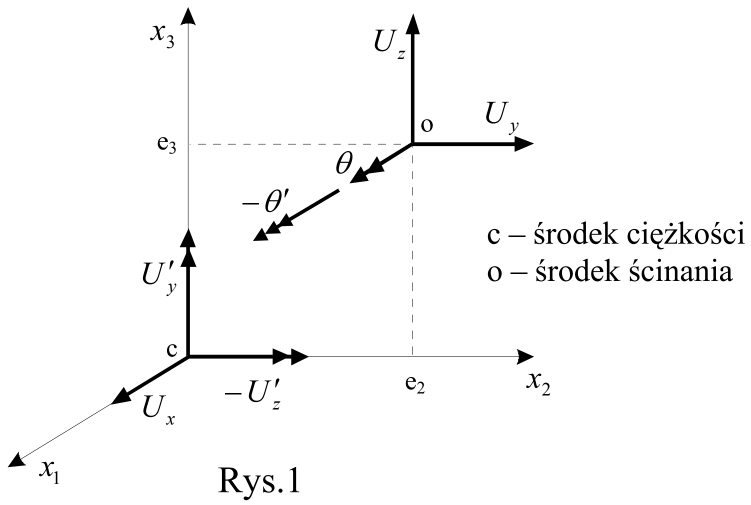
W wektorze $\underline{U}_o$ zawarte są przemieszczenia przekroju poprzecznego jako ciała sztywnego i przemieszczenia spaczenia tak, że wektor ten ma współrzędne w formie:

$$\underline{U}_o=\left\{U_x-\theta'\cdot\phi, U_y, U_z\right\}, \tag{2}$$

gdzie:

θ - kąt skręcenia,

$\phi(x_2, x_3)$ - funkcja spaczenia.



Rys.1

Przyjęte miary przemieszczeń, układ współrzędnych głównych centralnych (x_1,x_2,x_3) przekroju poprzecznego oraz położenia środków ciężkości i ścinania pokazano na Rys.1 U_x, U_y, U_z są przemieszczeniami liniowymi sztywnego przekroju w kierunku x_1 środka ciężkości i w kierunku x_2 i x_3 środka ścinania. $\theta, -U'_z, U'_y$ są sztywnymi obrotami wokół odpowiednio osi środka ścinania i osi x_2 oraz x_3. θ' jest parametrem definiującym spaczenie przekroju poprzecznego a górny przecinek oznacza różniczkowanie względem x_1. Należy zauważyć, że przemieszczenia $U_x, U_y, U_z \; i \, \theta$ są funkcjami tylko x_1.

W literaturze wykazano, że w analizie stateczności konstrukcji istotną rolę odgrywa uwzględnienie przemieszczeń od skończonych obrotów [4,8,9].

Wektor obrotów skończonych $\underline{\omega}$ jest zdefiniowany przez wielkość obrotu $\omega = \| \underline{\omega} \|$ i oś obrotu (lub kierunek w przestrzeni) $\underline{p} = \underline{\omega} / \| \underline{\omega} \|$. Fizykalnie, obrót $\underline{\omega}$ jest interpretowany jako obrót o ω radianów wokół osi $\underline{p}$. Dla matematycznego opisu obrotów skończonych wykorzystano wektor obrotów $\underline{\omega}$ do definicji macierzy obrotów. W tym celu, najpierw zdefiniowano macierz skośnie symetryczną $\underline{S}$ związaną z $\underline{\omega}$ za pomocą relacji [1] :

$$\underline{S} \cdot \underline{\omega} = \underline{0} \qquad i \qquad \underline{S} \cdot \underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{v} \qquad dla \; \forall \, \underline{v} . \tag{3}$$

Oznaczając współrzędne wektora $\underline{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$[1] macierz $\underline{S}$ przyjmie postać:

[1] Przyjęto oznaczenia: […] – dla macierzy jednowierszowej, {…}- dla macierzy jednokolumnowej

$$\underline{S}=\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Z algebry liniowej wiadome jest, że macierz obrotu $\underline{C}$, która produkuje skończony obrót ω, jest funkcją wykładniczą macierzy skośnie symetrycznej $\underline{S}$:

$$\underline{C}=\exp\underline{S}=\underline{I}+\underline{S}+\frac{1}{2!}\underline{S}^2+\dots \ . \tag{5}$$

Macierz $\underline{C}$ jest macierzą ortogonalną, tzn. $\underline{C}^{-1}=\underline{C}^{T}$. W dalszym ciągu ograniczono się do uwzględnienia we wzorze na $\underline{C}$ tylko dwóch pierwszych składników sumy (5).

Całkowity obrót skończony wyrażono jako złożenie nieskończenie małych obrotów $(\omega_1/n, \omega_2/n, \omega_3/n)$, gdzie n jest dużą liczbą całkowitą, co można zapisać w postaci wzoru:

$$\underline{C}_n=\Delta\underline{C}_n\cdot\Delta\underline{C}_{n-1}\cdot\ldots\cdot\Delta\underline{C}_1 \ , \tag{6}$$

lub w formie rekurencyjnej:

$$\underline{C}_n=\Delta\underline{C}_n\cdot\underline{C}_{n-1} \ . \tag{7}$$

Należy podkreślić, że $\Delta\underline{C}\cdot\underline{C}$, które jest interpretowane jako nałożenie skończonego obrotu $\Delta\underline{C}$ na skończony obrót $\underline{C}$, jest różne od $\underline{C}\cdot\Delta\underline{C}$, interpretowanego jako nałożenie skończonego obrotu $\underline{C}$ na skończony obrót $\Delta\underline{C}$ (brak przemienności).

Wykorzystując liniową część macierzy obrotu $\underline{C}$, transformacja wektora początkowego X_o przekroju cienkościennego spowodowaną małym, lecz skończonym obrotem wyraża się wzorem:

$$\underline{X}_1\cong(\underline{I}+\underline{S}_n)\cdot\underline{X}_o-\underline{A}_n\cdot\underline{E} \ , \tag{8}$$

gdzie:

$$\underline{X}_o=\{0, x_2, x_3\}, \qquad \underline{E}=\{0, e_2, e_3\}, \tag{9a}$$

$$\underline{S}_n=\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3/n & \omega_2/n \\ \omega_3/n & 0 & -\omega_1/n \\ -\omega_2/n & \omega_1/n & 0 \end{bmatrix}, \ \underline{A}_n=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1/n \\ 0 & \omega_1/n & 0 \end{bmatrix}. \tag{9b}$$

Następną transformację wektora X_1 oblicza się wzorem :

$$\underline{X}_2=(\underline{I}+\underline{S}_n)\cdot\underline{X}_1-\underline{A}_n\cdot\underline{E}=(\underline{I}+\underline{S}_n)^2\cdot\underline{X}_o-(\underline{I}+\underline{S}_n)\cdot\underline{A}_n\cdot\underline{E}-\underline{A}_n\cdot\underline{E} \ . \tag{10}$$

W końcu, dla n-tego obrotu otrzymano wzór:

$$\underline{X}_n = \left(\underline{I} + \underline{S}_n\right)^n \cdot \underline{X}_o - \left(\underline{I} + \underline{S}_n\right)^{n-1} \cdot \underline{A}_n \cdot \underline{E} - \ldots - \left(\underline{I} + \underline{S}_n\right) \cdot \underline{A}_n \cdot \underline{E} - \underline{A}_n \cdot \underline{E}\,. \tag{11}$$

Stosując teraz do wzoru (11) twierdzenie o rozkładzie dwumianu i pomijając wyrazy wyższego rzędu niż dwa, wzór na X_n przyjmie postać:

$$\underline{X}_n \cong \left[\underline{I} + n\,\underline{S}_n + \frac{n(n-1)}{2}\underline{S}_n^2\right] \cdot \underline{X}_o - n\,\underline{I}\,\underline{A}_n\,\underline{E} - (1+2+\ldots+n-1)\,\underline{S}_n\,\underline{A}_n\,\underline{E}\,. \tag{12}$$

Dla n dążącego do nieskończoności X_n zmierza do X określającego końcową pozycję wektora X_o na skutek obrotów ω_1, ω_2 i ω_3.

$$\lim_{n\to\infty} \underline{X}_n = \underline{X} = \left(\underline{I} + \underline{S} + \tfrac{1}{2}\underline{S}^2\right) \cdot \underline{X}_o - \left(\underline{I} + \tfrac{1}{2}\underline{S}\right) \cdot \underline{A} \cdot \underline{E}\,, \tag{13}$$

gdzie S jest w postaci (4) a macierz A ma formę :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1 \\ 0 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Podstawienie (13) do wzoru (1) prowadzi do końcowego wzoru dla opisu całkowitego pola przemieszczeń przekroju cienkościennego:

$$\underline{U} = \underline{U}_o + \left(\underline{S} + \underline{\tfrac{1}{2}\underline{S}^2}\right) \cdot \underline{X}_o - \left(\underline{I} + \underline{\tfrac{1}{2}\underline{S}}\right) \cdot \underline{A} \cdot \underline{E} \tag{15}$$

Wektor U we wzorze (15) jest sumą wektorów od przemieszczeń translacyjnych i obrotów. Wektor obrotu z kolei jest złożony z części liniowej i kwadratowej (wyrazy podkreślone). W dalszej części pracy przemieszczenia związane z częścią kwadratową tych przemieszczeń oznaczono gwiazdką tak, że współrzędne wektora U można zapisać w formie:

$$\underline{U} = \left\{U_1 + U_1^*,\, U_2 + U_2^*,\, U_3 + U_3^*\right\}. \tag{16}$$

3. Równania geometryczne i siły przekrojowe

Przyjmując, że przekrój poprzeczny jest sztywny ze względu na deformację w swojej płaszczyźnie tzn. $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = 0$, przemieszczenia dowolnego punktu przekroju cienkościennego otrzymano rozpisując wzór (15):

$$\begin{aligned} U_1(x_1,x_2,x_3) &= \underline{U}_x - \underline{U'}_z\, x_3 - \underline{U'}_y\, x_2 - \underline{\theta'}\phi \\ U_2(x_1,x_2,x_3) &= \underline{U}_y - \underline{\theta}(x_3 - e_3) \\ U_3(x_1,x_2,x_3) &= \underline{U}_z + \underline{\theta}(x_2 - e_2) \end{aligned} \tag{17}$$

oraz

$$\begin{aligned} U_1^*(x_1,x_2,x_3) &= \tfrac{1}{2}\left[-\underline{\theta}\,\underline{U'}_z\,(x_2 - e_2) + \underline{\theta}\,\underline{U'}_y\,(x_3 - e_3)\right] \\ U_2^*(x_1,x_2,x_3) &= \tfrac{1}{2}\left[-\left(\underline{\theta}^2 + \underline{U'}^2_y\right)x_2 - \underline{U'}_z\,\underline{U'}_y\, x_3 + \underline{\theta}^2\, e_2\right]. \\ U_3^*(x_1,x_2,x_3) &= \tfrac{1}{2}\left[-\underline{U'}_z\,\underline{U'}_y\, x_2 - \left(\underline{\theta}^2 + \underline{U'}^2_z\right)x_3 + \underline{\theta}^2\, e_3\right] \end{aligned} \tag{18}$$

Pole odkształceń zdefiniowano przyjmując tensor odkształceń Greena-Lagrangea'a w postaci:

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left[\left(U_i + U_i^*\right)_{,j} + \left(U_j + U_j^*\right)_{,i} + \left(U_k + U_k^*\right)_{,i}\left(U_k + U_k^*\right)_{,j}\right], \tag{19}$$

gdzie dolny przecinek oznacza różniczkowanie po współrzędnych przestrzennych (x_1, x_2, x_3). Rozdzielając odkształcenia na część liniową i kwadratową względem gradientów przemieszczeń otrzymano wzór przybliżony:

$$\varepsilon_{ij} \cong e_{ij} + \eta_{ij} + e_{ij}^*\ , \tag{20}$$

gdzie:

$$e_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(U_{i,j} + U_{j,i}\right), \qquad \eta_{ij} = \tfrac{1}{2}U_{k,i}\,U_{k,j}\ , \qquad e_{ij}^* = \tfrac{1}{2}\left(U_{i,j}^* + U_{j,i}^*\right) \tag{21}$$

Podstawienie wzorów (17) i (18) do (21) prowadzi do kompletu równań geometrycznych w formie:

$$\begin{aligned} e_{11} &= U_{1,1} = \underline{U'}_x - \underline{U''}_z x_3 - \underline{U''}_y\, x_2 - \underline{\theta''}\phi \\ 2e_{12} &= U_{1,2} + U_{2,1} = -\underline{\theta'}\phi_{,2} - \underline{\theta'}(x_3 - e_3) \\ 2e_{13} &= U_{1,3} + U_{3,1} = -\underline{\theta'}\phi_{,3} - \underline{\theta'}(x_2 - e_2) \end{aligned} \tag{22}$$

$$
\begin{aligned}
2\eta_{11} &= U_{2,1}^2 + U_{3,1}^2 = \left(\underline{U'}_y - \underline{\theta'}(x_3 - e_3)\right)^2 + \left(\underline{U'}_z - \underline{\theta'}(x_2 - e_2)\right)^2 \\
2\eta_{12} &= U_{1,1}U_{1,2} + U_{2,1}U_{2,2} + U_{3,1}U_{3,2} \\
&= \left(\underline{U'}_x - \underline{U''}_z x_3 - \underline{U''}_y x_2 - \underline{\theta''}\phi\right)\left(-\underline{U'}_y - \underline{\theta'}\phi_{,2}\right) + \left(\underline{U'}_z + \underline{\theta'}(x_2 - e_2)\right)\underline{\theta} \\
2\eta_{13} &= U_{1,1}U_{1,3} + U_{2,1}U_{2,3} + U_{3,1}U_{3,3} \\
&= \left(\underline{U'}_x - \underline{U''}_z x_3 - \underline{U''}_y x_2 - \underline{\theta''}\phi\right)\left(-\underline{U'}_z - \underline{\theta'}\phi_{,3}\right) - \left(\underline{U'}_y + \underline{\theta'}(x_3 - e_3)\right)\underline{\theta}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
e_{11}^* &= U_{1,1}^* = \tfrac{1}{2}\left[-(\underline{\theta}\underline{U'}_z)'(x_2 - e_2) + (\underline{\theta}\underline{U'}_y)'(x_3 - e_3)\right] \\
2e_{12}^* &= U_{1,2}^* + U_{2,1}^* = -\tfrac{1}{2}\left[\underline{\theta}\underline{U'}_z + (\underline{\theta}^2 + \underline{U'}_y^2)' x_2 + (\underline{U'}_z\underline{U'}_y)' x_3 - \underline{\theta'}^2 e_2\right] \\
2e_{13}^* &= U_{1,3}^* + U_{3,1}^* = \tfrac{1}{2}\left[\underline{\theta}\,\underline{U'}_y - (\underline{U'}_z\underline{U'}_y)' x_2 - (\underline{\theta}^2 + \underline{U'}_z^2)' x_2 + \underline{\theta'}^2 e_3\right]
\end{aligned}
\tag{24}
$$

We wzorze na η_{11} pominięto $U_{1,1}^2$ jako wielkość małą w porównaniu z pozostałymi składnikami.

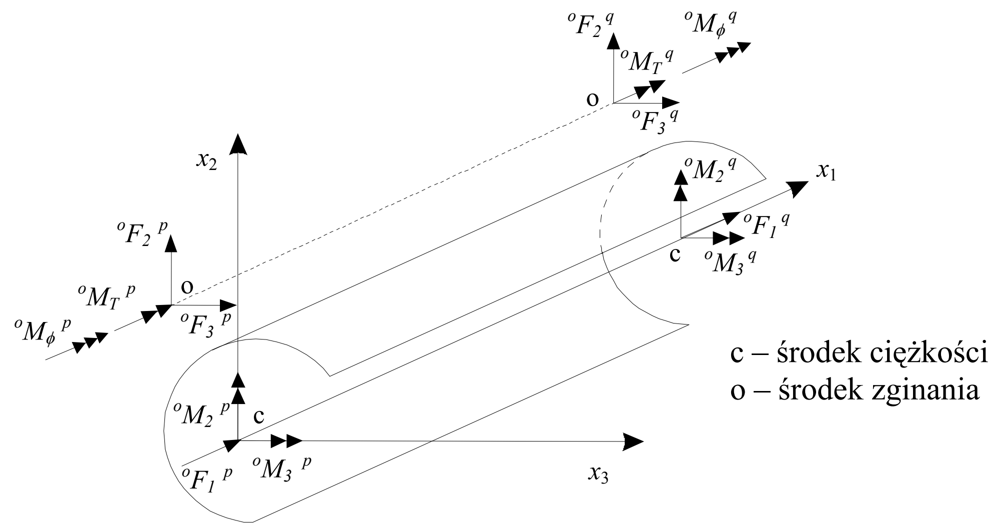
4. Całkowita energia potencjalna elementu cienkościennego

W analizie bifurkacji stanu równowagi rozważa się konstrukcję poddaną wstępnemu stanowi naprężeń. Zakłada się , że nie ma wstępnych przemieszczeń oraz, że konstrukcja jest w samo zrównoważonym stanie równowagi od tych naprężeń wstępnych i wstępnych sił powierzchniowych. Całkowite wielkość przemieszczeń, odkształceń i naprężeń wyrażają wówczas wzory:

$$
\begin{aligned}
{}^tU_i &= U_i + U_i^* \\
{}^t\varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij} \\
{}^t\tau_{ij} &= {}^o\tau_{ij} + \tau_{ij} \\
{}^tT_i &= {}^oT_i + T_i
\end{aligned}
\tag{25}
$$

gdzie górne indeksy *'o'* i *'t'* określają zmienne wstępne (początkowe) i całkowite a brak indeksu oznacza przyrost zmiennej. Odnosząc te oznaczenia do wzorów wyprowadzonych w poprzednich punktach pracy, oznacza to, że występujące tam wielkości są w rzeczywistości przyrostami zmiennych, względem samozrównoważonego stanu równowagi.

Na Rys.2 pokazano rozważany element skończony wraz z wstępnymi siłami przywęzłowymi. Jest to element dwuwęzłowy o 7 stopniach swobody w weźle.



Rys.2

Wektory przemieszczeń U_e i sił wstępnych ${}^{o}F_e$ mają postać :

$$
\begin{aligned}
&\underline{U}_e^T = (\underline{U}^p, \underline{U}^q), \qquad {}^{o}\underline{F}_e = ({}^{o}\underline{F}^p, {}^{o}\underline{F}^q) \\
&\underline{U}^{\alpha T} = \left(U_x^\alpha, U_y^\alpha, U_z^\alpha, \omega_1^\alpha, \omega_2^\alpha, \omega_3^\alpha, f^\alpha\right), \qquad \alpha = p,q \\
&{}^{o}\underline{F}^{\alpha T} = \left({}^{o}F_1^\alpha, {}^{o}F_2^\alpha, {}^{o}F_3^\alpha, {}^{o}M_1^\alpha, {}^{o}M_2^\alpha, {}^{o}M_3^\alpha, {}^{o}M_\phi^\alpha\right), \qquad \alpha = p,q
\end{aligned}
\tag{26}
$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
&\omega_3^p = U_y'(0), \qquad && \omega_3^q = U_y'(L) \\
&\omega_2^p = -U_z'(0), \qquad && \omega_2^q = -U_z'(L)\ . \\
&f^p = -\theta'(0), \qquad && f^q = -\theta'(L)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Siły w elemencie od wstępnego stanu naprężeń wyrażono w funkcji sił przywęzłowych za pomocą wzorów (L – długość elementu):

$$
\begin{aligned}
&{}^{o}F_1 = -{}^{o}F_1^p = {}^{o}F_1^q, \qquad {}^{o}F_2 = -\left({}^{o}M_3^p + {}^{o}M_3^q\right)/L, \qquad {}^{o}F_3 = \left({}^{o}M_2^p + {}^{o}M_2^q\right)/L \\
&{}^{o}M_2 = -{}^{o}M_2^p + \left({}^{o}M_2^p + {}^{o}M_2^q\right)x_1/L, \qquad {}^{o}M_3 = -{}^{o}M_3^p + \left({}^{o}M_3^p + {}^{o}M_3^q\right)x_1/L \\
&{}^{o}M_T = -{}^{o}M_T^p, \qquad {}^{o}M_\phi = -{}^{o}M_\phi^p + \int_0^{x_1} {}^{o}M_R\, dx_1 \qquad .
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Całkowita energia potencjalna elementu cienkościennego jest sumą energii sprężystej Π_E, energii potencjalnej od naprężeń wstępnych i sił przywęzłowych Π_G oraz energii potencjalnej od przyrostu sił pozawęzłowych $-\Pi_{ext}$:

$$
\Pi = \Pi_E + \Pi_G - \Pi_{ext}\,. \tag{29}
$$

Poszczególne składowe energii Π wyrażają się wzorami:

$$\Pi_E = \tfrac{1}{2}\int_L\int_A \left[\tau_{11}e_{11} + 2\,\tau_{12}e_{12} + 2\,\tau_{13}e_{13}\right]\, dA\, dx_1 \ , \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\Pi_G &= \Pi_{G1} + \Pi_{G2} + \Pi_S \\ &= \int_L\int_A \left[{}^o\tau_{11}\eta_{11} + 2\,{}^o\tau_{12}\eta_{12} + 2\,{}^o\tau_{13}\eta_{13}\right]\, dA\, dx_1 \\ &+ \int_L\int_A \left[{}^o\tau_{11}e^*_{11} + 2\,{}^o\tau_{12}e^*_{12} + 2\,{}^o\tau_{13}e^*_{13}\right]\, dA\, dx_1 \\ &- \int_S \left[{}^oT_1U^*_1 + {}^oT_2U^*_2 + {}^oT_3U^*_3\right] ds \ ,\end{aligned} \tag{31}$$

$$\Pi_{ext} = \tfrac{1}{2}\int_S \left[T_1U_1 + T_2U_2 + T_3U_3\right] ds \ . \tag{32}$$

We wzorze (31) pierwszy składnik Π_{G1} oznacza konwencjonalną energię potencjalną od stanu naprężeń wstępnych podczas gdy drugi składnik Π_{G2} i trzeci Π_S oznaczają odpowiednio energię potencjalną naprężeń wstępnych i wstępnych sił powierzchniowych wynikającą z uwzględnienia wyrażeń rzędu drugiego w definicji obrotów skończonych.

Podstawienie do powyższych wyrażeń równań geometrycznych (22)-(24) oraz definicji sił przekrojowych (zdefiniowanych poniżej wzoru (41)) prowadzi do wzorów:

$$\Pi_E = \tfrac{1}{2}\int_L \left[EAU'^2_x + EI_3U''^2_y + EI_2U''^2_z + GJ\theta'^2 + EI_\phi\theta''^2\right] dx_1 \ , \tag{33}$$

$$\Pi_{ext} = \underline{U}^T_e\,\underline{F}_e \ , \tag{34}$$

gdzie U_e i F_e są wektorami przemieszczeń i sił w węzłach elementu skończonego,

$$\begin{aligned}\Pi_{G1} = \tfrac{1}{2}\int_L &\Big[{}^oF_1\left(U'^2_y + U'^2_z\right) + {}^oM_p\theta'^2 - 2\left({}^oM_2 - e_3\,{}^oF_1\right)U'_y\theta' \\ &-2\left({}^oM_3 - e_2\,{}^oF_1\right)U'_z\theta' + 2\,{}^oF_2U'_z\theta - 2\,{}^oF_3U'_y\theta\Big]\, dx_1 \\ &+ \int_L\int_A \left({}^o\tau_{12}\,x_3\,U''_z\,U'_y + {}^o\tau_{13}\,x_2\,U'_z\,U''_y\right) dA\, dx_1 \\ &+ \int_L\int_A \left({}^o\tau_{12}\,x_2\,U''_y\,U'_y + {}^o\tau_{13}\,x_3\,U'_z\,U''_z\right) dA\, dx_1 \\ &+ \int_L\int_A \left[{}^o\tau_{12}\left(x_2 - e_2\right) + {}^o\tau_{13}\left(x_3 - e_3\right)\right]\left(\theta'\theta\right) dA\, dx_1 \ ,\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{G2} = \tfrac{1}{2}\int_L &\Big[\left({}^oM_2 - {}^oF_1e_3\right)\left(\theta U'_z\right)' + \left({}^oM_3 + {}^oF_1e_2\right)\left(\theta U'_y\right)' - {}^oF_2\theta U'_z + {}^oF_3\theta U'_y\Big] dx_1 \\ &-\tfrac{1}{2}\int_L\int_A \left({}^o\tau_{13}\,x_2 + {}^o\tau_{12}\,x_3\right)\left(U'_z\,U'_y\right) dA\, dx_1 \\ &-\int_L\int_A \left({}^o\tau_{12}\,x_2\,U''_y\,U'_y + {}^o\tau_{13}\,x_3\,U'_z\,U''_z\right) dA\, dx_1 \\ &-\int_L\int_A \left[{}^o\tau_{12}\left(x_2 - e_2\right) + {}^o\tau_{13}\left(x_3 - e_3\right)\right]\left(\theta'\,\theta\right) dA\, dx_1 \,.\end{aligned} \tag{36}$$

gdzie pominięto wyrażenia sprzężone z przemieszczeniem U_x. Wykorzystując teraz definicję dla wstępnego momentu skręcającego ${}^oM_T$ i dodając do siebie Π_{G1} i Π_{G2} otrzymano:

$$\begin{aligned}\Pi_{G1}+\Pi_{G2} = \tfrac{1}{2}\int_L \Big[& {}^{o}F_1\left(U'^2_y + U'^2_z\right) + {}^{o}M_p\,\theta' + {}^{o}M_T\left(U'_z U''_y - U''_z U'_y\right) \\ & + \left({}^{o}M_2 - e_3\,{}^{o}F_1\right)\left(U''_y\,\theta - U'_y\,\theta'\right) + \left({}^{o}M_3 - e_2\,{}^{o}F_1\right)\left(U''_z\,\theta - U'_z\,\theta'\right) \\ & + {}^{o}F_2\,U'_z\,\theta - {}^{o}F_3\,U'_y\,\theta + \left({}^{o}F_3\,e_2 - {}^{o}F_2\,e_3\right)\left(U'_z U''_y - U''_z U'_y\right)\Big]\,dx_1 \;. \end{aligned} \tag{37}$$

Przyjmując następnie, że siła ${}^{o}F_1$ jest przyłożona w środku ciężkości a siły ${}^{o}F_2$ i ${}^{o}F_3$ w środku ścinania, energia potencjalna Π_S wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned}\Pi_S &= -\left[\int_A \left\{ {}^{o}F_1\,\delta(x_2,x_3)\,U^*_1 + \left({}^{o}F_2\,U^*_2 + {}^{o}F_3\,U^*_3\right)\delta(x_2-e_2, x_3-e_3)\right\} dA\right]_0^L \\ &= \tfrac{1}{2}\left[{}^{o}F_1\left(e_3\,\theta U'_y - e_2\,\theta U'_z\right) + {}^{o}F_2\left(e_2\,U'^2_y + e_3\,U'_z U'_y\right) + {}^{o}F_3\left(e_2\,U'_z U'_y + e_3\,U'^2_z\right)\right]_0^L \;, \end{aligned} \tag{38}$$

gdzie $\delta(x_2, x_3)$ jest funkcją Diraca.

Powyższe wyrażenie upraszcza się przy założeniu, że siły osiowa i poprzeczne są stałe wzdłuż długości elementu skończonego:

$$\Pi_S = \tfrac{1}{2}\int_L \left[{}^{o}F_1\,(e_3\,\theta U'_y - e_2\,\theta U'_z)' + {}^{o}F_2\,(e_2\,U'^2_y + e_3\,U'_z U'_y)' + {}^{o}F_3\,(e_2\,U'_z U'_y + e_3\,U'^2_z)'\right] dx_1 . \tag{39}$$

W końcu, sumując równania (37) i (39) wyrażenie na Π_G ma postać:

$$\begin{aligned}\Pi_G &= \Pi_{G1} + \Pi_{G2} + \Pi_S \\ &= \tfrac{1}{2}\int \Big[{}^{o}F_1\left(U'^2_y + U'^2_y + 2\,e_3\,U'_y\,\theta' - 2\,e_2\,U'_z\,\theta'\right) + {}^{o}M_P\,\theta'^2 \\ &\quad + {}^{o}F_2\,U'_z\,\theta - {}^{o}F_3\,U'_y\,\theta + {}^{o}M_T\left(U'_z U''_y - U''_z U'_y\right) \\ &\quad + {}^{o}M_2\left(U''_y\,\theta - U'_y\,\theta'\right) + {}^{o}M_3\left(U''_z\,\theta - U'_z\,\theta'\right) \\ &\quad + 2\,{}^{o}F_2\,e_3\,U''_z U'_y + 2\,{}^{o}F_3\,e_2\,U''_y\,U'_z \\ &\quad + 2\,{}^{o}F_2\,e_2\,U''_y\,U'_y + 2\,{}^{o}F_3\,e_3\,U''_z\,U'_z \Big]\,dx_1 \;. \end{aligned} \tag{40}$$

Należy podkreślić, że w powyższym wyrażeniu udział momentów zginających i momentu skręcającego ma formę odpowiadającą momentom półstycznym.

Układ równań różniczkowych rozważanego problemu można otrzymać obliczając wariacje funkcjonału energii (29) ze względu na przemieszczenia uogólnione U_x, U_y, U_z i θ co prowadzi do wyniku:

$$
\begin{aligned}
&(E\,A U_x')' = 0 \\
&(E\,I_3\,U_y'')'' + [-{}^oF_1(U_y' + e_3\,\theta') + \underline{\tfrac{1}{2}\,{}^oM_T\,U_z'' + \tfrac{1}{2}({}^oM_T\,U_z')'} \\
&\qquad + {}^oM_2\,\theta' + \underline{{}^oF_3\,\theta - {}^oF_2 e_3\,U_z'' + {}^oF_2' e_2\,U_y' + ({}^oF_3 e_2\,U_z')'}]' = 0 \\
&(E\,I_2\,U_z'')'' + [-{}^oF_1(U_z' + e_2\;\theta') - \underline{\tfrac{1}{2}\,{}^oM_T\,U_y'' - \tfrac{1}{2}({}^oM_T\,U_y')'} \\
&\qquad \underline{+\,{}^oM_3\;\theta' - {}^oF_2\,\theta - {}^oF_3 e_2\,U_y'' + {}^oF_3' e_3\,U_z' + ({}^oF_2 e_3\,U_y')'}]' = 0 \\
&(E\,I_\phi\,\theta'')'' - (G\,J\,\theta')' + [{}^oF_1\,(e_2\,U_z' - e_3\,U_y') - {}^oM_p\,\theta' \\
&\qquad + {}^oM_2\,U_y' + {}^oM_3\,U_z']' + \underline{{}^oF_2\,U_z' - {}^oF_3\,U_y'} = 0\;,
\end{aligned}
\tag{41}
$$

gdzie :

$^oF_1 = \int_A {}^o\tau_{11} dA$ - siła osiowa,

$^oF_2 = \int_A {}^o\tau_{12} dA, \quad {}^oF_3 = \int_A {}^o\tau_{13} dA$ - siły poprzeczne przyłożone w środku ścinania,

$^oM_2 = \int_A {}^o\tau_{11} x_3\, dA, \quad {}^oM_3 = -\int_A {}^o\tau_{11} x_2\, dA$ - momenty zginające względem osi x_2 i x_3,

$^oM_T = \int_A \left({}^o\tau_{13} x_2 - {}^o\tau_{12} x_3\right) dA + {}^oF_2 e_3 - {}^oF_3 e_2 = {}^oM_{st} + {}^oM_R$ - całkowity moment skręcający względem środka ścinania (suma momentów skrętnego Saint-Venanta i giętno-skrętnego,

$^oM_P = \int_A {}^o\tau_{11} \left[(x_2 - e_2)^2 + (x_3 - e_3)^2\right] dA = \beta_1\, {}^oF_1 + \beta_2\, {}^oF_2 + \beta_3\, {}^oF_3 + \beta_\phi\, {}^oM_\phi$ - siła przekrojowa nazywana w literaturze efektem Wagner,

$^oM_\phi = \int_A {}^o\tau_{11} \phi\, dA$ - bimoment,

$^oM_R = \int_A \left({}^o\tau_{12} \phi_{,2} + {}^o\tau_{13} \phi_{,3}\right) dA$ - moment giętno-skrętny,

$J = \int_A \left[(x_2 - e_2 - \phi_{,2})^2 + (x_3 - e_3 - \phi_{,3})^2\right] dA$ - stała Saint-Venanta,

A – powierzchnia przekroju poprzecznego,

E – moduł Younga,

G – moduł ścinania Kirchhoffa.

Pozostałe definicje parametrów i wielkości przekrojowych są następujące:

$$
\beta_1 = e_2^2 + e_3^2 + \frac{I_2 + I_3}{A}, \qquad \beta_2 = \frac{I_{3r}}{I_2} - 2\,e_3, \qquad \beta_3 = -\frac{I_{2r}}{I_3} + 2\,e_2
$$

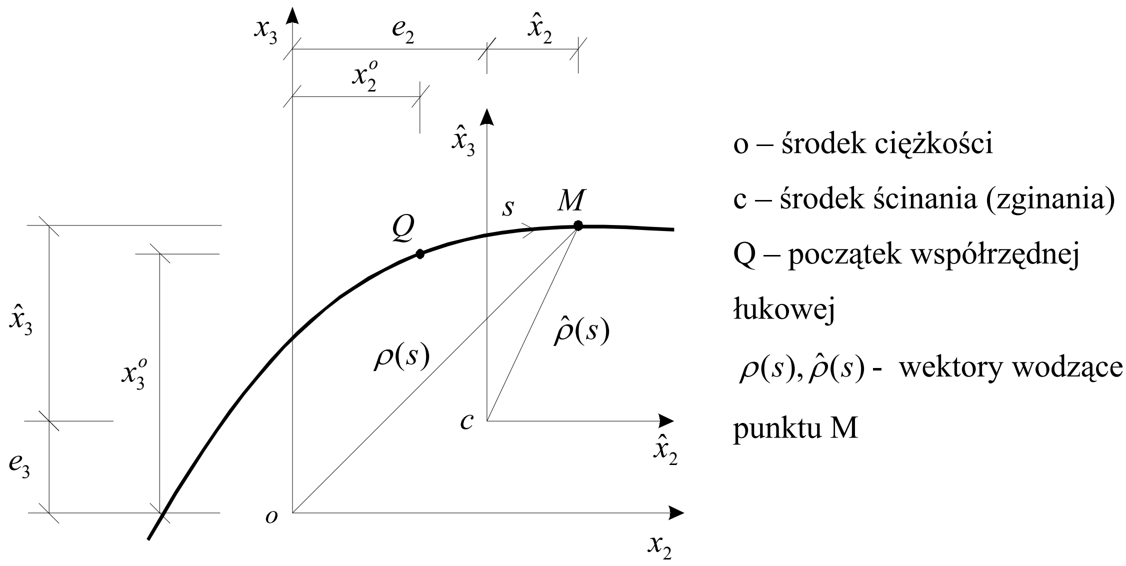
$$
\beta_\phi = \frac{I_{\phi r}}{I_\phi}, \qquad I_\phi = \int_A \phi^2\, dA, \qquad I_{\phi r} = \int_A \phi\, r^2\, dA, \qquad I_{2r} = \int_A x_2\, r^2\, dA
$$

$$
I_{3r} = \int_A x_3\, r^2\, dA, \qquad r^2 = x_2^2 + x_3^2\;,
$$

gdzie:

$\phi(\hat{x}_2,\hat{x}_3)$ - współrzędna wycinkowa dla bieguna w środku ścinania (Rys.3)

$I_2, I_3, I_\phi, I_{\phi r}, I_{2r}, I_{3r}$ - charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego względem osi głównych centralnych (x_2, x_3).



$$x_2 = \hat{x}_2 + e_2, \quad x_3 = \hat{x}_3 + e_3,$$

$$\phi(x_2,x_3) = \int_o^s \rho(s)\,ds = \int_o^s (x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2) = \left(\int_o^s (\hat{x}_2\,d\hat{x}_3 - \hat{x}_3\,d\hat{x}_2)\right) + \int_{x_3^o}^{x_3} e_2 d\hat{x}_3 - \int_{x_2^o}^{x_2} e_3 d\hat{x}_2$$

$$= \phi(\hat{x}_2,\hat{x}_3) + e_2x_3 - e_3x_2 - x_3^o e_2 + x_2^o e_3 = \phi(\hat{x}_2,\hat{x}_3) - (e_3x_2 - e_2x_3) - \phi_o$$

Rys 3

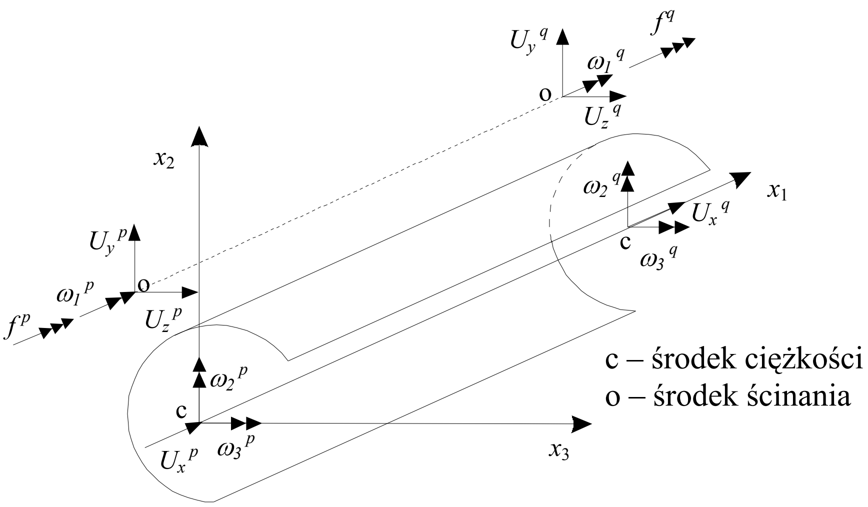
W równaniach (41) podkreślono składniki, które nie występują w równaniach Eulera dla funkcjonału energii potencjalnej, wyprowadzonych w monografii [3]. Natomiast w tamtych równaniach, w równaniu pierwszym występuje dodatkowo składnik $(E\,A\theta'\phi_o)'$ a w równaniu czwartym składnik $(E\,AU'\,\phi_o)''$, których z kolei nie ma w równaniach (41). Parametr $\phi_o = -e_3\,x_2^o + e_2\,x_3^o$, gdzie (x_2^o, x_3^o) są współrzędnymi początku współrzędnej łukowej Q, jest zero tylko dla przekroju symetrycznego, przy przyjęciu początku współrzędnej łukowej na osi symetrii (wówczas zarówno $\int_A \phi\;dA$ jak i ϕ_o są równe zero).

Widoczne jest pełne sprzężenie w trzech ostatnich równaniach (41) wynikające z uwzględnienia efektu drugiego rzędu w analizie skończonych obrotów oraz przyjęcia niesymetrycznego przekroju poprzecznego. Pominięcie tych efektów oraz przyjęcie symetrii przekroju poprzecznego sprowadza ten układ równań do znajomej postaci uproszczonej, ze sprzężeniem skręcenia ze stanem giętnym w jednej płaszczyźnie [3,10]. Układ równań różniczkowych (41) należy uzupełnić o stosowne warunki brzegowe.

5. Interpolacja pola przemieszczeń

Przyjęto interpolację Hermita odpowiadającą różnym możliwym typom warunków brzegowych.

Poniżej zestawiono odpowiednie funkcje kształtu dla różnych warunków brzegowych w węzłach początkowym i końcowym elementu skończonego, Rys.4.



Rys.4

Węzeł początkowy sztywny – węzeł końcowy sztywny H_1 (R-R)

$$H_{11} = 2\,\xi^3 - 3\,\xi^2 + 1 \quad , \qquad H_{12} = (\,\xi^3 - 2\,\xi^2 + \xi\,)\,L\,,$$

$$H_{13} = -\,2\,\xi^3 + 3\,\xi^2 \quad , \qquad H_{14} = (\,\xi^3 - \xi^2\,)\,L\,, \tag{42}$$

Węzeł początkowy sztywny – węzeł końcowy przegubowy H_2 (R-H)

$$H_{21} = (\,\xi^3 - 3\,\xi^2 + 2\,)\,/\,2 \quad , \qquad H_{22} = (\,\xi^3 - 3\,\xi^2 + 2\,\xi\,)\,L\,/\,2\,,$$

$$H_{23} = (\,-\,\xi^3 + 3\,\xi^2\,)\,/\,2 \quad , \qquad H_{24} = 0\,, \tag{43}$$

Węzeł początkowy przegubowy – węzeł końcowy sztywny H_3 (H-R)

$$H_{31} = (\xi^3 - 3\xi + 2) / 2 \quad , \quad H_{32} = 0 \; ,$$
$$H_{33} = (-\xi^3 + 3\xi) / 2 \quad , \quad H_{34} = (\xi^3 - \xi) \, L / 2 \; , \tag{44}$$

Węzeł początkowy przegubowy – węzeł końcowy przegubowy H_4 (H-H)

$$H_{41} = 1 - \xi \quad , \quad H_{42} = 0 \; ,$$
$$H_{43} = \xi \quad , \quad H_{44} = 0, \tag{45}$$

gdzie: $\xi = x_1 / L$

Macierz funkcji kształtu dla zdefiniowanych powyżej typów warunków brzegowych można zapisać w jednolity sposób jako:

$$\underline{H}_i = [H_{i1}, H_{i2}, H_{i3}, H_{i4}], \qquad i=1,2,3,4 \tag{46}$$

Dla przykładu, funkcje interpolacyjne przemieszczeń U_y i U_z dla przypadku węzeł początkowy sztywny – węzeł końcowy sztywny wyrażają wzory:

$$U_y = \underline{H}_1 \overline{\underline{U}}_y, \quad U_z = \underline{H}_2 \overline{\underline{U}}_z \tag{47}$$

a funkcje interpolacyjne kąta obrotu θ dla przypadków węzeł początkowy sztywny – węzeł końcowy sztywny, węzeł początkowy sztywny – węzeł końcowy przegubowy, oraz węzeł początkowy przegubowy – węzeł końcowy przegubowy, mają odpowiednio formę:

$$\theta = \underline{H}_1 \overline{\underline{\theta}}, \qquad \theta = \underline{H}_2 \overline{\underline{\theta}}, \qquad \theta = \underline{H}_4 \overline{\underline{\theta}} \; . \tag{48}$$

Dodatkowo, we wzorach tych przyjęto oznaczenia:

$$\begin{aligned} \overline{\underline{U}}_y &= \{ U_y^p, \omega_3^p, U_y^q, \omega_3^q \}, \\ \overline{\underline{U}}_z &= \{ U_z^p, -\omega_2^p, U_z^q, -\omega_2^q \} \\ \overline{\underline{\theta}} &= \{ \omega_1^p, -f^p, \omega_1^q, -f^q \} \end{aligned} \tag{49}$$

Według powyższego przykładu w Dodatku 2 wyprowadzono macierze liniowe sztywności oraz w Dodatku 3 macierze sztywności geometrycznej dla elementów skończonych zdefiniowanych w Tab.1. W kolumnie drugiej i trzeciej podano przyjęte warunki brzegowe dla zginania i skręcania. Wynikające z tego funkcje kształtu podano w kolumnach czwartej i piątej.

Tabela 1

Typy elementów	Warunki na końcach		Funkcje kształtu	
	Zginanie	Skręcanie	$\overline{U}_y$ i $\overline{U}_z$	$\overline{\theta}$
Element 1	R-R	R-R	$\underline{H}_1$	$\underline{H}_1$
Element 2		R-H		$\underline{H}_2$
Element 3		H-R		$\underline{H}_3$
Element 4		H-H		$\underline{H}_4$
Element 5	R-H	R-R	$\underline{H}_2$	$\underline{H}_1$
Element 6		R-H		$\underline{H}_2$
Element 7		H-R		$\underline{H}_3$
Element 8		H-H		$\underline{H}_4$
Element 9	H-R	R-R	$\underline{H}_3$	$\underline{H}_1$
Element 10		R-H		$\underline{H}_2$
Element 11		H-R		$\underline{H}_3$
Element 12		H-H		$\underline{H}_4$

6. Równanie równowagi elementu cienkościennego.

Macierze sztywności elementu wyprowadzono z równania (29). Wykorzystując w równaniach (33), (34) i (37) wzory interpolacyjne dla przemieszczeń oraz wzory (28), równanie (29) dla całkowitej energii potencjalnej elementu skończonego przyjmie postać:

$$\Pi_e = \tfrac{1}{2}\underline{U}_e^T\left(\underline{k}_o + \underline{k}_g\right)\underline{U}_e - \underline{U}_e^T\,\underline{F}_e\,, \tag{50}$$

gdzie:

$\underline{k}_o$ - macierz liniowa sztywności,

$\underline{k}_g$ - macierz sztywności geometrycznej.

Warunek konieczny minimum energii potencjalnej prowadzi do równania równowagi elementu cienkościennego w lokalnym układzie współrzędnych:

$$\left(\underline{k}_e + \underline{k}_g\right)\underline{U}_e = \underline{F}_e\ . \tag{51}$$

Dla dowolnego położenia elementu w przestrzeni należy zastosować standardową transformację dla globalnego układu współrzędnych dla wszystkich węzłowych przemieszczeń, obrotów, sił i momentów. Nie jest potrzebne specjalne prawo transformacji dla półstycznych momentów i obrotów , ponieważ obrotom podlega układ współrzędnych a nie element skończony.

Transformacja macierzy sztywności elementów konstrukcji zdyskretyzowanej i standardowa agregacja daje w końcu równanie równowagi do sprężystej analizy wyboczenia przestrzennego ram cienkościennych w formie:

$$\left(\underline{K}_O + \lambda\, \underline{K}_G\right)\underline{U} = \underline{F} = \underline{0} \ . \tag{52}$$

W powyższym równaniu algebraicznego problemu własnego globalna macierz sztywności geometrycznej K_G jest obliczona dla wstępnego stanu naprężeń, odpowiadającego przedwyboczeniowemu stanu obciążenia. Parametr λ jest parametrem obciążenia proporcjonalnego a K_O jest globalną macierzą liniową sztywności. W analizie wyboczenia przyjęto, że wstępne siły są przyłożone tylko w węzłach elementów, siły osiowa i poprzeczne oraz moment skręcający są stałe na długości elementu a momenty zginające mają rozkład liniowy.

7. Macierz korekcyjna sztywności

Wyprowadzenie funkcjonału energii potencjalnej wymaga przyjęcia definicji półstycznych momentów zginających i momentu skręcającego co oznacza, że w taki sam sposób powinny być także traktowane momenty węzłowe. Przyjęto też, że siła osiowa działa w środku ciężkości a siły poprzeczne są przyłożone w środku ścinania. Jednakże, obciążenie zewnętrzne może być różne, inne niż założono, np. momenty skupione, mogą nie odpowiadać momentom częściowo stycznym lub siły skupione mogą być przyłożone w dowolnym punkcie przekroju poprzecznego elementu (ang. off-axis loadings). W takich przypadkach koniecznym jest dodatkowe obliczenie tzw. macierzy korekcyjnej sztywności (ang. load correction stiffness marix), która powinna być dodawana do globalnej macierzy sztywności geometrycznej K_G.

W dalszym ciągu wyznaczono dla przykładu macierz korekcyjną sztywności $\underline{K}_{lc}^{off}$ dla sił skupionych ${}^{o}F_1^r$, ${}^{o}F_2^r$, ${}^{o}F_3^r$, przyłożonych w dowolnych punktach przekroju poprzecznego, o współrzędnych odpowiednio $(0,\bar{x}_2,\bar{x}_3),(0,\hat{x}_2,\hat{x}_3)\ i\ (0,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3)$.

W tym celu, wykorzystując równanie (18) napiszemy jeszcze raz wyrażenie na energię Π_S (38), uwzględniając jednakże dowolny sposób przyłożenia sił:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Pi}_S = &-\tfrac{1}{2}\,{}^oF_1^r\left[-\omega_1^r\,\omega_2^r\,e_2-\omega_1^r\,\omega_3^r\,e_3+\underline{\omega_1^r\,\omega_2^r\,\overline{x}_2+\omega_1^r\,\omega_3^r\,\overline{x}_3}\right]\\ &-\tfrac{1}{2}\,{}^oF_2^r\left[-\omega_3^{r\,2}\,e_2+\omega_2^r\,\omega_3^r\,e_3-\underline{\left(\omega_1^{r\,2}+\omega_3^{r\,2}\right)\left(\hat{x}_2-e_2\right)+\omega_2^r\,\omega_3^r\left(\hat{x}_3-e_3\right)}\right],\\ &-\tfrac{1}{2}\,{}^oF_2^r\left[\omega_2^r\,\omega_3^r\,e_2-\omega_2^{r\,2}\,e_3+\underline{\omega_2^r\,\omega_3^r\left(\widetilde{x}_2-e_2\right)-\left(\omega_1^{r\,2}+\omega_2^{r\,2}\right)\left(\widetilde{x}_3-e_3\right)}\right]\end{aligned} \qquad (53)$$

gdzie wyrazy nie podkreślone zostały już uwzględnione we wzorze na Π_G, natomiast podkreślone są korektą wynikającą z wyżej zdefiniowanego dowolnego położenia sił ${}^oF_i^r$, i=1,2,3. Wydzielając te wyrazy otrzymano równanie:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Pi}_{S1} = &-\tfrac{1}{2}\,{}^oF_1^r\left(\omega_1^r\,\omega_2^r\,\overline{x}_2+\omega_1^r\,\omega_3^r\,\overline{x}_3\right)-\tfrac{1}{2}\,{}^oF_2^r\left[-\left(\omega_1^{r\,2}+\omega_3^{r\,2}\right)\left(\hat{x}_2-e_2\right)+\omega_2^r\,\omega_3^r\left(\hat{x}_3-e_3\right)\right]\\ &-\tfrac{1}{2}\,{}^oF_3^r\left[\omega_2^r\,\omega_3^r\left(\widetilde{x}_2-e_2\right)-\left(\omega_1^{r\,2}+\omega_2^{r\,2}\right)\left(\widetilde{x}_3-e_3\right)\right]\end{aligned}, \qquad (54)$$

oraz wyrażenia na pochodne:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{\Pi}_{S1}}{\partial\omega_1} &= -\tfrac{1}{2}\,{}^oF_1^r\left(\omega_2^r\,\overline{x}_2+\omega_3^r\,\overline{x}_3\right)+{}^oF_2^r\omega_1^r\left(\hat{x}_2-e_2\right)+{}^oF_3^r\omega_1^r\left(\widetilde{x}_3-e_3\right)\\ \frac{\partial\widetilde{\Pi}_{S1}}{\partial\omega_2} &= -\tfrac{1}{2}\,{}^oF_1^r\omega_1^r\,\overline{x}_2-\tfrac{1}{2}\,{}^oF_2^r\omega_3^r\left(\hat{x}_3-e_3\right)-\tfrac{1}{2}\,{}^oF_3^r\omega_3^r\left(\widetilde{x}_2-e_2\right)+{}^oF_3^r\omega_2^r\left(\widetilde{x}_3-e_3\right)\\ \frac{\partial\widetilde{\Pi}_{S1}}{\partial\omega_3} &= -\tfrac{1}{2}\,{}^oF_1^r\omega_1^r\,\overline{x}_3+{}^oF_2^r\omega_3^r\left(\hat{x}_2-e_2\right)-\tfrac{1}{2}\,{}^oF_2^r\omega_2^r\left(\hat{x}_3-e_3\right)-\tfrac{1}{2}\,{}^oF_3^r\omega_2^r\left(\widetilde{x}_2-e_2\right).\end{aligned} \qquad (55)$$

Powyższe wzory zapisano w łącznej postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\widetilde{\Pi}_s}{\partial\omega_1}\\ \dfrac{\partial\widetilde{\Pi}_s}{\partial\omega_2}\\ \dfrac{\partial\widetilde{\Pi}_s}{\partial\omega_3}\end{bmatrix} = \underline{K}_{lc}^{off}\cdot\begin{bmatrix}\omega_1^r\\ \omega_2^r\\ \omega_3^r\end{bmatrix}, \qquad (56)$$

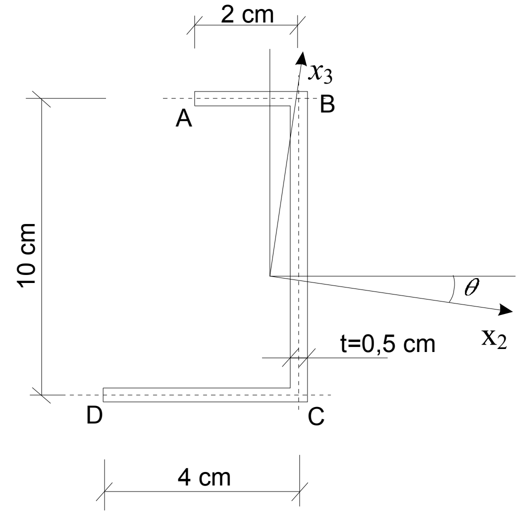
gdzie $\underline{K}_{lc}^{off}$ jest szukaną macierzą korekcyjną sztywności w formie:

$$\underline{K}_{lc}^{off} = \left[\begin{array}{c:c:c} {}^oF_2^r\left(\hat{x}_2-e_2\right)+{}^oF_3^r\left(\widetilde{x}_3-e_3\right) & -\tfrac{1}{2}\,{}^oF_1^r\overline{x}_2 & -\tfrac{1}{2}\,{}^oF_1^r\overline{x}_3\\ \hdashline & {}^oF_3^r\left(\widetilde{x}_3-e_3\right) & \begin{array}{c}-\tfrac{1}{2}\,{}^oF_2^r\left(\hat{x}_3-e_3\right)\\ -\tfrac{1}{2}\,{}^oF_3^r\left(\widetilde{x}_2-e_2\right)\end{array}\\ \hdashline \text{symetria} & & {}^oF_2^r\left(\hat{x}_2-e_2\right)\end{array}\right]. \qquad (57)$$

8. Przykłady

8.1. Wyboczenie belki wspornikowej o przekroju niesymetrycznym.

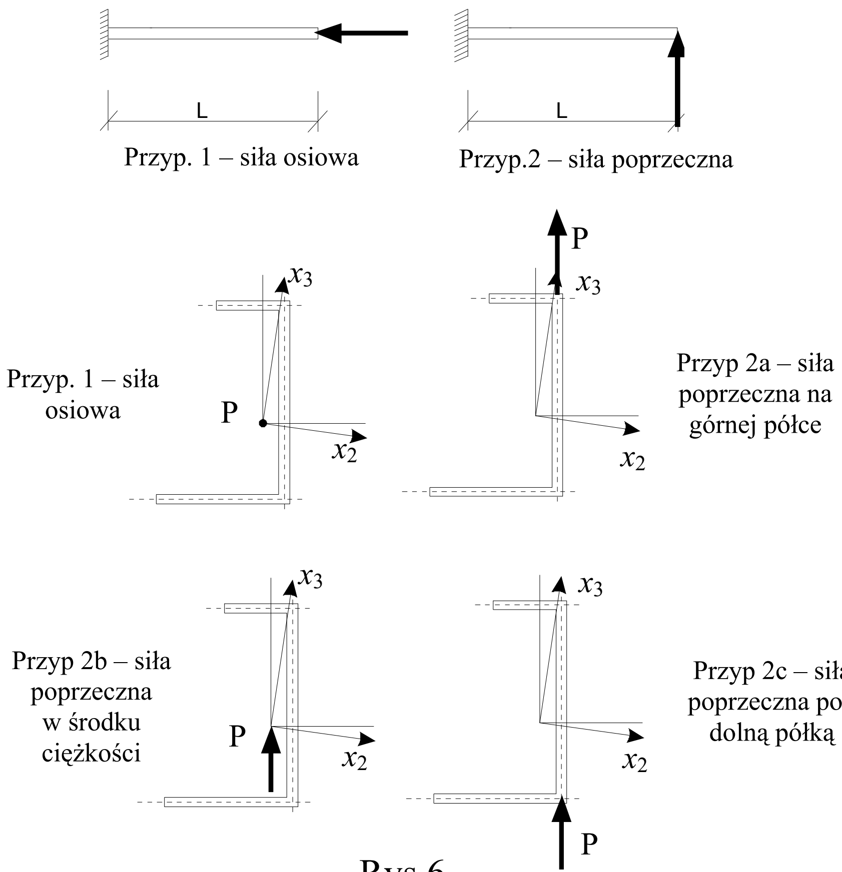
Analizowaną belkę pokazano na Rys.5. Charakterystykę geometryczną niesymetrycznego przekroju cienkościennego obliczono w Dodatku 4. Rys. 6 przedstawia 4 przypadki



ϕ = 0,111609 rad , t = 0,5 cm
L = 200 cm , A = 8 cm^2
I_2 = 114,935057 cm^4 , I_3 = 7,648277 cm^4
I_ϕ = 70,949543 cm^6 , I_S = 0,666667 cm^4
e_2 = 1,587107 cm , e_3 = -2,480012 cm
β_2 = 5,475529 cm , β_3 = 10,968889 cm
β_ϕ = -0,494190 cm

E = 30 000 N/cm^2
G = 11 500 N/cm^2

Rys.5



Rys.6

obciążenia wspornika. Wyniki obliczeń zestawiono w Tab. 2.

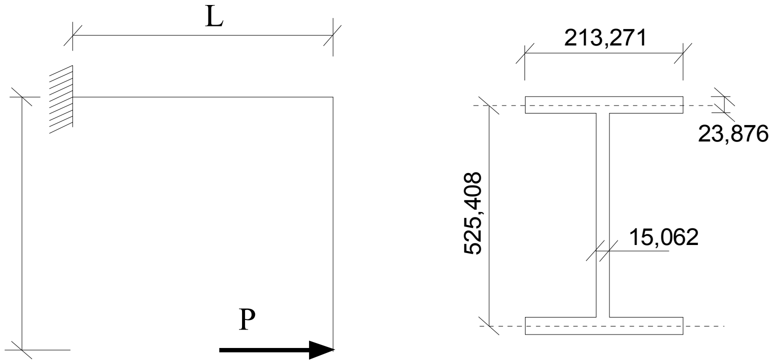
Tabela 2

Liczba elementów	Przypadek						
	1	2a		2b		2c	
Manka 10	13,992	4,6080	-4,3506	4,1986	-5,9596	3,6927	-6,9126
Manka 16	13,992	4,6091	-4,3474	4,1996	-5,9544	3,6936	-6,9062
[5] 10	13,9016	4,54538	-4,36282	4,14622	-5,98469	3,65388	-6,94813
ABAQUS	14,023	4,5127	-4,2500	4,1086	-5,8933	3,6001	-6,8629
ROBOT	22,420	4,5908	-2,7186	3,9202	-3,3199	3,3489	-3,7799

Obliczenia wykonano przyjmując 10 i 16 elementów skończonych za pomocą programu MANKA. W wierszu trzecim podano wyniki z pracy [5], w wierszu czwartym obliczenia za pomocą systemu ABAQUS (element serendipowski, 8 węzłowy o 5 stopniach swobody w węźle, ze zredukowanym całkowaniem – S8R5). W ostatnim wierszu podano wyniki obliczeń systemem ROBOTV6 v. 4.25 (element powłokowy 4 węzłowy, o 6 stopniach swobody w węźle [7]). Są one porównywalne z innymi wynikami zawartymi w Tab.2 dla dodatniego zwrotu obciążenia, ale całkowicie jednak różne dla ujemnego zwrotu. O fakcie tym poinformowano firmę RoboBAT, która podjęła pracę nad dalszym testowaniem powłokowego elementu skończonego.

8.2. Wyboczenie ramy kątowej o przekroju dwuteowym

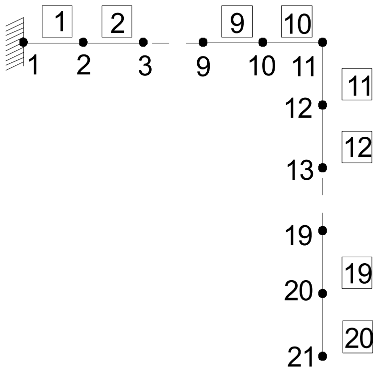
Obliczoną ramę przedstawiono na Rys. 7a, gdzie podano też odpowiednie charakterystyki geometryczne, a na Rys. 7b pokazano sposób dyskretyzacji ramy 20 elementami skończonymi.



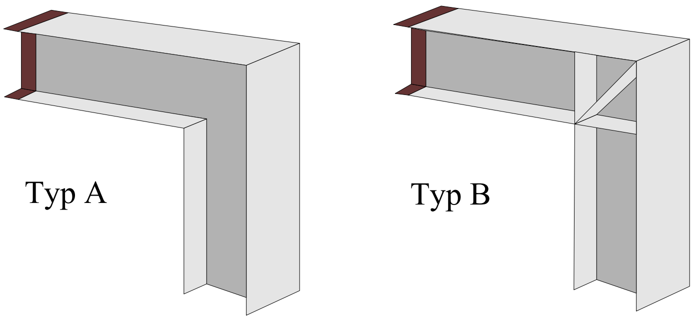
$L = 6096$ mm
$A = 17612.868$ mm^2
$I_y = 8.616 \mathrm{x} 10^8$ mm^4
$I_z = 3.867 \mathrm{x} 10^7$ mm^4
$I_s = 2.510$ mm^4
$I_\phi = 2.669 \mathrm{x} 10^{12}$ mm^6

$E = 199948$ MPa
$G = 76904.2$ MPa

Rys.7a



Rys.7b



Rys.7c

Obliczenia wykonano trzema metodami:

Metoda 1 – element nr 10 jest Elementem 2 (typu R-R dla zginania i R-H dla skręcania), natomiast pozostałe elementy Elementem 1 (typu R-R dla skręcania i zginania) (patrz Tab.1),

Metoda 2 – wszystkie elementy są Elementami 1,

Metoda 3 – jest taka sama jak metoda 2 z dodatkowym unieruchomieniem więzu umożliwiającego deplanację przekroju końcowego w elemencie nr 10.

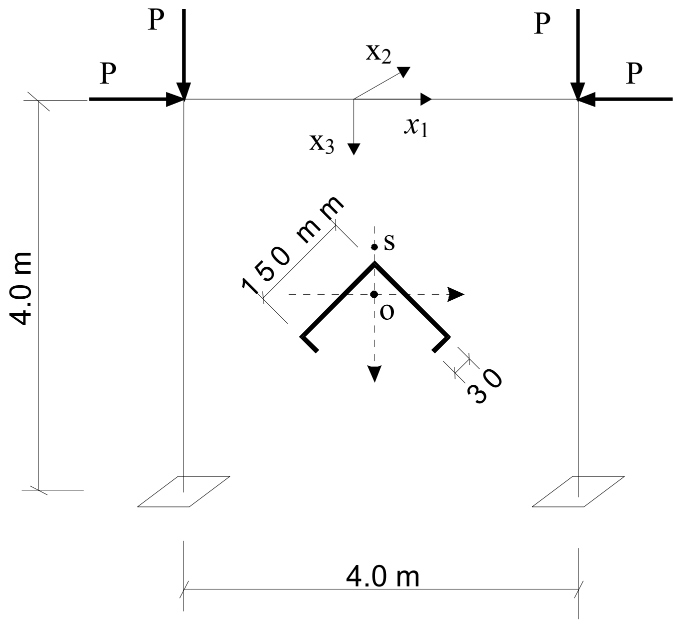
Tabela 3

Liczba elementów	Metoda 1		Metoda 2		Metoda 3	
Manka 20	-52,365	59,047	-59,660	65,414	-69,130	80,605
[5] 20	-52,3631	59,0443	-59,6577	65,4115	-69,1285	80,6035
ABAQUS	Typ A P_{cr} = -50,6074 58,4318 Typ B P_{cr} = -66,3496 78,1997					

Wyniki obliczeń zestawiono w Tab.3. Rezultaty obliczeń za pomocą systemu MANKA i z pracą [1] są bliskie sobie. Porównując te wyniki z wynikami z ABAQUSA jest widoczna zgodność obliczeń Metodą 1 z obliczeniami ABAQUSA dla węzła ramy Typu A (Rys.7c) i Metody 3 z obliczeniami ABAQUSA dla węzła ramy Typu B.

8.3 Wyboczenie z płaszczyzny ramy portalowej przekroju monosymetrycznego.

Obliczeń tej ramy wykonano w celu porównania obliczeń z danymi z [11]. W monografii tej podane są wzory na macierz sztywności geometrycznej $\underline{k}_g$ (14,14) , które są częściowo różne od wzorów wyprowadzonych w Dodatku 3. W elementach oznaczonych w monografii B20, B21, B22 (a w Dodatku 3 jako C10, C25, C26) zamiast współczynnika 0,9 jest 0,4, a ponadto dodatkowo niezerowe elementy oznaczone jako B2, B4, B8. W obecnych obliczeniach uwzględniono sposób przyłożenia obciążenia uwzględniając fakt, że obciążenie osiowe przyłożone w środku ciężkości dla elementu rygla jest obciążeniem poprzecznym dla elementu słupa, co wymaga obliczenia macierzy korekcyjnej sztywności (i odwrotnie).



$t = 10$ mm
$A = 36\ cm^2$
$I_2 = 1675{,}5\ cm^4$, $I_3 = 487{,}5\ cm^4$
$I_\phi = 3130{,}108\ cm^6$, $I_S = 12\ cm^4$
$e_2 = -7{,}099$ cm , $e_3 = 0$ cm
$\beta_2 = 0$ cm , $\beta_3 = -27{,}572$ cm
$\beta_\phi = 0$ cm

$E = 7\ 200\ kN/cm^2$
$G = 2\ 665\ kN/cm^2$

Rys.8

Tabela 4

Elementy	Obciążenie słupów i rygla		Obciążenie tylko dla słupów	
	Postać antysymetryczna	Postać symetryczna	Postać antysymetryczna	Postać symetryczna
Siła w środku ciężkości przekroju	20,412	55,362	55,349	53,663
Siła w środku ścinania przekroju	20,381	53,442	54,228	53,443
[11] BSB4	20,99	53,99	55,37	53,99
[11] BSV1	22,53	53,37	58,23	53,39

Obliczoną ramę pokazano na Rys.8, wraz z charakterystykami przekroju poprzecznego obliczonymi w Dodatku 4. Wyniki obliczeń dla 24 elementów skończonych zestawiono w Tab.4 dla dwóch przypadków przyłożenia obciążenia, a mianowicie w środku ciężkości i w środku zginania (dwa pierwsze wiersze). W wierszu od trzeciego do czwartego podano wyniki obliczeń z [11] otrzymane za pomocą elementu BSB4, BSV1 (8 elementów skończonych).

9. Zakończenie

W pracy, wykorzystując założenia Własowa, sformułowano i rozwiązano problem wyboczenia belek i ram sprężystych o dowolnym cienkościennym przekroju otwartym. Przy obliczaniu macierzy sztywności geometrycznej uwzględniono w wyrażeniu na całkowitą energię potencjalną półstyczny charakter momentów oraz włączono do opisu pola przemieszczeń wyrazy rzędu drugiego od obrotów skończonych. Wyprowadzenie macierzy korekcyjnej sztywności pozwoliło uwzględnić dowolny sposób przyłożenia obciążenia w węzłach zdyskretyzowanej konstrukcji (poza środkiem ciężkości – w przypadku siły osiowej i poza środkiem ścinania – w przypadku sił poprzecznych).

Pole przemieszczeń interpolowano za pomocą wielomianów Hermita, rozważając cztery typy warunków brzegowych (węzły elementów sztywne lub przegubowe dla zginania i skręcania). Na tej podstawie wyprowadzono macierze liniowe sztywności i odpowiadające im macierze sztywności geometrycznej dla 12 typów elementów skończonych. Niektóre z tych elementów wykorzystano w trzech przykładach otrzymując dobrą zgodność wyników z danymi z literatury, oraz z obliczeniami wykonanymi systemem ABAQUS, przy przyjęciu dyskretyzacji przestrzennej elementami powłokowymi. Stosowanie odpowiednich elementów skończonych przy węźle ramy kątowej umożliwiło otrzymanie poprawnych wyników dla różnych konstrukcji tego węzła, zapewniających, lub nie, ciągłość spaczenia. Konieczne są dalsze przykłady dla przetestowania pozostałych elementów skończonych.

10. Literatura

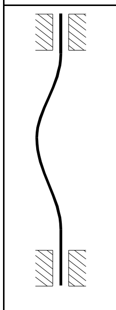
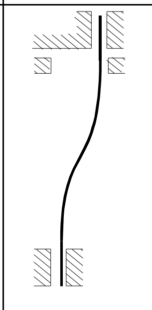
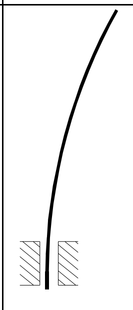
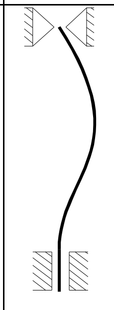
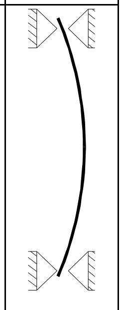
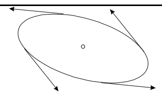
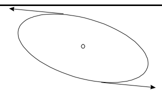
1. ABAQUS – ”Theory Manual” , Version 5.5
2. Argyris J.H., P.C.Dunne, D.W.Scharpf – “On large displacement – small strain analysis of structures with rotational degriees of freedom”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng. Vol.14, 401-451, 1978*
3. Bažant Z.P., L. Cedolin, - “Stability of Structures, Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories”, *Oxford University Press, 1991*
4. Dvorkin E. S., E. Onate, J. Oliver – “On a non-linear formulation for curved Timoshenko type elements”, *Int. J. Numer. Methods Eng. Vol.26, 1597-1613, 1988*
5. Kim M. Y., S. P. Chang, S. B. Kim - “ Spatial stability analysis of thin-walled space frames”, *Int. J. Numer. Methods Eng. Vol.39, 499-525, 1996*
6. Piecznik S. – “Pręty cienkościenne” – *skrypt Polit. Krakowskiej (przygotowany do druku), 1998*
7. ROBOTV6 v. 4.25 – “Podręcznik użytkownika”
8. Saleeb A. F., T. Y. P. Chang., A. S. Gendy – “Effective modelling of spatial buckling of beam assemblages accounting for warping constraints and rotation-dependency of moments”, *Int. J. Numer. Methods Eng. Vol.33, 469-502, 1992*
9. Surana K. S. – “Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements”, *Int. J. Numer. Methods. Eng. Vol.19, 581-615, 1983*
10. Timoshenko, S. P. , J. M. Gere – “Theory of Elastic Stability”- tłumaczenie polskie, *Arkady, Warszawa,1963*
11. Waszczyszyn Z., Cz. Cichoń, M. Radwańska – “Stability of Structures by Finite Element Methods” , *Elserier,1994*
12. Ziegler H. - “Principles of Structural Stability” -tłumaczenie rosyjskie, *Izdatielswo „Mir”, Moskwa,1971*

Dodatki

D1. Momenty skręcające: quasistyczny, półstyczny i pseudostyczny.

Rozpatrzono, za Zieglerem [12] , wyboczenie pręta, obciążonego na końcu momentem skręcającym M i podpartego na pięć różnych sposobów, jak podano w Tab. D1.1.

Tabela D1. 1

Ograniczenia / Przyłożone momenty	1	2	3	4	5
					
Osiowo	2,861	2	0	0	2
 Półstycznie	2,861	2	1	2,168	1,564
 Quasistycznie	2,861	2	0,5	1,576	1 1,021

Równania równowagi statycznej pręta w stanie krytycznym (metoda statyczna) prowadzi do wzoru na moment krytyczny w formie:

$$M_{cr} = \pm k \pi \frac{\alpha}{l} \ , \qquad \text{(D1.1)}$$

gdzie:

l – długość pręta,

α - sztywność,

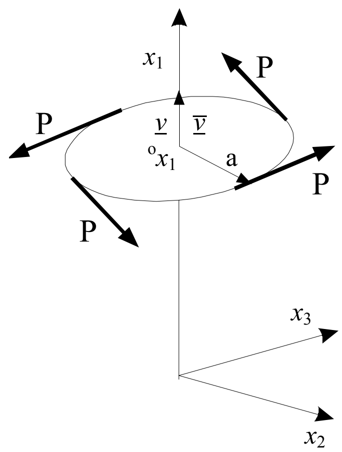
k – parametr.

Wartość parametru k jest zależna od warunków podparcia i dla przypadków *1* i *2* mamy odpowiednio $k = 2{,}861$ i $k = 2{,}0$, natomiast dla przypadków *3* i *4* $k = \infty$. Ten ostatni wynik jest oczywiście błędny bowiem dla tych warunków podparcia pręty wraz z obciążeniem tworzą tzw. układ cyrkulacyjny, dla którego tylko metoda dynamiczna obliczania obciążenia krytycznego (analiza drgań własnych) prowadzi do wyników poprawnych.

Układ nazywany jest cyrkulacyjnym jeśli stały wektor momentu jest przyłożony do ciała, które może się swobodnie obracać wokół dowolnej osi. Taka sytuacja ma miejsce w przypadkach *3 do 5* , w których wektor momentu zachowuje swoją wartość i kierunek (przestrzennie ustalony) a styczna do osi pręta wyboczonego, w punktach przyłożenia obciążenia, nie pokrywa się z osią pręta przed wyboczeniem.

Obliczenia wykonane metodą dynamiczną dają odpowiednio dla przypadków *3* i *4* wynik $k = 0$, i dla przypadku *5* $k = 2.0$ (wynik ten sam co z metody statycznej).

Wartość $k = 0$ dla przypadków *3* i *4* oznacza, że pręt traci stateczność dla dowolnie małego momentu skręcającego. Wynik ten, choć formalnie poprawny, jest nierealny. Dla wyjaśnienia tego paradoksu koniecznym było dokładniejsze przeanalizowanie sposobów realizacji obciążenia pręta momentem skręcającym. Jeden ze sposobów obciążenia przedstawia Rys D1.1.



Rys D1.1

W przekroju poprzecznym $^{o}x_1$ do pręta jest sztywno przymocowana okrągła tarcza. Do tarczy, z kolei, są przymocowane dwie nitki, równoległe do osi x_3, a do nich są przyłożone siły P. Przed utratą stateczności, wektor $\underline{v}$, styczny do osi pręta, pokrywa się z wektorem $\overline{\underline{v}}$ normalnym do tarczy. Wektor momentu wynosi:

$$\underline{M} = M\,\overline{\underline{v}}\,, \quad \text{gdzie } M = 2\,\mathrm{P}\,\mathrm{a}\,. \tag{D1.2}$$

Do chwili utraty stateczności $\underline{v} = \{1,0,0\}$ i $\overline{\underline{v}} = \{1,0,0\}$ co daje wynik

$$\underline{M} = M\,\{1,0,0\}. \tag{D1.3}$$

Po wyboczeniu współrzędne wektorów $\underline{v}$ i $\overline{\underline{v}}$ są:

$$\underline{v} \cong \{1, x_2', x_3'\}, \qquad \overline{\underline{v}} \cong \{1, x_2', 0\}, \tag{D1.4}$$

co prowadzi do wzoru na wektor momentu skręcającego w postaci:

$$\underline{M} \cong M\{1, x_2', 0\}. \qquad \text{(D1.5)}$$

Różnica pomiędzy wektorem $\underline{v}$ i $\underline{\bar{v}}$ spowodowana jest tym, że siły P, a więc i nitki, zachowują swoje położenie w procesie wyboczenia. Taki moment skręcający nazywamy **momentem quasistycznym.**

Jeżeli za pomocą nitek równoległych do osi x_2 przyłoży się drugi moment, taki sam co do wartości to całkowity moment skręcający wyniesie :

$$M = 4\,\mathrm{P}\,\mathrm{a}\,. \qquad \text{(D1.6)}$$

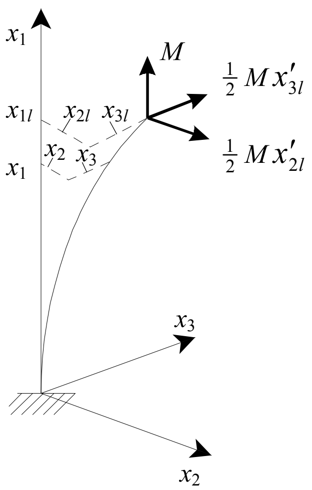
i moment każdej pary jest równy $M/2$. Poprzez analogię do wzoru (D1.5) otrzymano:

$$\underline{M}_1 \cong \frac{M}{2}\{1,\, x_2', 0\}, \qquad \underline{M}_2 \cong \frac{M}{2}\{1, 0, x_3'\} \qquad \text{(D1.7)}$$

co w sumie daje wynik:

$$\underline{M} = M\{1, \tfrac{1}{2}x_2', \tfrac{1}{2}x_3'\}. \qquad \text{(D1.8)}$$

Moment skręcający zdefiniowany wzorem (D1.8) nazwany jest **momentem półstycznym**. Rys D1.2.



Rys D1.2

W trzecim przypadku, obciążenie pręta momentem skręcającym jest zrealizowane za pomocą sztywnej belki, prostopadłej do osi pręta, do której są następnie przymocowane dwie nitki, początkowo prostopadłe do belki i do pręta. Wektor momentu skręcającego wyraża teraz wzór:

$$\underline{M} = M\{1, x_2' + x_3' \,\mathrm{tg}\,\theta_1, 0\}, \qquad \text{(D1.9)}$$

gdzie $M = 2\ P\ a\ \cos\theta_1$ jest wartością momentu bezpośrednio przed wyboczeniem a θ_1 jest kątem skręcenia przekroju poprzecznego x_1. Taki moment skręcający nazywa się **momentem pseudostycznym.**

Wszystkie wymienione trzy typy momentów skręcających są konserwatywne, ponieważ stałe siły działające na końcach nitek są niecyrkulacyjne. W pierwszym wierszu Tabl. D1.1 pod rysunkami zestawiono wartości k dla momentu skręcającego osiowego. Pozostałe dwa wiersze zawierają wartości k dla momentów skręcających: quasistycznego i półstycznego.

Podobne podejście można zastosować do analizy wyboczenia pręta poddanego jednoczesnemu działaniu momentu skręcającego M i siły osiowej P. Siła krytyczna ściskająca zmniejsza wówczas wartość momentu krytycznego skręcającego, przy czym wyboczenie przy skręcaniu może mieć również miejsce dla siły osiowej rozciągającej (granica stateczności w układzie (P,M) jest parabola stopnia drugiego symetryczna względem pionowej osi M).

D2. Macierz liniowa sztywności.

Macierze liniowe sztywności dla różnych przypadków warunków brzegowych zawartych w Tab 1 wyliczono wykorzystując wzór na energię sprężystą (33):

$$\Pi_E = \tfrac{1}{2}\int_L \left[EAU_x'^2 + EI_3 U_y''^2 + EI_2 U_z''^2 + GJ\theta'^2 + EI_\phi \theta''^2\right] dx_1 \tag{D2.1}$$

Wykorzystując wzory interpolacyjne (46) – (49), które można zapisać w sposób

$$\begin{aligned}
U_x &= L_1 U_x^p + L_2 U_x^q = \underline{\widetilde{H}}_4 \cdot \underline{\overline{U}}_x \\
U_y &= H_{i1} U_y^p + H_{i2}\,\omega_3^p + H_{i3} U_y^q + H_{i4}\,\omega_3^q = \underline{H}_i \cdot \underline{\overline{U}}_y \\
U_z &= H_{i1} U_z^p - H_{i2}\,\omega_2^p + H_{i3} U_z^q - H_{i4}\,\omega_2^q = \underline{H}_i \cdot \underline{\overline{U}}_z \\
\theta &= H_{i1}\,\omega_1^p - H_{i2}\, f^p + H_{i3}\,\omega_1^q - H_{i4}\, f^q = \underline{H}_i \cdot \underline{\overline{\theta}} \qquad ,
\end{aligned} \tag{D2.2}$$

gdzie L_1, L_2 funkcje interpolacyjne Lagrange'a ($L_1 = H_{41}$, $L_2 = H_{43}$) i oznaczono $\underline{\widetilde{H}}_4 = [H_{41}, H_{43}]$, oraz H_i – odpowiednie funkcje kształtu Hermit'a. Wówczas równanie (D2.1) przyjmie postać:

$$\begin{aligned}
\Pi_E = \tfrac{1}{2}\int_L \Big[& \underline{\overline{U}}_x^T \left(E A \underline{\widetilde{H}'}_4^T \underline{\widetilde{H}'}_4\right) \underline{\overline{U}}_x + \underline{\overline{U}}_y^T \left(E I_3 \underline{H'}_i^T \underline{H'}_i\right) \underline{\overline{U}}_y \\
& + \underline{\overline{U}}_z^T \left(E I_2 \underline{H'}_i^T \underline{H'}_i\right) \underline{\overline{U}}_z + \underline{\overline{\theta}}^T \left(G J \underline{H'}_j^T \underline{H'}_j + E I_\phi \underline{H''}_j^T \underline{H''}_j\right) \underline{\overline{\theta}} \Big] x_1
\end{aligned} \tag{D2.3}$$

Upraszczając powyższy wzór otrzymano:

$$\Pi_E = \tfrac{1}{2}\left[\underline{\overline{U}}_x^T \underline{k}_1 \underline{\overline{U}}_x + \underline{\overline{U}}_y^T \underline{k}_2 \underline{\overline{U}}_y + \underline{\overline{U}}_z^T \underline{k}_3 \underline{\overline{U}}_z + \underline{\overline{\theta}}^T \underline{k}_3 \underline{\overline{\theta}}\right] \tag{D2.4}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\underline{k}_1 &= \int_L E A \underline{\widetilde{H}'}_4^T \underline{\widetilde{H}'}_4 \; dx_1 \\
\underline{k}_2 &= \int_L E I_3 \underline{H'}_i^T \underline{H'}_i \; dx_1 \\
\underline{k}_3 &= \int_L E I_2 \underline{H'}_i^T \underline{H'}_i \; dx_1 \\
\underline{k}_4 &= \int_L G J \underline{H'}_j^T \underline{H'}_j + E I_\phi \underline{H''}_j^T \underline{H''}_j \; dx_1
\end{aligned} \tag{D2.5}$$

Przyjmując oznaczenie $\underline{\overline{U}} = \left\{ \underline{\overline{U}}_x, \underline{\overline{U}}_y, \underline{\overline{U}}_z, \underline{\overline{\theta}} \right\}$ wyrażenie na Π_E przyjmie postać:

$$\Pi_E = \underline{\overline{U}}^T \underline{\overline{K}}_o \underline{\overline{U}} \tag{D2.6}$$

gdzie:

$$\overline{\underline{K}}_o = \begin{bmatrix} \underline{k}_1 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{k}_2 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{k}_3 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{k}_4 \end{bmatrix} \tag{D2.7}$$

Ostatecznie macierz liniową sztywności K_O otrzymano przestawiając odpowiednio wiersze i kolumny odpowiadające stopniom swobody wg. definicji (26):

$$\underline{U}_e = \left\{ U_x^p, U_y^p, U_z^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, f^p, U_x^q, U_y^q, U_z^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q, f^q \right\} \tag{D2.8}$$

Na następnych stronach umieszczono wszystkie macierze liniowej sztywności elementów z Tab. 1. Macierze te obliczono wykorzystując arkusz kalkulacyjny Excel i przyjęto następujące oznaczenia:

$EA = \mathrm{EA}$; $EI_2 = \mathrm{EJ2}$; $EI_3 = \mathrm{EJ3}$; $GJ = \mathrm{GJ}$; $EI_\phi = \mathrm{EJq}$

$L = \mathrm{L}$; $L^2 = \mathrm{L2}$; $L^3 = \mathrm{L3}$

Element 1

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy sztywny (R-R)
skręcanie -> węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy sztywny (R-R)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
c	.	.	.	.	.	.	-c	.	.	.	.	.	.	1
	a1	.	.	.	a4	.	.	-a1	.	.	.	a4	.	2
		a11	.	a14	.	.	.	.	-a11	.	a14	.	.	3
			d1	.	.	d4	.	.	.	-d1	.	.	d4	4
				a12	.	.	.	.	-a14	.	a16	.	.	5
					a2	.	.	-a4	.	.	.	a6	.	6
						d2	.	.	.	-d4	.	.	d6	7
							c	.	.	.	.	.	.	8
								a1	.	.	.	-a4	.	9
									a11	.	-A14	.	.	10
										d1	.	.	-d4	11
											a12	.	.	12
												a2	.	13
													d2	14

a1= 12,000 EJ3/ L3
a2= 4,000 EJ3/ L
a4= 6,000 EJ3/ L2
a6= 2,000 EJ3/ L

a11= 12,000 EJ2/ L3
a12= 4,000 EJ2/ L
a14= - 6,000 EJ2/ L2
a16= 2,000 EJ2/ L
c= EA/ L

d1= 1,200 GJ/ L + 12,000 EJq/ L3
d2= 0,133 GJ L + 4,000 EJq/ L
d4= - 0,100 GJ - 6,000 EJq/ L2
d6= - 0,033 GJ L + 2,000 EJq/ L

Element 2

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy sztywny (R-R)
skręcanie -> węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy przegubowy (R-H)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
c	.	.	.	.	.	.	-c	.	.	.	.	.	1
	a1	.	.	.	a4	.	.	-a1	.	.	.	a4	2
		a11	.	a14	.	.	.	.	-a11	.	a14	.	3
			d1	.	.	d4	.	.	.	-d1	.	.	4
				a12	.	.	.	.	-a14	.	a16	.	5
					a2	.	.	-a4	.	.	.	a6	6
						d2	.	.	.	-d4	.	.	7
							c	.	.	.	.	.	8
								a1	.	.	.	-a4	9
									a11	.	-a14	.	10
										d1	.	.	11
											b12	.	12
												a2	13

a1= 12,000 EJ3/ L3
a2= 4,000 EJ3/ L
a4= 6,000 EJ3/ L2
a6= 2,000 EJ3/ L

a11= 12,000 EJ2/ L3
a12= 4,000 EJ2/ L
a14= - 6,000 EJ2/ L2
a16= 2,000 EJ2/ L

c= EA/ L
d1= 1,200 GJ/ L + 3,000 EJq/ L3
d2= 0,200 GJ L + 3,000 EJq/ L
d4= - 0,200 GJ - 3,000 EJq/ L2

Element 3

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy sztywny (R-R)

skręcanie -> węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy sztywny (H-R)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
c	.	.	.	.	.	-c	.	.	.	.	.	.	1
	a1	.	.	.	a4	.	-a1	.	.	.	a4	.	2
		a11	.	a14	.	.	.	-a11	.	a14	.	.	3
			d1	.	.	.	.	.	-d1	.	.	d5	4
				a12	.	.	.	-a14	.	a16	.	.	5
					a2	.	-a4	.	.	.	a6	.	6
						c	.	.	.	.	.	.	7
							a1	.	.	.	-a4	.	8
		symetria						a11	.	-a14	.	.	9
									d1	.	.	-d5	10
										a12	.	.	11
											a2	.	12
												d3	13

a1= 12,000 EJ3 / L3
a2= 4,000 EJ3 / L
a4= 6,000 EJ3 / L2
a6= 2,000 EJ3 / L

a11= 12,000 EJ2 / L3
a12= 4,000 EJ2 / L
a14= - 6,000 EJ2 / L2
a16= 2,000 EJ2 / L

c= EA / L
d1= 1,200 GJ / L + 3,000 EJq / L3
d3= 0,200 GJ L + 3,000 EJq / L
d5= - 0,200 GJ - 3,000 EJq / L2

Element 4

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy sztywny (R-R)

skręcanie -> węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy przegubowy (H-H)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
c	.	.	.	.	.	-c	.	.	.	.	.	1
	a1	.	.	.	a4	.	-a1	.	.	.	a4	2
		a11	.	a14	.	.	.	-a11	.	a14	.	3
			d1	.	.	.	.	.	-d1	.	.	4
				a12	.	.	.	-a14	.	a16	.	5
					a2	.	-a4	.	.	.	a6	6
						c	.	.	.	.	.	7
		symetria					a1	.	.	.	-a4	8
								a11	.	-a14	.	9
									d1	.	.	10
										a12	.	11
											a2	12

a1= 12,000 EJ3 / L3
a2= 4,000 EJ3 / L
a4= 6,000 EJ3 / L2
a6= 2,000 EJ3 / L

a11= 12,000 EJ2 / L3
a12= 4,000 EJ2 / L
a14= - 6,000 EJ2 / L2
a16= 2,000 EJ2 / L

c= EA / L
d1= GJ / L

Element 5

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy przegubowy (R-H)

skręcanie -> węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy sztywny (R-R)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
c	.	.	.	.	.	.	-c	.	.	.	.	1
	a1	.	.	.	a4	.	.	-a1	.	.	.	2
		a11	.	a14	.	.	.	.	-a11	.	.	3
			d1	.	.	d4	.	.	.	-d1	d4	4
				a12	.	.	.	.	-a14	.	.	5
					a2	.	.	-a4	.	.	.	6
						d2	.	.	.	-d4	d6	7
	symetria						c	.	.	.	.	8
								a1	.	.	.	9
									a11	.	.	10
										d1	-d4	11
											d2	12

a1= 3,000 EJ3 / L3
a2= 3,000 EJ3 / L
a4= 3,000 EJ3 / L2
c= EA/ L

a11= 3,000 EJ2 / L3
a12= 3,000 EJ2 / L
a14= - 3,000 EJ2 / L2

d1= 1,200 GJ / L + 12,000 EJq / L3
d2= 0,133 GJ L + 4,000 EJq / L
d4= - 0,100 GJ - 6,000 EJq / L2
d6= - 0,033 GJ L + 2,000 EJq / L

Element 6

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy przegubowy (R-H)

skręcanie -> węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy przegubowy (R-H)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
c	.	.	.	.	.	.	-c	.	.	.	1
	a1	.	.	.	a4	.	.	-a1	.	.	2
		a11	.	a14	.	.	.	.	-a11	.	3
			d1	.	.	d4	.	.	.	-d1	4
				a12	.	.	.	.	-a14	.	5
					a2	.	.	-a4	.	.	6
						d2	.	.	.	-d4	7
	symetria						c	.	.	.	8
								a1	.	.	9
									a11	.	10
										d1	11

a1= 3,000 EJ3 / L3
a2= 3,000 EJ3 / L
a4= 3,000 EJ3 / L2

a11= 3,000 EJ2 / L3
a12= 3,000 EJ2 / L
a14= - 3,000 EJ2 / L2
c= EA / L

d1= 1,200 GJ / L + 3,000 EJq / L3
d2= 0,200 GJ L + 3,000 EJq / L
d4= - 0,200 GJ - 3,000 EJq / L2

Element 7

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy przegubowy (R-H)

skręcanie -> węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy sztywny (H-R)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
c	.	.	.	.	.	-c	.	.	.	.	1
	a1	.	.	.	a4	.	-a1	.	.	.	2
		a11	.	a14	.	.	.	-a11	.	.	3
			d1	.	.	.	.	.	-d1	d5	4
				a12	.	.	.	-a14		.	5
					a2	.	-a4	.	.	.	6
		symetria				c	.	.	.	.	7
							a1	.	.	.	8
								a11	.	.	9
									d1	-d5	10
										d3	11

a1= 3,000 EJ3 / L3

a2= 3,000 EJ3 / L

a4= 3,000 EJ3 / L2

a11= 3,000 EJ2 / L3

a12= 3,000 EJ2 / L

a14= - 3,000 EJ2 / L2

c= EA / L

d1= 1,200 GJ / L + 3,000 EJq / L3

d3= 0,200 GJ L + 3,000 EJq / L

d5= - 0,200 GJ - 3,000 EJq / L2

Element 8

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy przegubowy (R-H)

skręcanie -> węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy przegubowy (H-H)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
c	.	.	.	.	.	-c	.	.	.	1
	a1	.	.	.	a4	.	-a1	.	.	2
		a11	.	a14	.	.	.	-a11	.	3
			d1	.	.	.	.	.	-d1	4
				a12	.	.	.	-a14		5
					a2	.	-a4	.	.	6
		symetria				c	.	.	.	7
							a1	.	.	8
								a11	.	9
									d1	10

a1= 3,000 EJ3 / L3

a2= 3,000 EJ3 / L

a4= 3,000 EJ3 / L2

a11= 3,000 EJ2 / L3

a12= 3,000 EJ2 / L

a14= - 3,000 EJ2 / L2

c= EA / L

d1= GJ / L

Element 9

zginanie ->węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy sztywny (H-R)

skręcanie -> węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy sztywny (R-R)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
c	.	.	.	.	-c	.	.	.	.	.	.	1
	a1	.	.	.	.	-a1	.	.	.	a5	.	2
		a11	.	.	.	.	-a11	.	a15	.	.	3
			d1	d4	.	.	.	-d1	.	.	d4	4
				d2	.	.	.	-d4	.	.	d6	5
					c	.	.	.	.	.	.	6
						a1	.	.	.	-a5	.	7
		symetria					a11	.	-a15	.	.	8
								d1	.	.	-d4	9
									a13	.	.	10
										a3	.	11
											d2	12

a1= 3,000 EJ3 / L3
a3= 3,000 EJ3 / L
a5= 3,000 EJ3 / L2
c= EA / L

a11= 3,000 EJ2 / L3
a13= 3,000 EJ2 / L
a15= - 3,000 EJ2 / L2

d1= 1,200 GJ / L + 12,000 EJq / L3
d2= 0,133 GJ L + 4,000 EJq / L
d4= - 0,100 GJ - 6,000 EJq / L2
d6= - 0,033 GJ L + 2,000 EJq / L

Element 10

zginanie ->węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy sztywny (H-R)

skręcanie -> węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy przegubowy (R-H)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
c	.	.	.	.	-c	.	.	.	.	.	1
	a1	.	.	.	.	-a1	.	.	.	a5	2
		a11	.	.	.	.	-a11	.	a15	.	3
			d1	d4	.	.	.	-d1	.	.	4
				d2	.	.	.	-d4	.	.	5
					c	.	.	.	.	.	6
						a1	.	.	.	-a5	7
		symetria					a11	.	-a15	.	8
								d1	.	.	9
									a13	.	10
										a3	11

a1= 3,000 EJ3 / L3
a3= 3,000 EJ3 / L
a5= 3,000 EJ3 / L2

a11= 3,000 EJ2 / L3
a13= 3,000 EJ2 / L
a15= - 3,000 EJ2 / L2
c= EA / L

d1= 1,200 GJ / L + 3,000 EJq / L3
d2= 0,200 GJ L + 3,000 EJq / L
d4= - 0,200 GJ - 3,000 EJq / L2

Element 11

zginanie ->węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy sztywny (H-R)

skręcanie -> węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy sztywny (H-R)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
c	.	.	.	-c	.	.	.	.	.	.	1
	a1	.	.	.	-a1	.	.	.	a5	.	2
		a11	.	.	.	-a11	.	a15	.	.	3
			d1	.	.	.	-d1	.	.	d5	4
				c	.	.	.	.	.	.	5
					a1	.	.	.	-a5	.	6
		symetria				a11	.	-a15	.	.	7
							d1	.	.	-d5	8
								a13	.	.	9
									a3	.	10
										d3	11

a1= 3,000 EJ3 / L3
a3= 3,000 EJ3 / L
a5= 3,000 EJ3 / L2

a11= 3,000 EJ2 / L3
a13= 3,000 EJ2 / L
a15= - 3,000 EJ2 / L2
c= EA / L

d1= 1,200 GJ / L + 3,000 EJq / L3
d3= 0,200 GJ L + 3,000 EJq / L
d5= - 0,200 GJ - 3,000 EJq / L2

Element 12

zginanie ->węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy sztywny (H-R)

skręcanie -> węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy przegubowy (H-H)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
c	.	.	.	-c	.	.	.	.	.	1
	a1	.	.	.	-a1	.	.	.	a5	2
		a11	.	.	.	-a11	.	a15	.	3
			d1	.	.	.	-d1	.	.	4
				c	.	.	.	.	.	5
					a1	.	.	.	-a5	6
		symetria				a11	.	-a15	.	7
							d1	.	.	8
								a13	.	9
									a3	10

a1= 3,000 EJ3 / L3
a3= 3,000 EJ3 / L
a5= 3,000 EJ3 / L2

a11= 3,000 EJ2 / L3
a13= 3,000 EJ2 / L
a15= - 3,000 EJ2 / L2

c= EA / L
d1= GJ / L

D3. Macierz sztywności geometrycznej

Macierze sztywności geometrycznej dla różnych warunków brzegowych (patrz Tab.1) obliczono korzystając ze wzorów na energię naprężeń wstępnych i sił przywęzłowych Π_G (40):

$$\begin{aligned}\Pi_G = \tfrac{1}{2}\int_L \Big[& {}^oF_1\left(U_y'^2 + U_y'^2 + 2e_3 U_y' \theta' - 2e_2 U_z' \theta'\right) + {}^oM_P \theta'^2 \\ & + {}^oF_2 U_z' \theta - {}^oF_3 U_y' \theta + {}^oM_T \left(U_z' U_y'' - U_z'' U_y'\right) \\ & + {}^oM_2 \left(U_y'' \theta - U_y' \theta'\right) + {}^oM_3 \left(U_z'' \theta - U_z' \theta'\right) \\ & + 2\,{}^oF_2 e_3 U_z'' U_y' + 2\,{}^oF_3 e_2 U_y'' U_z' \\ & + 2\,{}^oF_2 e_2 U_y'' U_y' + 2\,{}^oF_3 e_3 U_z'' U_z' \Big]\, dx_1 \ .\end{aligned} \tag{D3.1}$$

który po przekształceniach ma postać :

$$\begin{aligned}\Pi_G = \tfrac{1}{2}\int_L \Big[& \left({}^oF_1 U_y'^2 + 2\,{}^oF_2 e_2 U_y'' U_y'\right) + \left({}^oF_1 U_z'^2 + 2\,{}^oF_3 e_3 U_z'' U_z'\right) + \left({}^oM_P \theta'^2\right) \\ & + \left(2\,{}^oF_2 e_3 U_z'' U_y' + 2\,{}^oF_3 e_2\, U_y'' U_z' + {}^oM_T \left(U_z'\, U_y'' - U_z'' U_y'\right)\right) \\ & + \left(2\,{}^oF_1 e_3 U_y' \theta' - {}^oF_3 U_y' \theta + {}^oM_2 \left(U_y'' \theta - U_y' \theta'\right)\right) \\ & + \left(-2\,{}^oF_1 e_2 U_z' \theta' + {}^oF_2 U_z' \theta + {}^oM_3 \left(U_z'' \theta - U_z' \theta'\right)\right)\Big] dx_1 \, .\end{aligned} \tag{D3.2}$$

Wykorzystując wzory interpolacyjne (46) – (49) , które dla jasności rozważań przepisano:

$$\begin{aligned} U_y &= H_{i1} U_y^p + H_{i2}\, \omega_3^p + H_{i3} U_y^q + H_{i4}\, \omega_3^q = \underline{H}_i \cdot \overline{\underline{U}}_y \\ U_z &= H_{i1} U_z^p - H_{i2}\, \omega_2^p + H_{i3} U_z^q - H_{i4}\, \omega_2^q = \underline{H}_i \cdot \overline{\underline{U}}_z \\ \theta &= H_{j1}\, \omega_1^p - H_{j2}\, f^p + H_{j3}\, \omega_1^q - H_{j4}\, f^q = \underline{H}_j \cdot \overline{\underline{\theta}} \ , \end{aligned} \tag{D3.3}$$

gdzie H_i – odpowiednie funkcje kształtu Hermit'a, otrzymujemy po podstawieniu do (D3.2) wyrażenie:

$$\begin{aligned}\Pi_G = \tfrac{1}{2}\int_L \Big[& \overline{\underline{U}}_y^T \left({}^oF_1 \underline{H'}_i^T \underline{H'}_i + 2\,{}^oF_2 e_2 \underline{H''}_i^T \underline{H'}_i\right) \overline{\underline{U}}_y \\ & + \overline{\underline{U}}_z^T \left({}^oF_1 \underline{H'}_i^T \underline{H'}_i + 2\,{}^oF_3 e_3 \underline{H''}_i^T \underline{H'}_i\right) \overline{\underline{U}}_z \\ & + \overline{\underline{\theta}}^T\ {}^oM_P \underline{H'}_j^T \underline{H'}_j \overline{\underline{\theta}} \\ & + \overline{\underline{U}}_z^T \left(2\,{}^oF_2 e_3 \underline{H''}_i^T \underline{H'}_i + 2\,{}^oF_3 e_2 \underline{H'}_i^T \underline{H''}_i + {}^oM_T \left(\underline{H'}_i^T \underline{H''}_i - \underline{H''}_i^T \underline{H'}_i\right)\right) \overline{\underline{U}}_y \\ & + \overline{\underline{U}}_y^T \left(2\,{}^oF_1 e_3 \underline{H'}_i^T \underline{H'}_j - {}^oF_3 \underline{H'}_i^T \underline{H}_j + {}^oM_2 \left(\underline{H''}_i^T \underline{H}_j - \underline{H'}_i^T \underline{H'}_j\right)\right) \overline{\underline{\theta}} \\ & + \overline{\underline{U}}_z^T \left(-2\,{}^oF_1 e_2 \underline{H'}_i^T \underline{H'}_j + {}^oF_2 \underline{H'}_i^T \underline{H}_j + {}^oM_3 \left(\underline{H''}_i^T \underline{H}_j - \underline{H'}_i^T \underline{H'}_j\right)\right) \overline{\underline{\theta}} \Big] dx_1 \, .\end{aligned} \tag{D3.4}$$

Dalej przekształcając otrzymano:

$$
\begin{aligned}
\Pi_G = \tfrac{1}{2} \Big[& \underline{\overline{U}}_y^T \int_L \left({}^oF_1\, \underline{H'}_i^T\, \underline{H'}_i + 2\, {}^oF_2\, e_2\, \underline{H''}_i^T\, \underline{H'}_i \right) dx_1\, \underline{\overline{U}}_y \\
& + \underline{\overline{U}}_z^T \int_L \left({}^oF_1\, \underline{H'}_i^T\, \underline{H'}_i + 2\, {}^oF_3\, e_3\, \underline{H''}_i^T\, \underline{H'}_i \right) dx_1\, \underline{\overline{U}}_z \\
& + \underline{\overline{\theta}}^T \int_L {}^oM_P\, \underline{H'}_j^T\, \underline{H'}_j\, dx_1\, \underline{\overline{\theta}} \\
& + \underline{\overline{U}}_z^T \int_L \left(2\, {}^oF_2\, e_3\, \underline{H''}_i^T\, \underline{H'}_i + 2\, {}^oF_3\, e_2\, \underline{H'}_i^T\, \underline{H''}_i + {}^oM_T \left(\underline{H'}_i^T\, \underline{H''}_i - \underline{H''}_i^T\, \underline{H'}_i \right) \right) dx_1\, \underline{\overline{U}}_y \\
& + \underline{\overline{U}}_y^T \int_L \left(2\, {}^oF_1\, e_3\, \underline{H'}_i^T\, \underline{H'}_j - {}^oF_3\, \underline{H'}_i^T\, \underline{H}_j + {}^oM_2 \left(\underline{H''}_i^T\, \underline{H}_j - \underline{H'}_i^T\, \underline{H'}_j \right) \right) dx_1\, \underline{\overline{\theta}} \\
& + \underline{\overline{U}}_z^T \int_L \left(-2\, {}^oF_1\, e_2\, \underline{H'}_i^T\, \underline{H'}_j + {}^oF_2\, \underline{H'}_i^T\, \underline{H}_j + {}^oM_3 \left(\underline{H''}_i^T\, \underline{H}_j - \underline{H'}_i^T\, \underline{H'}_j \right) \right) dx_1\, \underline{\overline{\theta}} \ \Big].
\end{aligned}
\tag{D3.5}
$$

Upraszczając zapis, wzór (D3.5) ma postać :

$$
\Pi_G = \tfrac{1}{2} \left[\underline{\overline{U}}_y^T\, \underline{k}_{11} \underline{\overline{U}}_y + \underline{\overline{U}}_z^T \underline{k}_{22}\, \underline{\overline{U}}_z + \underline{\overline{\theta}}^T\, \underline{k}_{33}\, \underline{\overline{\theta}} + \underline{\overline{U}}_z^T\, \underline{k}_{12} \underline{\overline{U}}_y + \underline{\overline{U}}_y^T \underline{k}_{31}\, \underline{\overline{\theta}} + \underline{\overline{U}}_z^T\, \underline{k}_{32}\, \underline{\overline{\theta}} \right], \tag{D3.6}
$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
\underline{k}_{11} &= \int_L \left({}^oF_1\, \underline{H'}_i^T\, \underline{H'}_i + 2\, {}^oF_2\, e_2\, \underline{H''}_i^T\, \underline{H'}_i \right) dx_1 \\
\underline{k}_{22} &= \int_L \left({}^oF_1\, \underline{H'}_i^T\, \underline{H'}_i + 2\, {}^oF_3\, e_3\, \underline{H''}_i^T\, \underline{H'}_i \right) dx_1 \\
\underline{k}_{33} &= \int_L {}^oM_P\, \underline{H'}_j^T \underline{H'}_j\, dx_1 \\
\underline{k}_{12} &= \int_L \left(2\, {}^oF_2\, e_3\, \underline{H''}_i^T\, \underline{H'}_i + 2\, {}^oF_3\, e_2\, \underline{H'}_i^T\, \underline{H''}_i + {}^oM_T \left(\underline{H'}_i^T\, \underline{H''}_i - \underline{H''}_i^T\, \underline{H'}_i \right) \right) dx_1 \\
\underline{k}_{31} &= \int_L \left(2\, {}^oF_1\, e_3\, \underline{H'}_i^T\, \underline{H'}_j - {}^oF_3\, \underline{H'}_i^T\, \underline{H}_j + {}^oM_2 \left(\underline{H''}_i^T\, \underline{H}_j - \underline{H'}_i^T\, \underline{H'}_j \right) \right) dx_1 \\
\underline{k}_{32} &= \int_L \left(-2\, {}^oF_1\, e_2 \underline{H'}_i^T\, \underline{H'}_j + {}^oF_2\, \underline{H'}_i^T\, \underline{H}_j + {}^oM_3 \left(\underline{H''}_i^T\, \underline{H}_j - \underline{H'}_i^T\, \underline{H'}_j \right) \right) dx_1 \\
\underline{k}_{21} &= \underline{k}_{12}^T \\
\underline{k}_{13} &= \underline{k}_{31}^T \\
\underline{k}_{23} &= \underline{k}_{32}^T\ .
\end{aligned}
\tag{D3.7}
$$

Przyjmując oznaczenie $\underline{\overline{U}} = \left\{ \underline{\overline{U}}_y , \underline{\overline{U}}_z , \underline{\overline{\theta}} \right\}$ wyrażenie na energię Π_G można zapisać w sposób:

$$
\Pi_G = \tfrac{1}{2}\, \underline{\overline{U}}^T\, \underline{\overline{K}}_g\, \underline{\overline{U}} \tag{D3.8}
$$

gdzie:

$$
\underline{\overline{K}}_g = \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \tfrac{1}{2}\underline{k}_{12} & \tfrac{1}{2}\underline{k}_{13} \\ \tfrac{1}{2}\underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} & \tfrac{1}{2}\underline{k}_{23} \\ \tfrac{1}{2}\underline{k}_{31} & \tfrac{1}{2}\underline{k}_{32} & \underline{k}_{33} \end{bmatrix} \tag{D3.9}
$$

Macierz sztywności geometrycznej K_g , odpowiadającą uporządkowanym stopniom swobody wg. definicji (26):

$$\underline{U}_e = \left\{ U_x^p, U_y^p, U_z^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, f^p, U_x^q, U_y^q, U_z^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q, f^q \right\} \qquad \text{(D3.10)}$$

otrzymano przestawiając odpowiednio wiersze i kolumny w macierzy $\overline{\underline{K}}_g$.

Dla otrzymania końcowych wzorów wprowadzona do (D3.7) statyczne warunki brzegowe w formie:

$$\underline{{}^oF_1} = -{}^oF_1^p = \underline{{}^oF_1^q} \quad ; \quad {}^oF_2 = -{}^oF_2^p \ ; \quad {}^oF_3 = -{}^oF_3^p \quad ; \quad {}^oM_T = -{}^oM_T^p$$

$${}^oM_2 = -{}^oM_2^p + {}^oF_3\, x_1 \quad \Rightarrow \quad {}^oM_2^q = -{}^oM_2^p + {}^oF_3\, L \quad \Rightarrow \quad \underline{{}^oF_3 = \left({}^oM_2^p + {}^oM_2^q\right)/L} \quad \Rightarrow$$
$$\underline{{}^oM_2 = -{}^oM_2^p + \left({}^oM_2^p + {}^oM_2^q\right)x_1/L}$$

$${}^oM_3 = -{}^oM_3^p - {}^oF_2\, x_1 \quad \Rightarrow \quad {}^oM_3^q = -{}^oM_3^p - {}^oF_2\, L \quad \Rightarrow \quad \underline{{}^oF_2 = -\left({}^oM_3^p + {}^oM_3^q\right)/L} \quad \Rightarrow \quad \text{(D3.11)}$$
$$\underline{{}^oM_3 = -{}^oM_3^p + \left({}^oM_3^p + {}^oM_3^q\right)x_1/L}$$

$${}^oM_P = \beta_1\, {}^oF_1 + \beta_2\, {}^oM_2 + \beta_3\, {}^oM_3 + \beta_\phi\, {}^oM_\phi \quad \Rightarrow$$
$$\underline{{}^oM_P = \beta_1\, {}^oF_1^p + \beta_2\left(-{}^oM_2^p + \left({}^oM_2^p + {}^oM_2^q\right)x_1/L\right)}$$
$$\underline{+\beta_3\left(-{}^oM_3^p + \left({}^oM_3^p + {}^oM_3^q\right)x_1/L\right) + \beta_\phi\, {}^oM_\phi^q}$$

Macierze sztywności geometrycznej K_G dla różnych przypadków kinematycznych warunków brzegowych (Tab.1)otrzymano wykorzystując we wzorach (D3.7) odpowiednie funkcje kształtu.

Macierze te obliczono przy pomocy arkusza kalkulacyjnego Excel i przyjęto oznaczenia :

$L = \mathrm{L}$; $L^2 = \mathrm{L2}$; ${}^oF_1^q = \mathrm{F1}$; ${}^oM_2^p = \mathrm{M2p}$; ${}^oM_2^q = \mathrm{M2q}$; ${}^oM_3^p = \mathrm{M3p}$

${}^oM_3^q = \mathrm{M3q}$; ${}^oM_T = \mathrm{Mt}$; ${}^oM_\phi^q = \mathrm{Mq}$; $\beta_1 = \mathrm{b1}$; $\beta_2 = \mathrm{b2}$; $\beta_3 = \mathrm{b3}$

$\beta_\phi = \mathrm{bq}$; $e_2 = \mathrm{e2}$; $e_3 = \mathrm{e3}$

Element 1

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy sztywny (R-R)
skręcanie -> węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy sztywny (R-R)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	A1	.	C1	B4	A4	C3	.	-A1	.	C5	-B4	A4	C7	2
		A1	C2	-A4	B4	C4	.	.	-A1	C6	-A4	-B4	C8	3
			D1	C10	C9	D4	.	-C1	-C2	-D1	C22	C21	D5	4
				A12	B2	C12	.	-B4	A4	C14	A6	-B8	C16	5
					A2	C11	.	-A4	-B4	C13	B8	A6	C15	6
						D2	.	-C3	-C4	-D4	C24	C23	D6	7
							.	.	.	.	.	.	.	8
			symetria					A1	.	-C5	B4	-A4	-C7	9
									A1	-C6	A4	B4	-C8	10
										D1	C26	C25	-D5	11
											A13	-B2	C28	12
												A3	C27	13
													D3	14

A1= 1,200 F1/ L
A2= 0,133 F1 L + (M3p+M3q)e2/ L
A3= 0,133 F1 L - (M3p+M3q)e2/ L
A4= 0,100 F1
A6= - 0,033 F1 L
A12= 0,133 F1 L - (M2p+M2q)e3/ L
A13= 0,133 F1 L + (M2p+M2q)e3/ L
C15= 0,033 F1 e3 L + 0,033 M2p L
C16= 0,033 F1 e2 L - 0,033 M3p L
C21= 0,100 F1 e3 + 0,200 M2p + 0,100 M2q
C22= 0,100 F1 e2 - 0,200 M3p - 0,100 M3q
C23= 0,033 F1 e3 L - 0,033 M2q L
C24= 0,033 F1 e2 L + 0,033 M3q L
C25= - 0,100 F1 e3 - 0,200 M2p + 0,400 M2q
C26= - 0,100 F1 e2 + 0,200 M3p - 0,400 M3q
C27= - 0,133 F1 e3 L - 0,033 M2p L + 0,100 M2q L
C28= - 0,133 F1 e2 L + 0,033 M3p L - 0,100 M3q L
B2= 0,500 (M2p+M2q)e2/ L - 0,500 (M3p+M3q)e3/ L
B4= - Mt/ L + (M2p+M2q)e2/ L2 + (M3p+M3q)e3/ L2
B8= 0,500 Mt - 0,500 (M2p+M2q)e2/ L - 0,500 (M3p+M3q)e3/ L
D1= 1,200 (b1 F1+bq Mq)/ L - 0,600 (b2 M2p+b3 M3p)/ L + 0,600 (b2 M2q+b3 M3q)/ L
D2= 0,133 (b1 F1+bq Mq) L - 0,100 (b2 M2p+b3 M3p) L + 0,033 (b2 M2q+b3 M3q) L
D3= 0,133 (b1 F1+bq Mq) L - 0,033 (b2 M2p+b3 M3p) L + 0,100 (b2 M2q+b3 M3q) L
D4= - 0,100 (b1 F1+bq Mq) - 0,100 (b2 M2q+b3 M3q)
D5= - 0,100 (b1 F1+bq Mq) + 0,100 (b2 M2p+b3 M3p)
D6= - 0,033 (b1 F1+bq Mq) L + 0,017 (b2 M2p+b3 M3p) L - 0,017 (b2 M2q+b3 M3q) L

C1= 1,200 F1 e3/ L + 1,100 M2p/ L - 0,100 M2q/ L
C2= - 1,200 F1 e2/ L + 1,100 M3p/ L - 0,100 M3q/ L
C3= - 0,100 F1 e3 - 0,100 M2p
C4= 0,100 F1 e2 - 0,100 M3p
C5= - 1,200 F1 e3/ L - 0,100 M2p/ L + 1,100 M2q/ L
C6= 1,200 F1 e2/ L - 0,100 M3p/ L + 1,100 M3q/ L
C7= - 0,100 F1 e3 + 0,100 M2q
C8= 0,100 F1 e2 + 0,100 M3q
C9= 0,100 F1 e3 + 0,400 M2p - 0,200 M2q
C10= 0,100 F1 e2 - 0,400 M3p + 0,200 M3q
C11= - 0,133 F1 e3 L - 0,100 M2p L + 0,033 M2q L
C12= - 0,133 F1 e2 L + 0,100 M3p L - 0,033 M3q L
C13= - 0,100 F1 e3 + 0,100 M2p + 0,200 M2q
C14= - 0,100 F1 e2 - 0,100 M3p - 0,200 M3q

Element 2

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy sztywny (R-R)
skręcanie -> węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy przegubowy (R-H)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	A1	.	C1	B4	A4	C3	.	-A1	.	C5	B5	A4	2
		A1	C2	-A4	B4	C4	.	.	-A1	C6	-A4	-B4	3
			D1	C10	C9	D4	.	-C1	-C2	-D1	C22	C21	4
				A12	B2	C12	.	-B4	A4	C14	A6	-B8	5
					A2	C11	.	-A4	-B4	C13	B8	A6	6
						D2	.	-C3	-C4	-D4	C24	C23	7
							.	.	.	.	.	.	8
		symetria						A1	.	-C5	B4	-A4	9
									A1	-C6	A4	B4	10
										D1	C26	C25	11
											A13	-B2	12
												A3	13

A1= 1,200 F1/ L
A2= 0,133 F1 L + (M3p+M3q)e2/ L
A3= 0,133 F1 L - (M3p+M3q)e2/ L
A4= 0,100 F1
A6= - 0,033 F1 L
A12= 0,133 F1 L - (M2p+M2q)e3/ L
A13= 0,133 F1 L + (M2p+M2q)e3/ L
C9= 0,150 F1 e3 + 0,450 M2p - 0,200 M2q
C10= 0,150 F1 e2 - 0,450 M3p + 0,200 M3q
C13= - 0,150 F1 e3 + 0,050 M2p + 0,200 M2q
C14= - 0,150 F1 e2 - 0,050 M3p - 0,200 M3q
C25= 0,100 F1 e3 - 0,150 M2p + 0,250 M2q
C26= 0,100 F1 e2 + 0,150 M3p - 0,250 M3q
B2= 0,500 (M2p+M2q)e2/ L - 0,500 (M3p+M3q)e3/ L
B4= - Mt/ L + (M2p+M2q)e2/ L2 + (M3p+M3q)e3/ L2
B8= 0,500 Mt - 0,500 (M2p+M2q)e2/ L - 0,500 (M3p+M3q)e3/ L
D1= 1,200 (b1 F1+bq Mq)/ L - 0,375 (b2 M2p+b3 M3p)/ L + 0,825 (b2 M2q+b3 M3q)/ L
D2= 0,200 (b1 F1+bq Mq) L - 0,125 (b2 M2p+b3 M3p) L + 0,075 (b2 M2q+b3 M3q) L
D4= - 0,200 (b1 F1+bq Mq) - 0,200 (b2 M2q+b3 M3q)

C1= 1,050 F1 e3/ L + 1,100 M2p/ L + 0,050 M2q/ L
C2= - 1,050 F1 e2/ L + 1,100 M3p/ L + 0,050 M3q/ L
C3= - 0,050 F1 e3 - 0,100 M2p - 0,050 M2q
C4= 0,050 F1 e2 - 0,100 M3p - 0,050 M3q
C5= - 1,050 F1 e3/ L - 0,100 M2p/ L + 0,950 M2q/ L
C6= 1,050 F1 e2/ L - 0,100 M3p/ L + 0,950 M3q/ L
C11= - 0,150 F1 e3 L - 0,117 M2p L + 0,033 M2q L
C12= - 0,150 F1 e2 L + 0,117 M3p L - 0,033 M3q L
C21= - 0,100 F1 e3 + 0,150 M2p + 0,250 M2q
C22= - 0,100 F1 e2 - 0,150 M3p - 0,250 M3q
C23= 0,100 F1 e3 L + 0,017 M2p L - 0,083 M2q L
C24= 0,100 F1 e2 L - 0,017 M3p L + 0,083 M3q L

Element 3

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy sztywny (R-R)
skręcanie -> węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy sztywny (H-R)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	A1	.	C1	B4	A4	.	-A1	.	C5	-B4	A4	C7	2
		A1	C2	-A4	B4	.	.	-A1	C6	-A4	-B4	C8	3
			D1	C10	C9	.	-C1	-C2	-D1	C22	C21	D5	4
				A12	B2	.	-B4	A4	C14	A6	-B8	C16	5
					A2	.	-A4	-B4	C13	B8	A6	C15	6
						.	.	.	.	.	.	.	7
							A1	.	-C5	B4	-A4	-C7	8
								A1	-C6	A4	B4	-C8	9
			symetria						D1	C26	C25	-D5	10
										A13	-B2	C28	11
											A3	C27	12
												D3	13

A1= 1,200 F1/ L
A2= 0,133 F1 L + (M3p+M3q)e2/ L
A3= 0,133 F1 L - (M3p+M3q)e2/ L
A4= 0,100 F1
A6= - 0,033 F1 L
A12= 0,133 F1 L - (M2p+M2q)e3/ L
A13= 0,133 F1 L + (M2p+M2q)e3/ L
C7= - 0,050 F1 e3 + 0,050 M2p + 0,100 M2q
C8= 0,050 F1 e2 + 0,050 M3p + 0,100 M3q
C9= - 0,100 F1 e3 + 0,250 M2p - 0,150 M2q
C10= - 0,100 F1 e2 - 0,250 M3p + 0,150 M3q
C13= 0,100 F1 e3 + 0,250 M2p + 0,150 M2q
C14= 0,100 F1 e2 - 0,250 M3p - 0,150 M3q
B2= 0,500 (M2p+M2q)e2/ L - 0,500 (M3p+M3q)e3/ L
B4= - Mt/ L + (M2p+M2q)e2/ L2 + (M3p+M3q)e3/ L2
B8= 0,500 Mt - 0,500 (M2p+M2q)e2/ L - 0,500 (M3p+M3q)e3/ L
D1= 1,200 (b1 F1+bq Mq)/ L - 0,825 (b2 M2p+b3 M3p)/ L + 0,375 (b2 M2q+b3 M3q)/ L
D3= 0,200 (b1 F1+bq Mq) L - 0,075 (b2 M2p+b3 M3p) L + 0,125 (b2 M2q+b3 M3q) L
D5= - 0,200 (b1 F1+bq Mq) + 0,200 (b2 M2p+b3 M3p)

C1= 1,050 F1 e3/ L + 0,950 M2p/ L - 0,100 M2q/ L
C2= - 1,050 F1 e2/ L + 0,950 M3p/ L - 0,100 M3q/ L
C5= - 1,050 F1 e3/ L + 0,050 M2p/ L + 1,100 M2q/ L
C6= 1,050 F1 e2/ L + 0,050 M3p/ L + 1,100 M3q/ L
C15= 0,100 F1 e3 L + 0,083 M2p L - 0,017 M2q L
C16= 0,100 F1 e2 L - 0,083 M3p L + 0,017 M3q L
C21= 0,150 F1 e3 + 0,200 M2p + 0,050 M2q
C22= 0,150 F1 e2 - 0,200 M3p - 0,050 M3q
C25= - 0,150 F1 e3 - 0,200 M2p + 0,450 M2q
C26= - 0,150 F1 e2 + 0,200 M3p - 0,450 M3q
C27= - 0,150 F1 e3 L - 0,033 M2p L + 0,117 M2q L
C28= - 0,150 F1 e2 L + 0,033 M3p L - 0,117 M3q L

Element 4

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy sztywny (R-R)
skręcanie -> węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy przegubowy (H-H)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	A1	.	C1	B4	A4	.	-A1	.	C5	-B4	A4	2
		A1	C2	-A4	B4	.	.	-A1	C6	-A4	-B4	3
			D1	C10	C9	.	-C1	-C2	-D1	C14	C13	4
				A12	B2	.	-B4	A4	C14	A6	-B8	5
					A2	.	-A4	-B4	C13	B8	A6	6
						.	.	.	.	.	.	7
							A1	.	-C5	B4	-A4	8
		symetria						A1	-C6	A4	B4	9
									D1	C26	C25	10
										A13	-B2	11
											A3	12

A1= 1,200 F1/ L
A2= 0,133 F1 L + (M3p+M3q)e2/ L
A3= 0,133 F1 L - (M3p+M3q)e2/ L
A4= 0,100 F1
A6= - 0,033 F1 L
A12= 0,133 F1 L - (M2p+M2q)e3/ L
A13= 0,133 F1 L + (M2p+M2q)e3/ L
C25= - 0,167 M2p + 0,333 M2q
C26= 0,167 M3p - 0,333 M3q
B2= 0,500 (M2p+M2q)e2/ L - 0,500 (M3p+M3q)e3/ L
B4= - Mt/ L + (M2p+M2q)e2/ L2 + (M3p+M3q)e3/ L2
B8= 0,500 Mt - 0,500 (M2p+M2q)e2/ L - 0,500 (M3p+M3q)e3/ L
D1= (b1 F1+bq Mq)/ L - 0,500 (b2 M2p+b3 M3p)/ L + 0,500 (b2 M2q+b3 M3q)/ L

C1= F1 e3/ L + M2p/ L
C2= - F1 e2/ L + M3p/ L
C5= - F1 e3/ L + M2q/ L
C6= F1 e2/ L + M3q/ L
C9= 0,333 M2p - 0,167 M2q
C10= - 0,333 M3p + 0,167 M3q
C13= 0,167 M2p + 0,167 M2q
C14= - 0,167 M3p - 0,167 M3q

Element 5

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy przegubowy (R-H)

skręcanie -> węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy sztywny (R-R)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	A1	B1	C1	B4	A4	C3	.	-A1	-B1	C5	C7	2
		A11	C2	A14	-B6	C4	.	-B1	-A11	C6	C8	3
			D1	C10	C9	D4	.	-C1	-C2	-D1	D5	4
				A12	B2	C12	.	-B4	-A14	C14	C16	5
					A2	C11	.	-A4	B6	C13	C15	6
						D2	.	-C3	-C4	-D4	D6	7
							.	.	.	.	.	8
			symetria					A1	B1	-C5	-C7	9
									A11	-C6	-C8	10
										D1	-D5	11
											D3	12

A1= 1,200 F1/ L - 2,250 (M3p+M3q)e2/ L3

A2= 0,200 F1 L + 0,750 (M3p+M3q)e2/ L

A4= 0,200 F1 - 0,750 (M3p+M3q)e2/ L2

A11= 1,200 F1/ L + 2,250 (M2p+M2q)e3/ L3

A12= 0,200 F1 L - 0,750 (M2p+M2q)e3/ L

A14= - 0,200 F1 - 0,750 (M2p+M2q)e3/ L2

C9= 0,050 F1 e3 + 0,300 M2p - 0,250 M2q

C10= 0,050 F1 e2 - 0,300 M3p + 0,250 M3q

C13= - 0,050 F1 e3 + 0,200 M2p

C14= - 0,050 F1 e2 - 0,200 M3p

C15= 0,100 F1 e3 L + 0,050 M2p L - 0,050 M2q L

C16= 0,100 F1 e2 L - 0,050 M3p L + 0,050 M3q L

B1= 1,125 (M2p+M2q)e2/ L3 - 1,125 (M3p+M3q)e3/ L3

B2= 0,375 (M2p+M2q)e2/ L - 0,375 (M3p+M3q)e3/ L

B4= - 0,750 Mt/ L + 0,375 (M2p+M2q)e2/ L2 + 1,125 (M3p+M3q)e3/ L2

B6= 0,750 Mt/ L - 1,125 (M2p+M2q)e2/ L2 - 0,375 (M3p+M3q)e3/ L2

D1= 1,200 (b1 F1+bq Mq)/ L - 0,600 (b2 M2p+b3 M3p)/ L + 0,600 (b2 M2q+b3 M3q)/ L

D2= 0,133 (b1 F1+bq Mq) L - 0,100 (b2 M2p+b3 M3p) L + 0,033 (b2 M2q+b3 M3q) L

D3= 0,133 (b1 F1+bq Mq) L - 0,033 (b2 M2p+b3 M3p) L + 0,100 (b2 M2q+b3 M3q) L

D4= - 0,100 (b1 F1+bq Mq) - 0,100 (b2 M2q+b3 M3q)

D5= - 0,100 (b1 F1+bq Mq) + 0,100 (b2 M2p+b3 M3p)

D6= - 0,033 (b1 F1+bq Mq) L + 0,017 (b2 M2p+b3 M3p) L - 0,017 (b2 M2q+b3 M3q) L

C1= 1,050 F1 e3/ L + 0,800 M2p/ L - 0,250 M2q/ L

C2= - 1,050 F1 e2/ L + 0,800 M3p/ L - 0,250 M3q/ L

C3= - 0,150 F1 e3 - 0,100 M2p + 0,050 M2q

C4= 0,150 F1 e2 - 0,100 M3p + 0,050 M3q

C5= - 1,050 F1 e3/ L + 0,200 M2p/ L + 0,500 M2q/ L

C6= 1,050 F1 e2/ L + 0,200 M3p/ L + 0,500 M3q/ L

C7= 0,100 F1 e3 + 0,050 M2p - 0,050 M2q

C8= - 0,100 F1 e2 + 0,050 M3p - 0,050 M3q

C11= - 0,150 F1 e3 L - 0,100 M2p L + 0,050 M2q L

C12= - 0,150 F1 e2 L + 0,100 M3p L - 0,050 M3q L

Element 6

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy przegubowy (R-H)
skręcanie -> węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy przegubowy (R-H)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	A1	B1	C1	B4	A4	C3	.	-A1	-B1	C5	2
		A11	C2	A14	-B6	C4	.	-B1	-A11	C6	3
			D1	C10	C9	D4	.	-C1	-C2	-D1	4
				A12	B2	C12	.	-B4	-A14	C14	5
					A2	C11	.	-A4	B6	C13	6
						D2	.	-C3	-C4	-D4	7
		symetria					.	.	.	.	8
								A1	B1	-C5	9
									A11	-C6	10
										D1	11

A1= 1,200 F1/ L - 2,250 (M3p+M3q)e2/ L3
A2= 0,200 F1 L + 0,750 (M3p+M3q)e2/ L
A4= 0,200 F1 - 0,750 (M3p+M3q)e2/ L2
A11= 1,200 F1/ L + 2,250 (M2p+M2q)e3/ L3
A12= 0,200 F1 L - 0,750 (M2p+M2q)e3/ L
A14= - 0,200 F1 - 0,750 (M2p+M2q)e3/ L2
C9= 0,200 F1 e3 + 0,375 M2p - 0,325 M2q
C10= 0,200 F1 e2 - 0,375 M3p + 0,325 M3q
C11= - 0,200 F1 e3 L - 0,125 M2p L + 0,075 M2q L
C12= - 0,200 F1 e2 L + 0,125 M3p L - 0,075 M3q L
C13= - 0,200 F1 e3 + 0,125 M2p + 0,075 M2q
C14= - 0,200 F1 e2 - 0,125 M3p - 0,075 M3q
B1= 1,125 (M2p+M2q)e2/ L3 - 1,125 (M3p+M3q)e3/ L3
B2= 0,375 (M2p+M2q)e2/ L - 0,375 (M3p+M3q)e3/ L
B4= - 0,750 Mt/ L + 0,375 (M2p+M2q)e2/ L2 + 1,125 (M3p+M3q)e3/ L2
B6= 0,750 Mt/ L - 1,125 (M2p+M2q)e2/ L2 - 0,375 (M3p+M3q)e3/ L2
D1= 1,200 (b1 F1+bq Mq)/ L - 0,375 (b2 M2p+b3 M3p)/ L + 0,825 (b2 M2q+b3 M3q)/ L
D2= 0,200 (b1 F1+bq Mq) L - 0,125 (b2 M2p+b3 M3p) L + 0,075 (b2 M2q+b3 M3q) L
D4= - 0,200 (b1 F1+bq Mq) - 0,200 (b2 M2q+b3 M3q)

C1= 1,200 F1 e3/ L + 0,875 M2p/ L - 0,325 M2q/ L
C2= - 1,200 F1 e2/ L + 0,875 M3p/ L - 0,325 M3q/ L
C3= - 0,200 F1 e3 - 0,125 M2p + 0,075 M2q
C4= 0,200 F1 e2 - 0,125 M3p + 0,075 M3q
C5= - 1,200 F1 e3/ L + 0,125 M2p/ L + 0,575 M2q/ L
C6= 1,200 F1 e2/ L + 0,125 M3p/ L + 0,575 M3q/ L

Element 7

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy przegubowy (R-H)
skręcanie -> węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy sztywny (H-R)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	A1	B1	C1	B4	A4	.	-A1	-B1	C5	C7	2
		A11	C2	A14	-B6	.	-B1	-A11	C6	C8	3
			D1	C10	C9	.	C17	C18	-D1	D5	4
				A12	B2	.	-B4	-A14	C14	C16	5
					A2	.	-A4	B6	C13	C15	6
						.	.	.	.	.	7
		symetria					A1	B1	-C5	-C7	8
								A11	-C6	-C8	9
									D1	-D5	10
										D3	11

A1= 1,200 F1/ L - 2,250 (M3p+M3q)e2/ L3
A2= 0,200 F1 L + 0,750 (M3p+M3q)e2/ L
A4= 0,200 F1 - 0,750 (M3p+M3q)e2/ L2
A11= 1,200 F1/ L + 2,250 (M2p+M2q)e3/ L3
A12= 0,200 F1 L - 0,750 (M2p+M2q)e3/ L
A14= - 0,200 F1 - 0,750 (M2p+M2q)e3/ L2
C13= 0,175 F1 e3 + 0,350 M2p - 0,075 M2q
C14= 0,175 F1 e2 - 0,350 M3p + 0,075 M3q
C15= 0,175 F1 e3 L + 0,100 M2p L - 0,075 M2q L
C16= 0,175 F1 e2 L - 0,100 M3p L + 0,075 M3q L
C17= - 0,825 F1 e3/ L - 0,650 M2p/ L + 0,175 M2q/ L
C18= 0,825 F1 e2/ L - 0,650 M3p/ L + 0,175 M3q/ L
B1= 1,125 (M2p+M2q)e2/ L3 - 1,125 (M3p+M3q)e3/ L3
B2= 0,375 (M2p+M2q)e2/ L - 0,375 (M3p+M3q)e3/ L
B4= - 0,750 Mt/ L + 0,375 (M2p+M2q)e2/ L2 + 1,125 (M3p+M3q)e3/ L2
B6= 0,750 Mt/ L - 1,125 (M2p+M2q)e2/ L2 - 0,375 (M3p+M3q)e3/ L2
D1= 1,200 (b1 F1+bq Mq)/ L - 0,825 (b2 M2p+b3 M3p)/ L + 0,375 (b2 M2q+b3 M3q)/ L
D3= 0,200 (b1 F1+bq Mq) L - 0,075 (b2 M2p+b3 M3p) L + 0,125 (b2 M2q+b3 M3q) L
D5= - 0,200 (b1*F1+bq*Mq) + 0,200 (b2 M2p+b3 M3p)

C1= 0,825 F1 e3/ L + 0,650 M2p/ L - 0,175 M2q/ L
C2= - 0,825 F1 e2/ L + 0,650 M3p/ L - 0,175 M3q/ L
C5= - 0,825 F1 e3/ L + 0,350 M2p/ L + 0,425 M2q/ L
C6= 0,825 F1 e2/ L + 0,350 M3p/ L + 0,425 M3q/ L
C7= 0,175 F1 e3 + 0,100 M2p - 0,075 M2q
C8= - 0,175 F1 e2 + 0,100 M3p - 0,075 M3q
C9= - 0,175 F1 e3 + 0,150 M2p - 0,175 M2q
C10= - 0,175 F1 e2 - 0,150 M3p + 0,175 M3q

Element 8

zginanie ->węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy przegubowy (R-H)
skręcanie -> węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy przegubowy (H-H)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	A1	B1	C1	B4	A4	.	-A1	-B1	C5	2
		A11	C2	A14	-B6	.	-B1	-A11	C6	3
			D1	C10	C9	.	-C1	.-C2	-D1	4
				A12	B2	.	-B4	-A14	C14	5
					A2	.	-A4	B6	C13	6
		symetria				.	.	.	.	7
							A1	B1	-C5	8
								A11	-C6	9
									D1	10

A1= 1,200 F1/ L - 2,250 (M3p+M3q)e2/ L3
A2= 0,200 F1 L + 0,750 (M3p+M3q)e2/ L
A4= 0,200 F1 - 0,750 (M3p+M3q)e2/ L2
A11= 1,200 F1/ L + 2,250 (M2p+M2q)e3/ L3
A12= 0,200 F1 L - 0,750 (M2p+M2q)e3/ L
A14= - 0,200 F1 - 0,750 (M2p+M2q)e3/ L2
C1= F1 e3/ L + 0,750 M2p/ L - 0,250 M2q/ L
C2= - F1 e2/ L + 0,750 M3p/ L - 0,250 M3q/ L
B1= 1,125 (M2p+M2q)e2/ L3 - 1,125 (M3p+M3q)e3/ L3
B2= 0,375 (M2p+M2q)e2/ L - 0,375 (M3p+M3q)e3/ L
B4= - 0,750 Mt/ L + 0,375 (M2p+M2q)e2/ L2 + 1,125 (M3p+M3q)e3/ L2
B6= 0,750 Mt/ L - 1,125 (M2p+M2q)e2/ L2 - 0,375 (M3p+M3q)e3/ L2
D1= (b1 F1+bq Mq)/ L - 0,500 (b2 M2p+b3 M3p)/ L + 0,500 (b2 M2q+b3 M3q)/ L

C5= - F1 e3/ L + 0,250 M2p/ L + 0,500 M2q/ L
C6= F1 e2/ L + 0,250 M3p/ L + 0,500 M3q/ L
C9= 0,250 M2p - 0,250 M2q
C10= - 0,250 M3p + 0,250 M3q
C13= 0,250 M2p
C14= - 0,250 M3p

Element 9

zginanie ->węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy sztywny (H-R)
skręcanie -> węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy sztywny (R-R)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	A1	B1	C1	C3	.	-A1	-B1	C5	B5	A5	C7	2
		A11	C2	C4	.	-B1	-A11	C6	A15	-B9	C8	3
			D1	D4	.	-C1	-C2	-D1	C22	C21	D5	4
				D2	.	-C3	-C4	-D4	C24	C23	D6	5
					.	.	.	.	.	.	.	6
						A1	B1	-C5	-B5	-A5	-C7	7
							A11	-C6	-A15	B9	-C8	8
			symetria					D1	C26	C25	-D5	9
									A13	B3	C28	10
										A3	C27	11
											D3	12

$A1= 1{,}200\ F1/\ L + 2{,}250\ (M3p+M3q)e2/\ L3$
$A3= 0{,}200\ F1\ L - 0{,}750\ (M3p+M3q)e2/\ L$
$A5= 0{,}200\ F1 + 0{,}750\ (M3p+M3q)e2/\ L2$
$A11= 1{,}200\ F1/\ L - 2{,}250\ (M2p+M2q)e3/\ L3$
$A13= 0{,}200\ F1\ L + 0{,}750\ (M2p+M2q)e3/\ L$
$A15= -0{,}200\ F1 + 0{,}750\ (M2p+M2q)e3/\ L2$
$C21= 0{,}050\ F1\ e3 + 0{,}200\ M2q$
$C22= 0{,}050\ F1\ e2 - 0{,}200\ M3q$
$C23= 0{,}100\ F1\ e3\ L + 0{,}050\ M2p\ L - 0{,}050\ M2q\ L$
$C24= 0{,}100\ F1\ e2\ L - 0{,}050\ M3p\ L + 0{,}050\ M3q\ L$
$C25= -0{,}050\ F1\ e3 - 0{,}250\ M2p + 0{,}300\ M2q$
$C26= -0{,}050\ F1\ e2 + 0{,}250\ M3p - 0{,}300\ M3q$
$C27= -0{,}150\ F1\ e3\ L - 0{,}050\ M2p\ L + 0{,}100\ M2q\ L$
$C28= -0{,}150\ F1\ e2\ L + 0{,}050\ M3p\ L - 0{,}100\ M3q\ L$
$B1= -1{,}125\ (M2p+M2q)e2/\ L3 + 1{,}125\ (M3p+M3q)e3/\ L3$
$B3= -0{,}375\ (M2p+M2q)e2/\ L + 0{,}375\ (M3p+M3q)e3/\ L$
$B5= 0{,}750\ Mt/\ L - 0{,}375\ (M2p+M2q)e2/\ L2 - 1{,}125\ (M3p+M3q)e3/\ L2$
$B9= -0{,}750\ Mt/\ L + 1{,}125\ (M2p+M2q)e2/\ L2 + 0{,}375\ (M3p+M3q)e3/\ L2$
$D1= 1{,}200\ (b1\ F1+bq\ Mq)/\ L - 0{,}600\ (b2\ M2p+b3\ M3p)/\ L + 0{,}600\ (b2\ M2q+b3\ M3q)/\ L$
$D2= 0{,}133\ (b1\ F1+bq\ Mq)\ L - 0{,}100\ (b2\ M2p+b3\ M3p)\ L + 0{,}033\ (b2\ M2q+b3\ M3q)\ L$
$D3= 0{,}133\ (b1\ F1+bq\ Mq)\ L - 0{,}033\ (b2\ M2p+b3\ M3p)\ L + 0{,}100\ (b2\ M2q+b3\ M3q)\ L$
$D4= -0{,}100\ (b1\ F1+bq\ Mq) - 0{,}100\ (b2\ M2q+b3\ M3q)$
$D5= -0{,}100\ (b1*F1+bq*Mq) + 0{,}100\ (b2\ M2p+b3\ M3p)$
$D6= -0{,}033\ (b1\ F1+bq\ Mq)\ L + 0{,}017\ (b2\ M2p+b3\ M3p)\ L - 0{,}017\ (b2\ M2q+b3\ M3q)\ L$

$C1= 1{,}050\ F1\ e3/\ L + 0{,}500\ M2p/\ L + 0{,}200\ M2q/\ L$
$C2= -1{,}050\ F1\ e2/\ L + 0{,}500\ M3p/\ L + 0{,}200\ M3q/\ L$
$C3= 0{,}100\ F1\ e3 + 0{,}050\ M2p - 0{,}050\ M2q$
$C4= -0{,}100\ F1\ e2 + 0{,}050\ M3p - 0{,}050\ M3q$
$C5= -1{,}050\ F1\ e3/\ L - 0{,}250\ M2p/\ L + 0{,}800\ M2q/\ L$
$C6= 1{,}050\ F1\ e2/\ L - 0{,}250\ M3p/\ L + 0{,}800\ M3q/\ L$
$C7= -0{,}150\ F1\ e3 - 0{,}050\ M2p + 0{,}100\ M2q$
$C8= 0{,}150\ F1\ e2 - 0{,}050\ M3p + 0{,}100\ M3q$

Element 10

zginanie ->węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy sztywny (H-R)
skręcanie -> węzeł początkowy sztywny - węzeł końcowy przegubowy (R-H)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	A1	B1	C1	C3	.	-A1	-B1	C5	B5	A5	2
		A11	C2	C4	.	-B1	-A11	C6	A15	-B9	3
			D1	D4	.	-C1	-C2	-D1	C22	C21	4
				D2	.	-C3	-C4	-D4	C24	C23	5
					.	.	.	.	.	.	6
						A1	B1	-C5	-B5	-A5	7
		symetria					A11	-C6	-A15	B9	8
								D1	C26	C25	9
									A13	B3	10
										A3	11

A1= 1,200 F1/ L + 2,250 (M3p+M3q)e2/ L3
A3= 0,200 F1 L - 0,750 (M3p+M3q)e2/ L
A5= 0,200 F1 + 0,750 (M3p+M3q)e2/ L2
A11= 1,200 F1/ L - 2,250 (M2p+M2q)e3/ L3
A13= 0,200 F1 L + 0,750 (M2p+M2q)e3/ L
A15= - 0,200 F1 + 0,750 (M2p+M2q)e3/ L2
C21= - 0,175 F1 e3 - 0,075 M2p + 0,350 M2q
C22= - 0,175 F1 e2 + 0,075 M3p - 0,350 M3q
C23= 0,175 F1 e3 L + 0,075 M2p L - 0,100 M2q L
C24= 0,175 F1 e2 L - 0,075 M3p L + 0,100 M3q L
C25= 0,175 F1 e3 - 0,175 M2p + 0,150 M2q
C26= 0,175 F1 e2 + 0,175 M3p - 0,150 M3q
B1= - 1,125 (M2p+M2q)e2/ L3 + 1,125 (M3p+M3q)e3/ L3
B3= - 0,375 (M2p+M2q)e2/ L + 0,375 (M3p+M3q)e3/ L
B5= 0,750 Mt/ L - 0,375 (M2p+M2q)e2/ L2 - 1,125 (M3p+M3q)e3/ L2
B9= - 0,750 Mt/ L + 1,125 (M2p+M2q)e2/ L2 + 0,375 (M3p+M3q)e3/ L2
D1= 1,200 (b1 F1+bq Mq)/ L - 0,375 (b2 M2p+b3 M3p)/ L + 0,825 (b2 M2q+b3 M3q)/ L
D2= 0,200 (b1 F1+bq Mq) L - 0,125 (b2 M2p+b3 M3p) L + 0,075 (b2 M2q+b3 M3q) L
D4= - 0,200 (b1 F1+bq Mq) - 0,200 (b2 M2q+b3 M3q)

C1= 0,825 F1 e3/ L + 0,425 M2p/ L + 0,350 M2q/ L
C2= - 0,825 F1 e2/ L + 0,425 M3p/ L + 0,350 M3q/ L
C3= 0,175 F1 e3 + 0,075 M2p - 0,100 M2q
C4= - 0,175 F1 e2 + 0,075 M3p - 0,100 M3q
C5= - 0,825 F1 e3/ L - 0,175 M2p/ L + 0,650 M2q/ L
C6= 0,825 F1 e2/ L - 0,175 M3p/ L + 0,650 M3q/ L

Element 11

zginanie ->węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy sztywny (H-R)
skręcanie -> węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy sztywny (H-R)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	A1	B1	C1	.	-A1	-B1	C5	B5	A5	C7	2
		A11	C2	.	-B1	-A11	C6	A15	-B9	C8	3
			D1	.	-C1	-C2	-D1	C22	C21	D5	4
				.	.	.	.	.	.	.	5
					A1	B1	-C5	-B5	-A5	-C7	6
						A11	-C6	-A15	B9	-C8	7
	symetria						D1	C26	C25	-D5	8
								A13	B3	C28	9
									A3	C27	10
										D3	11

A1= 1,200 F1/ L + 2,250 (M3p+M3q)e2/ L3
A3= 0,200 F1 L - 0,750 (M3p+M3q)e2/ L
A5= 0,200 F1 + 0,750 (M3p+M3q)e2/ L2
A11= 1,200 F1/ L - 2,250 (M2p+M2q)e3/ L3
A13= 0,200 F1 L + 0,750 (M2p+M2q)e3/ L
A15= - 0,200 F1 + 0,750 (M2p+M2q)e3/ L2
C21= 0,200 F1 e3 + 0,075 M2p + 0,125 M2q
C22= 0,200 F1 e2 - 0,075 M3p - 0,125 M3q
C25= - 0,200 F1 e3 - 0,325 M2p + 0,375 M2q
C26= - 0,200 F1 e2 + 0,325 M3p - 0,375 M3q
C27= - 0,200 F1 e3 L - 0,075 M2p L + 0,125 M2q L
C28= - 0,200 F1 e2 L + 0,075 M3p L - 0,125 M3q L
B1= - 1,125 (M2p+M2q)e2/ L3 + 1,125 (M3p+M3q)e3/ L3
B3= - 0,375 (M2p+M2q)e2/ L + 0,375 (M3p+M3q)e3/ L
B5= 0,750 Mt/ L - 0,375 (M2p+M2q)e2/ L2 - 1,125 (M3p+M3q)e3/ L2
B9= - 0,750 Mt/ L + 1,125 (M2p+M2q)e2/ L2 + 0,375 (M3p+M3q)e3/ L2
D1= 1,200 (b1 F1+bq Mq)/ L - 0,825 (b2 M2p+b3 M3p)/ L + 0,375 (b2 M2q+b3 M3q)/ L
D3= 0,200 (b1 F1+bq Mq) L - 0,075 (b2 M2p+b3 M3p) L + 0,125 (b2 M2q+b3 M3q) L
D5= - 0,200 (b1*F1+bq*Mq) + 0,200 (b2 M2p+b3 M3p)

C1= 1,200 F1 e3/ L + 0,575 M2p/ L + 0,125 M2q/ L
C2= - 1,200 F1 e2/ L + 0,575 M3p/ L + 0,125 M3q/ L
C5= - 1,200 F1 e3/ L - 0,325 M2p/ L + 0,875 M2q/ L
C6= 1,200 F1 e2/ L - 0,325 M3p/ L + 0,875 M3q/ L
C7= - 0,200 F1 e3 - 0,075 M2p + 0,125 M2q
C8= 0,200 F1 e2 - 0,075 M3p + 0,125 M3q

Element 12

zginanie ->węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy sztywny (H-R)
skręcanie -> węzeł początkowy przegubowy - węzeł końcowy przegubowy (H-H)

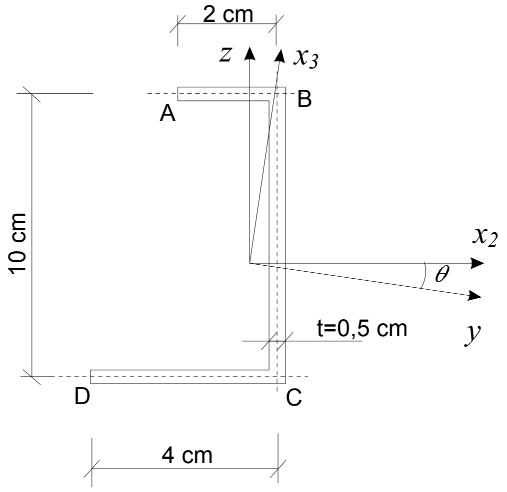
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	A1	B1	C1	.	-A1	-B1	C5	B5	A5	2
		A11	C2	.	-B1	-A11	C6	A15	-B9	3
			D1	.	-C1	-C2	-D1	C22	C21	4
				.	.	.	.	.	.	5
					A1	B1	-C5	-B5	-A5	6
		symetria				A11	-C6	-A15	B9	7
							D1	C26	C25	8
								A13	B3	9
									A3	10

A1= 1,200 F1/ L + 2,250 (M3p+M3q)e2/ L3
A3= 0,200 F1 L - 0,750 (M3p+M3q)e2/ L
A5= 0,200 F1 + 0,750 (M3p+M3q)e2/ L2
A11= 1,200 F1/ L - 2,250 (M2p+M2q)e3/ L3
A13= 0,200 F1 L + 0,750 (M2p+M2q)e3/ L
A15= - 0,200 F1 + 0,750 (M2p+M2q)e3/ L2
C1= F1 e3/ L + 0,500 M2p/ L + 0,250 M2q/ L
C2= - F1 e2/ L + 0,500 M3p/ L + 0,250 M3q/ L
B1= - 1,125 (M2p+M2q)e2/ L3 + 1,125 (M3p+M3q)e3/ L3
B3= - 0,375 (M2p+M2q)e2/ L + 0,375 (M3p+M3q)e3/ L
B5= 0,750 Mt/ L - 0,375 (M2p+M2q)e2/ L2 - 1,125 (M3p+M3q)e3/ L2
B9= - 0,750 Mt/ L + 1,125 (M2p+M2q)e2/ L2 + 0,375 (M3p+M3q)e3/ L2
D1= (b1 F1+bq Mq)/ L - 0,500 (b2 M2p+b3 M3p)/ L + 0,500 (b2 M2q+b3 M3q)/ L

C5= - F1 e3/ L - 0,250 M2p/ L + 0,750 M2q/ L
C6= F1 e2/ L - 0,250 M3p/ L + 0,750 M3q/ L
C21= 0,250 M2q
C22= - 0,250 M3q
C25= - 0,250 M2p + 0,250 M2q
C26= 0,250 M3p - 0,250 M3q

D4. Charakterystyki geometryczne przekrojów cienkościennych (dla przykładów 8.1 i 8.3)

D4.1 Przekrój niesymetyczny (Ad 8.1)



Rys. D4.1

$A = 8\ \mathrm{cm}^2$

$y_c = -0{,}625\ \mathrm{cm}$

$z_c = 4{,}375\ \mathrm{cm}$

$I_y = 113{,}604\ \mathrm{cm}^4$

$I_z = 8{,}9792\ \mathrm{cm}^4$

$I_{yz} = 11{,}875\ \mathrm{cm}^4$

$$I_{2,3} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$I_2 = 114{,}935\ \mathrm{cm}^4$

$I_3 = 7{,}6483\ \mathrm{cm}^4$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{I_y - I_2}{I_{yz}}$$

$\theta = -0{,}11161$ rad

Macierz transformacji z układu (y,z) do (x_2,x_3) ma postać:

$$T = \begin{bmatrix} 0{,}993778 & -0{,}111378 \\ 0{,}111378 & 0{,}993778 \end{bmatrix},$$

a punkty narożne mają współrzędne :

w układzie (y,z)	w układzie (x_2,x_3) – w osiach głównych centralnych
A = [-1,375 ; 5,625]	A = (-1,992944 ; 5,436858)
B = [0,625 ; 5,625]	B = (-0,005388 ; 5,659613)
C = [0,625 ; -4,375]	C = (1,108388 ; -4,2782168)
D = [-3,375 ; -4,375]	D = (-2,866724 ; -4,723679)

Obliczenie współrzędnej wycinkowej dla bieguna **B**=(0,0) *i punktu zerowego Q*=(0,628913;0) (*Q* = [0,625 ; -0,070047])

Krawędź *Q*-B

$0 < s < 5{,}695047$

$\phi_B(s) = -0{,}625\ s$

$\phi_B(0) = 0$

$\phi_B(5{,}695047) = -3{,}559404$

Krawędź *Q*-C

$0 < s < 4{,}304953$

$\phi_B(s) = 0{,}625\ s$

$\phi_B(0) = 0$

$\phi_B(4{,}304953) = 2{,}690596$

Krawędź B-A

$5{,}695047 < s < 7{,}695047$

$\phi_B(s) = -3{,}559404 - 5{,}625\ (s - 5{,}695047)$

$\phi_B(5{,}695047) = -3{,}559404$

$\phi_B(7{,}695047) = -14{,}809404$

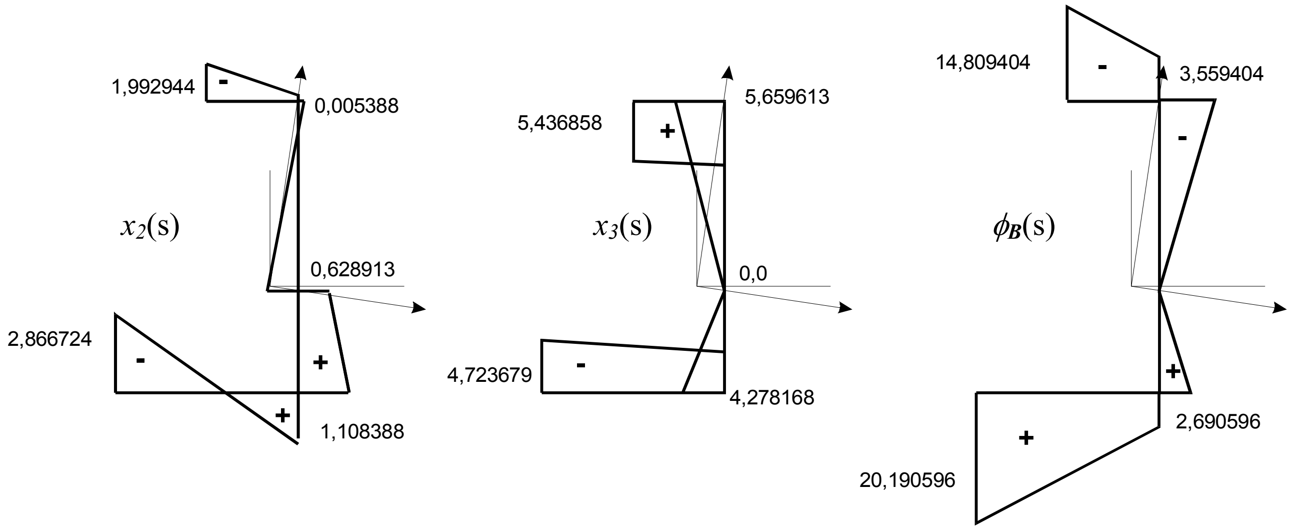
Krawędź C-D

$4{,}304953 < s < 8{,}304953$

$\phi_B(s) = 2{,}690596 + 4{,}375\ (s - 4{,}304953)$

$\phi_B(4{,}304953) = 2{,}690596$

$\phi_B(8{,}304953) = 20{,}190596$



Rys D4.2

Obliczanie środka ścinania

$$I_{\phi x_2} = \int_0^s \phi_B(s)\ x_2(s)\ t\ ds = -18{,}9678\ \text{cm}^5 \qquad I_{\phi x_3} = \int_0^s \phi_B(s)\ x_3(s)\ t\ ds = -182{,}4142\ \text{cm}^5$$

$$e_2 = -\frac{I_{\phi x_3}}{I_2} + x_{2B} = 1{,}587107\ \text{cm} \qquad e_3 = \frac{I_{\phi x_2}}{I_3} + x_{3B} = 2{,}480012\ \text{cm}$$

Zmiana bieguna do środka ścinania S = (1,587107 ; 2,480012) (*S* = [1,301014 ; -2,64135]) *(Rys D4.3)*

$$\phi_S(s) = \phi_B(s) - (e_3 - x_{3B})\lfloor x_2(s) - x_{2Q}\rfloor + (e_2 - x_{2B})\lfloor x_3(s) - x_{3Q}\rfloor$$

$$\phi_S(s) = \phi_B(s) + 2{,}480012\ [x_2(s) - 0{,}628913] + 1{,}587107 x_3(s)$$

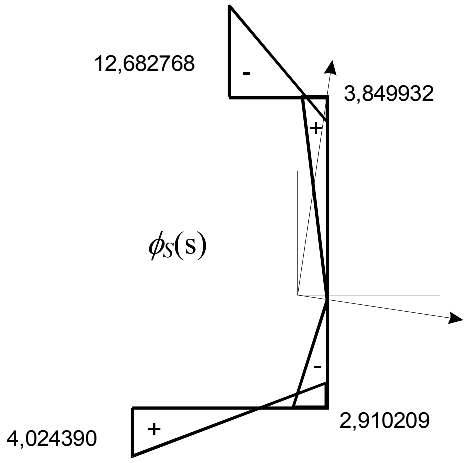
Obliczanie głównego zerowego punktu współrzędnej wycinkowej

$$S_{\phi_S} = \int_0^s \phi_S(s)\, t\, ds = \text{-0,952929 cm}^4$$

$$\phi_S(Q,O) = \frac{S_{\phi_S}}{A} = \text{-0,119116 cm}^2$$

z proporcji odcinków O*Q* i C*Q* oraz współrzędnych wycinkowych ϕ_S(O,*Q*) i ϕ_S(*Q*,C)

O*Q* = 0,176204



Rys D4.3

Obliczanie współrzędnej wycinkowej dla bieguna S = (1,587107 ; 2,480012) *i głównego punktu zerowego O* = (0,648538 ; -0,175107) (*O* = [0,625 ; -0,24625])

Krawędź *O*-B

0 < s < 5,87125

ϕ_S (s) = 0,676014 s

ϕ_S (0) = 0

ϕ_S (5,87125) = 3,96049

Krawędź *O*-C

0 < s < 4,12875

ϕ_S (s) = -0,676014 s

ϕ_S (0) = 0

ϕ_S (4,12875) = -2,791093

Krawędź B-A

5,87125< s < 7,695047

ϕ_S (s) = 3,96049 – 826635 (s -5,87125)

ϕ_S (5,87125) = 3,96049

ϕ_S (7,695047) = -12,563652

Krawędź C-D

4,12875< s < 8,12875

ϕ_S (s) = -2,791093+ 1,73365 (s -4,12875)

ϕ_S (4,12875) = -2,791093

ϕ_S (8,12875) = 4,143506

Pozostałe charakterystyki przekroju

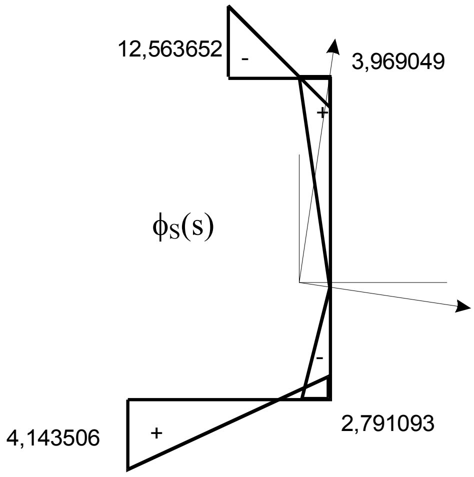
$$r^2 = x_2^2 + x_3^2$$

$$I_\phi = \int_o^s \phi_S^2(s)\, t\, ds = 70{,}9495 \text{ cm}^6$$

$$\beta_1 = e_2^2 + e_3^2 + \frac{I_2 + I_3}{A} = 23{,}9923 \text{ cm}^2$$

$$I_{3r} = \int_o^s r^2\, x_3\, t\, ds = 59{,}2496 \text{ cm}^5$$

$$\beta_2 = \frac{I_{3r}}{I_2} - 2\, e_3 = 5{,}4755 \text{ cm}$$



Rys D4.4

$$I_{2r} = \int_o^s r^2\, x_2\, t\, ds = \text{-}59{,}6158 \text{ cm}^5$$

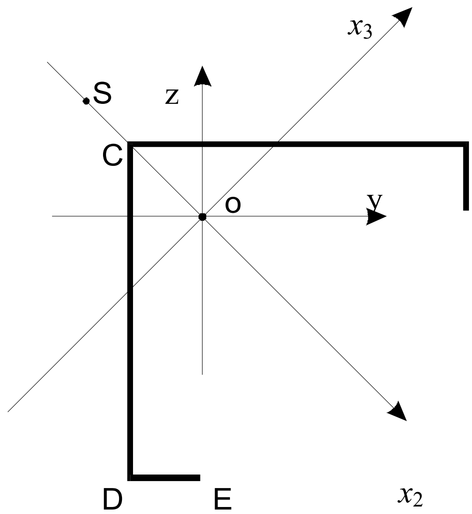
$$\beta_3 = -\frac{I_{2r}}{I_3} + 2\, e_2 = 10{,}9689 \text{ cm}$$

$$I_S = \tfrac{1}{3} t^3\, (AB + BC + CD) = 0{,}6667 \text{ cm}^4$$

$$I_{\phi r} = \int_0^s r^2\, \phi_S\, t\, ds = \text{-}35{,}0625 \text{ cm}^5$$

$$\beta_\phi = \frac{I_{\phi r}}{I_\phi} = \text{-}0{,}4942 \text{ cm}$$

D4.2 Przekrój monosymetryczny



Rys.D4.5

AB = 30 mm BC = 150 mm

t = 10 mm A = 8 cm^2

y_c = 4,5 cm z_c = -4,5 cm

I_y = 1081,5 cm^4 I_z = 1081,5 cm^4

I_{yz} = 594 cm^4

$$I_{2,3} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

I_2 = 1675,5 cm^4 I_3 = 487,5 cm^4

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{I_y - I_2}{I_{yz}}$$

θ = -0,785398 rad

Macierz transformacji z układu (y,z) do (x_2,x_3) ma postać:

$$T = \begin{bmatrix} 0{,}707107 & -0{,}707107 \\ 0{,}707107 & 0{,}707107 \end{bmatrix},$$

a punkty narożne mają współrzędne :

w układzie (y,z)	w układzie (x_2,x_3) – w osiach głównych centralnych
A = [10,5 ; 1,5]	A = (6,363961 ; 8,485281)
B = [10,5 ; 4,5]	B = (4,242641 ; 10,606602)
C = [-4,5 ; 4,5]	C = (-6,363961 ; 0,0)
D = [-4,5 ; -10,5]	D = (4,242641 ; -10,606602)
E = [-1,5 ; -10,5]	E = (6,363961 ; -8,485281)

Obliczenie współrzędnej wycinkowej dla bieguna **B**=(0,0) *i punktu zerowego* C=(-6,363961;0,0) (C = [4,5 ; -4,5])

Krawędź C-B

0 < s < 15,0

ϕ_B (s) = 4,5 s

ϕ_B (0) = 0,0

ϕ_B (15) = 67,5

Krawędź C-D

0 < s < 15,0

ϕ_B (s) = -4,5 s

ϕ_B (0) = 0

ϕ_B (15,0) = -67,5

Krawędź B-A

15,0 < s < 18,0

ϕ_B (s) = 67,5 +10,5 (s –15,0)

ϕ_B (15,0) = 67,5

ϕ_B (18,0) = 99,0

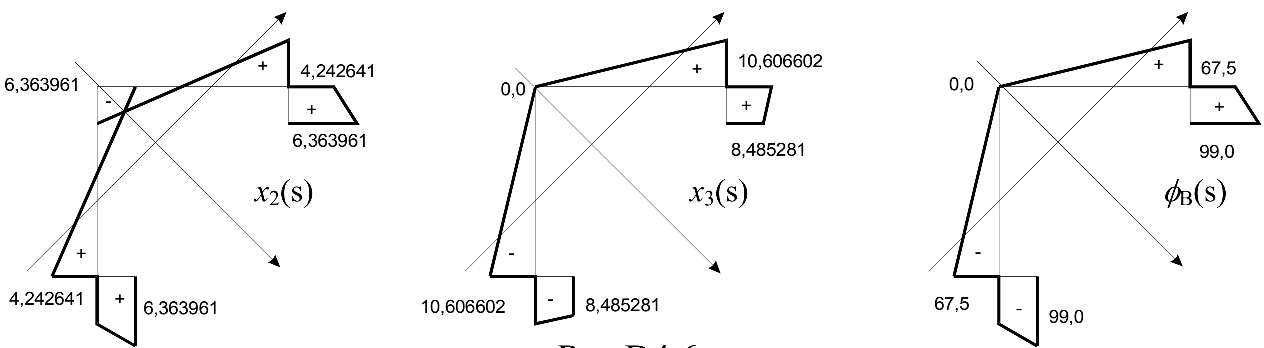
Krawędź D-E

15,0< s < 18,0

ϕ_B (s) = -67,5-10,5 (s –15,0)

ϕ_B (15,0) = -67,5

ϕ_B (18,0) = -99,0



Rys.D4.6

Obliczanie środka ścinania

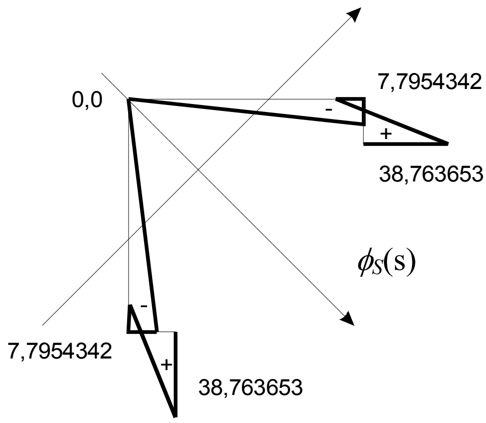
$$I_{\phi x_2} = \int_0^s \phi_B(s)\ x_2(s)\ t\ ds = 0{,}0\ \text{cm}^5 \qquad I_{\phi x_3} = \int_0^s \phi_B(s)\ x_3(s)\ t\ ds = 11894{,}2\ \text{cm}^5$$

$$e_2 = -\frac{I_{\phi x_3}}{I_2} + x_{2B} = -7{,}09892\ \text{cm} \qquad e_3 = \frac{I_{\phi x_2}}{I_3} + x_{3B} = 0{,}0\ \text{cm}$$

Zmiana bieguna do środka ścinanie S = (-7,09892; 0,0) (*S* = [-5,019696 ; -5,019696]) *(Rys D4.7)*

$$\phi_S(s) = \phi_B(s) - (e_3 - x_{3B})\lfloor x_2(s) - x_{2Q} \rfloor + (e_2 - x_{2B})\lfloor x_3(s) - x_{3Q} \rfloor$$

$$\phi_S(s) = \phi_B(s) - 7{,}09892\ \ x_3(s)$$



Rys.D4.7

Obliczanie głównego zerowego punktu współrzędnej wycinkowej

$$S_{\phi_S} = \int_0^s \phi_S(s)\, t\, ds = 0{,}0\ \text{cm}^4$$

Wierzchołek C jest głównym zerowym punktem współrzędnej wycinkowej

Pozostałe charakterystyki przekroju

$$r^2 = x_2^2 + x_3^2$$

$$I_\phi = \int_o^s \phi_S^2(s)\, t\, ds = 3130{,}108\ \text{cm}^6 \qquad \beta_1 = e_2^2 + e_3^2 + \frac{I_2 + I_3}{A} = 110{,}478\text{cm}^2$$

$$I_{3r} = \int_o^s r^2\ x_3\ t\, ds = 0{,}0\ \text{cm}^5 \qquad \beta_2 = \frac{I_{3r}}{I_2} - 2\, e_3 = 0{,}0\ \text{cm}$$

$$I_{2r} = \int_o^s r^2\ x_2\ t\, ds = 6519{,}878\ \text{cm}^5 \qquad \beta_3 = -\frac{I_{2r}}{I_3} + 2\, e_2 = -27{,}572\ \text{cm}$$

$$I_{\phi r} = \int_0^s r^2\ \phi_S\ t\, ds = 0{,}0\ \text{cm}^5 \qquad \beta_\phi = \frac{I_{\phi r}}{I_\phi} = 0{,}0\ \text{cm}$$

$$I_S = \tfrac{1}{3} t^3\ (AB + BC + CD + DE) = 12{,}0\ \text{cm}^4$$

D5. Wydruki procedur obliczenia macierzy liniowej sztywności (lkim.for) i macierzy sztywności geometrycznej (gkim.for) dla systemu MANKA

D5.1 Plik lkim.for

```
      SUBROUTINE MACL01 ( RMS, KS )
C
C-----------------------------------------------------------------------
C+    LINIOWA MACIERZ SZTYWNOSCI
C+    ELEMENT CIENKOSCIENNY PRZESTRZENNY - BSW1
C+    OPRACOWANY PRZEZ Z. WASZCZYSZYNA I CZ. CICHONIA
C+    zmiana definicji deplanacji
C+    - praca dyplomowa - Piotr Plucinski – zmiana oznaczeń
C-----------------------------------------------------------------------
C
C         PARAMETRY -
C           WEJSCIE :
C             KS=0  Obliczanie liniowej macierzy sztywnosci RMS
C             KS=1  Wydruk sil wewnetrznych w ukladzie lokalnym elementu
C           WYJSCIE -
C             RMS   Liniowa macierz sztywnosci 14*14
C
C     UWAGA : Macierz transformacji jest jednostkowa  ( V.94 )
C
C-----------------------------------------------------------------------

$INCLUDE:'ELEMTWOJ.INC'
$INCLUDE:'ELEMCPRZ.INC'

      REAL *8 RMS(MXSWEL,MXSWEL)
      REAL *8 R,T,DL1,DL2,DL3,EA,EYJ,EZJ,GS,EJA,LC,YJ,ZJ,
     1CAL1,SAL1,CAL2,SAL2,CAL3,SAL3,BY,BZ

      COMMON /CDANEL/ IDLG,ITYP,LSSW,III1(16),NREL,
     1NSSW(14),NUMBL(210),
     2XYZ(3,2),STMAT(9),PARAM(8),III3(2),
     3R(14,14),T(14,14),DL1,DL2,DL3,EA,EYJ,EZJ,GS,EJA,LC,YJ,ZJ

      REAL *8 QELEM,QELLOK,E,G,A,RJS,RJA,LA1,LA2,LA4,LA6,
     1LA11,LA12,LA14,LA16,LD1,LD2,LD4,LD6,
     2Y0,Z0,ALFA3,YS,ZS,DXY

      COMMON /ROBY1/ R1(14,14),QELEM(14),QELLOK(14)

C     Budowa liniowej macierzy sztywnosci

      IF ( KS.EQ.0 ) THEN

C     Zerowanie macierzy i wektorow

      CALL ZERO ( R,784 )
```

```
      CALL ZERO ( T,784 )
      CALL ZERO ( QELEM,56 )
      CALL ZERO ( QELLOK,56 )

C     Obliczanie dlugosci elementu

      DL2=0.0D0
      DO 10 I=1,3
         DL2=DL2+DBLE((XYZ(I,2)-XYZ(I,1))*(XYZ(I,2)-XYZ(I,1)))
   10 CONTINUE

      DXY=DL2-DBLE((XYZ(3,2)-XYZ(3,1))*(XYZ(3,2)-XYZ(3,1)))

         DL1=DSQRT(DL2)
         DXY=DSQRT(DXY)

C     Zmienne pomocnicze dla macierzy transformacji

      YS=DBLE(STMAT(4))
      ZS=DBLE(STMAT(5))
      Y0=DBLE(STMAT(7))
      Z0=DBLE(STMAT(8))
      ALFA3=DBLE(STMAT(9))
      ALFA3=0.017453288D0*ALFA3
      BY=YS*DCOS(ALFA3)-ZS*DSIN(ALFA3)+Y0
      BZ=YS*DSIN(ALFA3)+ZS*DCOS(ALFA3)+Z0

C     Obliczenie macierzy transformacji

      IF(DXY.NE.0.0D0) THEN
         CAL1=(XYZ(1,2)-XYZ(1,1))/DXY
         SAL1=(XYZ(2,2)-XYZ(2,1))/DXY
      ELSE
         CAL1=1.0D0
         SAL1=0.0D0
      ENDIF

      CAL2=DXY/DL1
      SAL2=(-XYZ(3,2)+XYZ(3,1))/DL1
      CAL3=DCOS(ALFA3)
      SAL3=DSIN(ALFA3)

      CALL TRANTHIN(T,CAL1,SAL1,CAL2,SAL2,CAL3,SAL3,Y0,Z0,BY,BZ)

C     Zmienne pomocnicze dla macierzy sztywnosci

      DL3=DL2*DL1
      E=DBLE( STMAT(1) )
      G=DBLE( STMAT(2) )
      A=DBLE( PARAM(1) )
      YJ=DBLE( PARAM(2) )
      ZJ=DBLE( PARAM(3) )
      RJS=DBLE( PARAM(4) )
      RJA=DBLE( PARAM(5) )

      EA=E*A
      EYJ=E*YJ
      EZJ=E*ZJ
      GS=G*RJS
      EJA=E*RJA
```

```
      LC=EA/DL1
      LA11=12.0D0*EYJ/DL3
      LA1=12.0D0*EZJ/DL3
      LA14=-6.0D0*EYJ/DL2
      LA4=6.0D0*EZJ/DL2
      LA12=4.0D0*EYJ/DL1
      LA2=4.0D0*EZJ/DL1
      LA16=2.0D0*EYJ/DL1
      LA6=2.0D0*EZJ/DL1

      LD1=1.2D0*GS/DL1+12.0D0*EJA/DL3
      LD4=-0.1D0*GS-6.0D0*EJA/DL2
      LD2=2.0D0*DL1*GS/15.0D0+4.0D0*EJA/DL1
      LD6=-GS*DL1/30.0D0+2.0D0*EJA/DL1

C     Zapelnianie dolnego trojkata macierzy sztywnosci

      R(1,1)=LC
      R(8,1)=-LC
      R(2,2)=LA1
      R(6,2)=LA4
      R(9,2)=-LA1
      R(13,2)=LA4
      R(3,3)=LA11
      R(5,3)=LA14
      R(10,3)=-LA11
      R(12,3)=LA14
      R(4,4)=LD1
      R(7,4)=LD4
      R(11,4)=-LD1
      R(14,4)=LD4
      R(5,5)=LA12
      R(10,5)=-LA14
      R(12,5)=LA16
      R(6,6)=LA2
      R(9,6)=-LA4
      R(13,6)=LA6
      R(7,7)=LD2
      R(11,7)=-LD4
      R(14,7)=LD6
      R(8,8)=LC
      R(9,9)=LA1
      R(13,9)=-LA4
      R(10,10)=LA11
      R(12,10)=-LA14
      R(11,11)=LD1
      R(14,11)=-LD4
      R(12,12)=LA12
      R(13,13)=LA2
      R(14,14)=LD2

C     Zapelnianie gornego trojkata macierzy sztywnosci

      DO 30 I=1,13
         DO 30 J=I+1,14
            R(I,J)=R(J,I)
   30 CONTINUE

 21   FORMAT(1X,7E11.4)

C     Transformacja macierzy sztywnosci
```

```
      CALL DATBC(14,MXSWEL,T,R,T,RMS)

      ENDIF

      IF( KS.EQ.1 ) THEN

      CALL QQELEM( QD,QELEM )
      CALL BCFT8(T,14,QELEM,14,QELLOK,14,14,14,1)
      CALL BCFT8(R,14,QELLOK,14,QELEM,14,14,14,1)

      WRITE(2,910) NREL
      WRITE(2,920)(QELEM(I),I=1,14)

      ENDIF

  910 FORMAT(/,/,2X,'ELEMENT NR=',I3)
  920 FORMAT(2X,'SILY UOGOLNIONE W UKLADZIE LOKALNYM ELEMENTU',/,
     17E12.5,/,1X,7E12.5)

      RETURN
      END


      SUBROUTINE TRANTHIN(T,CAL1,SAL1,CAL2,SAL2,CAL3,SAL3,Y0,Z0,BY,BZ)
C     *****************************************************
C     MACIERZ TRANSFORMACJI DLA PRZESTRZENNEGO ELEMENTU
C     CIENKOSCIENNEGO.
C     *****************************************************

      REAL*8 T,T1,T2,T3,TP,CAL1,SAL1,CAL2,SAL2,CAL3,SAL3,Y0,Z0,BY,BZ

      DIMENSION T(14,14),T1(7,7),T2(7,7),T3(7,7),TP(7,7)

      CALL ZERO(T1,196)
      CALL ZERO(T2,196)
      CALL ZERO(T3,196)
      CALL ZERO(TP,196)

      T1(1,1)=CAL1
      T1(1,2)=SAL1
      T1(2,1)=-SAL1
      T1(2,2)=CAL1
      T1(3,3)=1.0D0
      T1(7,7)=1.0D0

      T2(1,1)=CAL2
      T2(1,3)=SAL2
      T2(2,2)=1.0D0
      T2(3,1)=-SAL2
      T2(3,3)=CAL2
      T2(7,7)=1.0D0

C     MACIERZ T3 TRANSPONOWANA

      T3(1,1)=1.0D0
      T3(5,1)=Z0
      T3(6,1)=-Y0
      T3(2,2)=CAL3
      T3(3,2)=SAL3
      T3(4,2)=-BZ*CAL3+BY*SAL3
```

```
      T3(2,3)=-SAL3
      T3(3,3)=CAL3
      T3(4,3)=BZ*SAL3+BY*CAL3
      T3(7,5)=BY*CAL3+BZ*SAL3
      T3(7,6)=BZ*CAL3-BY*SAL3
      T3(7,7)=1.0D0

C     PRZEPISANIE TYCH SAMYCH BLOKOW

      DO 20 I=1,3
      DO 20 J=1,3
      T1(I+3,J+3)=T1(I,J)
      T2(I+3,J+3)=T2(I,J)
      T3(I+3,J+3)=T3(I,J)
 20   CONTINUE

C     WYMNOZENIE TP=((T3)T)T*T2*T1

      CALL DATBC(7,7,T3,T2,T1,TP)

C     PRZEPISANIE MACIERZY TP DO MACIERZY TRANSFORMACJI T

      DO 40 I=1,7
      DO 40 J=1,7
      T(I,J)=TP(I,J)
      T(I+7,J+7)=TP(I,J)
 40   CONTINUE
      RETURN
      END

```

D5.2 Plik gkim.for

```
      SUBROUTINE MACN01(KU1,KU2,KS,KR,RMS,RES)
C-----------------------------------------------------------------------
C+    MACIERZ GEOMETRYCZNA KS
C+    ELEMENT CIENKOSCiennY PRZESTRZENNY - BSW2
c+    MACIERZ WG. KIM - PRACA DYPLOMOWA - P.PLUCINSKI - 1998.05.18
C+    nowe oznaczenia
C-----------------------------------------------------------------------
C
C         PARAMETRY
C           WEJSCIE :
C             KU1=1 Obliczanie macierzy Ku liniowej
C             KU1=0 Brak macierzy Ku liniowej
C             KU2=1 Obliczanie macierzy K2 kwadratowej
C             KU2=0 Brak macierzy K2 kwadratowej
C             KS=1  Obliczanie macierzy Ks
C             KS=0  Brak macierzy Ks
C             KR=1  Obliczanie wektora residuow
C             KR=0  Brak wektora residuow
C           WYJSCIE :
C             RMS   Macierz geometryczna 14*14
C             RES   Wektor residuow
C
C     UWAGA : Obliczana jest tylko macierz geometryczna
C
C-----------------------------------------------------------------------
```

```
$INCLUDE:'ELEMTWOJ.INC'
$INCLUDE:'ELEMCPRZ.INC'

      REAL *8 RMS(MXSWEL,MXSWEL),RES(MXSWEL)

      REAL *8 R,T,DL1,DL2,DL3,EA,EYJ,EZJ,GS,EJA,EA1,YJ,ZJ

      COMMON /CDANEL/ IDLG,ITYP,LSSW,III1(16),NREL,
     1  NSSW(14),NUMBL(210),
     2  XYZ(3,2),STMAT(9),PARAM(8),III3(2),
     3  R(14,14),T(14,14),DL1,DL2,DL3,EA,EYJ,EZJ,GS,EJA,EA1,YJ,ZJ

      REAL *8 R1,QELEM,QELLOK,RN,YJR,ZJR,EJAR,YS,ZS,
     1RMY1,RMZ1,RB,RMY2,RMZ2,BETA,BETAY,BETAZ,A1,A12,A13,
     2ALFAK,A2,A3,A4,A6,B2,B4,B8,D1,D2,D3,D4,D5,D6,
     3C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,C9,C10,C11,C12,C13,C14,C15,C16,C21,C22,
     4C23,C24,C25,C26,C27,C28

      COMMON / ROBY1 / R1(14,14),QELEM(14),QELLOK(14)
C    1,RN,QZ,YJR,
C    1  ZJR,EJAR,YS,ZS,EZ,TY1,TZ1,RMY1,RMZ1,RB,TY2,TZ2,RMY2,RMZ2,BETA,
C    2  BETAY,BETAZ,B1,B2,B3,B4,ALFAK,R7,R2,R3,R4,R5,R6

C     Zerowanie macierzy i wektorow

      CALL ZERO( R1,784 )
      CALL ZERO( QELEM,56 )
      CALL ZERO( QELLOK, 56 )

C     Macierz Ks liniowa

         IF( KS.EQ.1) THEN

C     Przygotowanie pomocniczych zmiennych

      A=DBLE( PARAM(1) )
      RJA=DBLE( PARAM(5) )
      YJR=DBLE( PARAM(6) )
      ZJR=DBLE( PARAM(7) )
      EJAR=DBLE( PARAM(8) )
      YS=DBLE( STMAT(4) )
      ZS=DBLE( STMAT(5) )

      CALL QQELEM( QD,QELEM )
      CALL BCFT8( T,14,QELEM,14,QELLOK,14,14,14,1 )
      CALL BCFT8( R,14,QELLOK,14,QELEM,14,14,14,1 )


      WRITE(2,910)NREL
      WRITE(2,920)(QELEM(I),I=1,14)
  910 FORMAT(/,/,2X,'ELEMENT NR=',I3)
  920 FORMAT(2X,'SILY UOGOLNIONE W UKLADZIE LOKALNYM ELEMENTU-MACN01',/,
     17E11.4,/,1X,7E11.4)

      RN=QELEM(8)
      rmx1=qelem(4)
      RMY1=QELEM(5)
      RMZ1=QELEM(6)
      RB=QELEM(14)
      RMY2=QELEM(12)
      RMZ2=QELEM(13)
```

```
      IF( EJAR.EQ.0.0 ) THEN
      BETA=0.0D0
        ELSE
        BETA=EJAR/RJA
      ENDIF

      BETAY=-(YJR/ZJ-2.0D0*YS)
      BETAZ=ZJR/YJ-2.0D0*ZS
      ALFAK=YS*YS+ZS*ZS+(ZJ+YJ)/A

c     KIM********

      A1=1.2D0*RN/DL1
      A12=0.1333333d0*rn*dl1-zs*(rmy1+rmy2)/dl1
      A2=0.1333333d0*rn*dl1+ys*(rmz1+rmz2)/dl1
      A13=0.1333333d0*rn*dl1+zs*(rmy1+rmy2)/dl1
      A3=0.1333333d0*rn*dl1-ys*(rmz1+rmz2)/dl1
      A4=0.1D0*RN
      A6=-0.0333333D0*RN*DL1

      D1=1.2D0*(ALFAK*RN-0.5D0*BETAZ*(RMy1-RMy2)-0.5D0*BETAY*(RMz1-RMz
     12)+BETA*RB)/DL1
      D2=0.1333333D0*DL1*(ALFAK*RN+BETA*RB)-0.0333333D0*((3.0D0*RMZ1-R
     1MZ2)*BETAY+(3.0D0*RMY1-RMZ2)*BETAZ)*DL1
      D3=0.1333333D0*DL1*(ALFAK*RN+BETA*RB)-0.0333333D0*(BETAZ*(RMY1-3
     1.0D0*RMY2)+BETAY*(RMZ1-3.0D0*RMZ2))*DL1

      D4=-0.1D0*(ALFAK*RN+BETAY*RMZ2+BETAZ*RMY2+BETA*RB)
      D5=-0.1D0*(ALFAK*RN-BETAY*RMZ1-BETAZ*RMY1+BETA*RB)
      D6=-0.01666667d0*dl1*(2.0d0*(alfak*rn+beta*rb)-betay*(rmZ1-rmZ2)-
     1betaz*(rmY1-rmY2))

      C1=1.1D0*RMY1/DL1-0.1D0*RMY2/DL1+A1*ZS
      C2=1.1D0*RMZ1/DL1-0.1D0*RMZ2/DL1-A1*YS
      C5=-0.1D0*RMY1/DL1+1.1D0*RMY2/DL1-A1*ZS
      C6=-0.1D0*RMZ1/DL1+1.1D0*RMZ2/DL1+A1*YS

      C3=-0.1D0*RMY1-A4*ZS
      C8=0.1D0*RMZ2+A4*YS
      C7=0.1D0*RMY2-A4*ZS
      C4=-0.1D0*RMZ1+A4*YS

      C9=0.4D0*RMY1-0.2D0*RMY2+A4*ZS
      C10=-0.4D0*RMZ1+0.2D0*RMZ2+A4*YS
      C25=-0.2D0*RMY1+0.4D0*RMY2-A4*ZS
      C26=0.2D0*RMZ1-0.4D0*RMZ2-A4*YS

      C13=0.1D0*RMY1+0.2D0*RMY2-A4*ZS
      C14=-0.1D0*RMZ1-0.2D0*RMZ2-A4*YS
      C21=0.2D0*RMY1+0.1D0*RMY2+A4*ZS
      C22=-0.2D0*RMZ1-0.1D0*RMZ2+A4*YS

      C11=-0.1D0*DL1*RMY1+0.0333333D0*DL1*RMY2-RN*0.1333333D0*DL1*ZS
      C12=0.1D0*DL1*RMZ1-0.0333333D0*DL1*RMZ2-RN*0.1333333D0*DL1*YS
      C27=-0.0333333D0*DL1*RMY1+0.1D0*DL1*RMY2-RN*0.1333333D0*DL1*ZS
      C28=0.0333333D0*DL1*RMZ1-0.1D0*DL1*RMZ2-RN*0.1333333D0*DL1*YS

      C15=0.0333333D0*DL1*RMY1-A6*ZS
      C16=-0.0333333D0*DL1*RMZ1-A6*YS
      C23=-0.0333333D0*DL1*RMY2-A6*ZS
```

```
      C24=0.0333333D0*DL1*RMZ2-A6*YS

      B4=(-dl1*rmx1+ys*(rmy1+rmy2)+zs*(rmz1+rmz2))/(dl1*dl1)
      B2=0.5d0*(ys*(rmy1+rmy2)-zs*(rmz1+rmz2))/dl1
      B8=0.5d0*(dl1*rmx1-ys*(rmy1+rmy2)-zs*(rmz1+rmz2))/dl1

C     Zapelnienie gornego trojkata macierzy Ks

      R1(2,2)=A1
      R1(2,4)=C1
      R1(2,5)=B4
      R1(2,6)=A4
      R1(2,7)=C3
      R1(2,9)=-A1
      R1(2,11)=C5
      R1(2,12)=-B4
      R1(2,13)=A4
      R1(2,14)=C7
      R1(3,3)=A1
      R1(3,4)=C2
      R1(3,5)=-A4
      R1(3,6)=B4
      R1(3,7)=C4
      R1(3,10)=-A1
      R1(3,11)=C6
      R1(3,12)=-A4
      R1(3,13)=-B4
      R1(3,14)=C8
      R1(4,4)=D1
      R1(4,5)=C10
      R1(4,6)=C9
      R1(4,7)=D4
      R1(4,9)=-C1
      R1(4,10)=-C2
      R1(4,11)=-D1
      R1(4,12)=C22
      R1(4,13)=C21
      R1(4,14)=D5
      R1(5,5)=A12
      R1(5,6)=B2
      R1(5,7)=C12
      R1(5,9)=-B4
      R1(5,10)=A4
      R1(5,11)=C14
      R1(5,12)=A6
      R1(5,13)=-B8
      R1(5,14)=C16
      R1(6,6)=A2
      R1(6,7)=C11
      R1(6,9)=-A4
      R1(6,10)=-B4
      R1(6,11)=C13
      R1(6,12)=B8
      R1(6,13)=A6
      R1(6,14)=C15
      R1(7,7)=D2
      R1(7,9)=-C3
      R1(7,10)=-C4
      R1(7,11)=-D4
      R1(7,12)=C24
      R1(7,13)=C23
```

```
      R1(7,14)=D6
      R1(9,9)=A1
      R1(9,11)=-C5
      R1(9,12)=B4
      R1(9,13)=-A4
      R1(9,14)=-C7
      R1(10,10)=A1
      R1(10,11)=-C6
      R1(10,12)=A4
      R1(10,13)=B4
      R1(10,14)=-C8
      R1(11,11)=D1
      R1(11,12)=C26
      R1(11,13)=C25
      R1(11,14)=-D5
      R1(12,12)=A13
      R1(12,13)=-B2
      R1(12,14)=C28
      R1(13,13)=A3
      R1(13,14)=C27
      R1(14,14)=D3

c     dodatek - macierz obciazenia do przykladu 8.1 przyp. 2a
      if(nrel.eq.10) then
      r1(11,11)=r1(11,11)+8.2663501
      r1(12,12)=r1(12,12)+8.0889819
      r1(12,13)=r1(12,13)+1.2445793
      r1(13,13)=r1(13,13)+0.1773683
      endif
c     koniec ***************************************

C     Zapelnianie dolnego trojkata macierzy Ks

      DO 20 I=2,14
         DO 20 J=1,I-1
            R1(I,J)=R1(J,I)
20    CONTINUE

C     Transformacja macierzy Ks
      CALL DATBC( 14,MXSWEL,T,R1,T,RMS )

      ENDIF

      RETURN
      END
```

D6. Przykładowe wydruki danych i wyników obliczeń

D6.1 Plik z danymi do przykładu 8.1 przypadek 2a

```
ELC
#  LATERAL BUCKLING LOADS UNDER VERTICAL LOADS

#  LICZBA WEZLOW
   11
#  WSPOLRZEDNE WEZLOW
   1  0  0.0  0.0  0.0  0/
   -1 10  20.0  0.0  0.0  0/

#  LICZBA TYPOW ELEMENTOW
   1
#  TYP ELEMENTU SKONCZONEGO
   1 10 1

#  STALE MATERIALOWE  ( STMAT)
   30000.0 11500.0 0.0  1.5871 -2.48  0.0 0.0 0.0 0.0

#  RELACJE PRZYLEGANIA ( ORAZ PARAM )
   1 1 1 2 8.0 114.935 7.6483 0.6667 70.9495 -59.61583 59.2496 -35.06254
   -1 9  1  1  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0

#  KINEMATYCZNE WARUNKI BRZEGOWE
   1  1  0/
   2  1  0/
   3  1  0/
   4  1  0/
   5  1  0/
   6  1  0/
   7  1  0/
   0/

#  OBCIAZENIE WEZLOWE
   1
   11  2  -0.111378
   11  3  0.9937782
   0/

#  TYP ZADANIA
   3

#  STATECZNOSC POCZATKOWA
   0

#  DWIE WARTOSCI WLASNE I NIE PRZEWIDUJE PRZESUWANIA WIDMA
   1  1

□
```

D6.2 Fragmenty pliku wynikowego dla powyższego przykładu.

```
                                        ŰŰŰ
                                        ŰŰŰ
                                        ŰŰŰ
  ÜŰŰŰŰŰŰÜ      ŰŰŰŰŰŰŰŰÜ      ŰŰŰ ÜŰŰŰŰß      ÜŰŰŰŰŰŰÜ
 ŰŰŰ   ŰŰŰ      ŰŰŰ   ŰŰŰ      ŰŰŰŰŰŰ         ŰŰŰ   ŰŰŰ
 ŰŰŰ   ŰŰŰ      ŰŰŰ   ŰŰŰ      ŰŰŰßŰŰ         ŰŰŰ   ŰŰŰ
 ŰŰŰ   ŰŰŰ      ŰŰŰ   ŰŰŰ      ŰŰŰ  ŰŰ        ŰŰŰ   ŰŰŰ
 ŰŰŰ   ŰŰŰ      ŰŰŰ   ŰŰŰ      ŰŰŰ   ŰŰÜ      ŰŰŰ   ŰŰŰ
  ßŰŰŰŰŰŰßŰŰŰ   ŰŰŰ   ŰŰŰŰŰ    ŰŰŰ    ŰŰŰŰ    ßŰŰŰŰŰŰßŰŰŰ

                         Politechnika  Krakowska  '91




 Liczba wezlow   11


          Wspolrzedne wezlow


 NRWZ       X          Y          Z      PAR(1)     PAR(2)     PAR(3)
PAR(4)
 1      .000       .000       .000  0.000E+00  0.000E+00  0.000E+00
0.000E+00

(...)

11   200.000       .000       .000  0.000E+00  0.000E+00  0.000E+00
0.000E+00


 Liczba typow elementow  1

 Elementy:   bsw1
 Liczba elementow   10

 Stale materialowe

 nr      D(1)         D(2)         D(3)         D(4)         D(5)
D(6)         D(7)         D(8)        D(9)
  1   3.000E+04   1.150E+04   0.000E+00   1.587E+00  -2.480E+00   0.000E+00
         0.000E+00   0.000E+00   0.000E+00



 Nrel  W 1  W 2  TYP   PAR(1)      PAR(2)      PAR(3)      PAR(4)
PAR(5)      PAR(6)      PAR(7)      PAR(8)
    1    1    2    1   8.000E+00   1.149E+02   7.648E+00   6.667E-01
7.095E+01  -5.962E+01   5.925E+01  -3.506E+01

(...)
10   10   11    1   8.000E+00   1.149E+02   7.648E+00   6.667E-01
7.095E+01  -5.962E+01   5.925E+01  -3.506E+01
```

```
 Warunki brzegowe

 Kier  W 1  W 2  W 3  W 4  W 5  W 6  W 7  W 8  W 9  W10  W11  W12  W13  W14
W15
   1     1
   2     1
   3     1
   4     1
   5     1
   6     1
   7     1

   Wektor obciazen nr 1

 Nrwz    Kier     Wart
  11       2  -1.114E-01
  11       3   9.938E-01


     Z A D A N I E   3


 Statecznosc ukladu idealnego


     W Y N I K I  O B L I C Z E N


                   OBCIAZENIE  ukladu

 Nrwz     U          V           W           FIx         FIy         FIz
  1  0.0000E+00 0.0000E+00  0.0000E+00  0.0000E+00  0.0000E+00  0.0000E+00

(...)

11  0.0000E+00 -1.1138E-01  9.9378E-01  0.0000E+00  0.0000E+00  0.0000E+00


                   PRZEMIESZCZENIA UKLADU

 Nrwz     U           V           W           FIx         FIy         FIz
  1  0.0000E+00  0.0000E+00  0.0000E+00  0.0000E+00  0.0000E+00  0.0000E+00

(...)

11  0.0000E+00 -1.2173E+00  8.1794E-01 -3.1107E-02 -6.0336E-03 -9.2875E-03


     POCZATKOWY problem wyboczenia


  ELEMENT NR=  1
  SILY UOGOLNIONE W UKLADZIE LOKALNYM ELEMENTU-MACN01
  .0000E+00  .1114E+00 -.9938E+00  .1301E+01  .1988E+03  .2228E+02 -
.2170E+02
   .0000E+00 -.1114E+00  .9938E+00 -.1301E+01 -.1789E+03 -.2005E+02
.6547E+01

(...)
```

```
  ELEMENT NR= 10
  SILY UOGOLNIONE W UKLADZIE LOKALNYM ELEMENTU-MACN01
  .0000E+00  .1114E+00 -.9938E+00  .1301E+01  .1988E+02  .2228E+01 -.4080E-
03
   .0000E+00 -.1114E+00  .9938E+00 -.1301E+01  .2931E-11  .6127E-12 -
.8399E-11

   Wartosci wlasne

   Liczba policzonych wartosci wlasnych:    1
   Liczba wykonanych iteracji:     13
   Obliczenia wykonywane z przesuwaniem widma

   Blad wzgledny problemu wlasnego dla kolejnych par wlasnych:
    .21E-11


     PARAMETR OBCIAZENIA lambda  1   =    4.6080D+00


                    POSTAC WYBOCZENIA  -  wektor V  1

 Nrwz     U           V           W           FIx         FIy         FIz
  1  0.0000E+00  0.0000E+00  0.0000E+00  0.0000E+00  0.0000E+00  0.0000E+00

(...)

11  1.5578E-26  1.6502E+00 -6.6396E-02  5.0250E-02 -5.3186E-04  1.6933E-02
 KONIEC OBLICZEN
```

D6.3 Wyniki obliczeń zadania 8.1 przy pomocy systymu ROBOTV6 v.4.25

```
Rezultaty dla wyboczeń

Wyniki         indywidualne

Przypadek       1Do4
                1Do4
Forma           1Do2
                1Do2

Przyp. For. Wsp.krytyczn    Dokładność
----------- -------------- --------------
Nazwa prz.  DOL GORA
     1    1 -3.77989E+00    2.31543E-11
     1    2  3.34895E+00    1.16987E-11
----------- -------------- --------------
Nazwa prz.  GORA GORA
     2    1 -2.71859E+00    2.18046E-13
     2    2  4.59084E+00    1.28889E-11
----------- -------------- --------------
Nazwa prz.  CEN GORA
     3    1 -3.31989E+00    1.02491E-10
     3    2  3.92022E+00    4.69986E-10
----------- -------------- --------------
Nazwa prz.  CEN
     4    1  2.24199E+01    3.41966E-14
     4    2  1.74366E+02    2.35461E-07
```