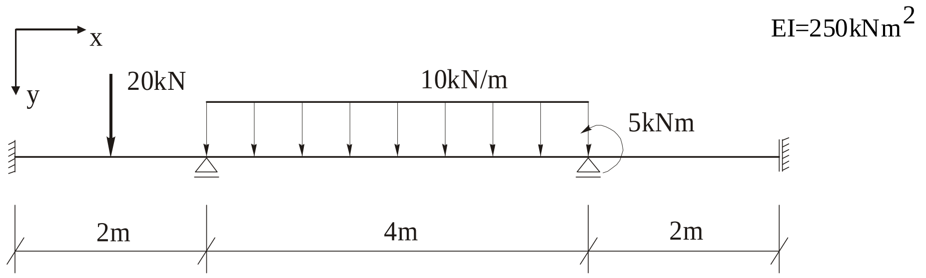
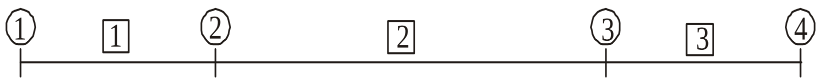


Definicja wektorów zastępników i macierzy sztywności

ORIGIN := 1

$$Z_s(p,l) := \begin{pmatrix} \frac{p}{2} \\ \frac{p \cdot l}{8} \\ \frac{p}{2} \\ \frac{-p \cdot l}{8} \end{pmatrix} \qquad Z_c(p,l) := \begin{pmatrix} \frac{p \cdot l}{2} \\ \frac{p \cdot l^2}{12} \\ \frac{p \cdot l}{2} \\ \frac{-p \cdot l^2}{12} \end{pmatrix} \qquad k(EI,l) := \begin{pmatrix} \frac{12 \cdot EI}{l^3} & \frac{6 \cdot EI}{l^2} & \frac{-12 \cdot EI}{l^3} & \frac{6 \cdot EI}{l^2} \\ \frac{6 \cdot EI}{l^2} & \frac{4 \cdot EI}{l} & -\frac{6 \cdot EI}{l^2} & \frac{2 \cdot EI}{l} \\ \frac{-12 \cdot EI}{l^3} & -\frac{6 \cdot EI}{l^2} & \frac{12 \cdot EI}{l^3} & -\frac{6 \cdot EI}{l^2} \\ \frac{6 \cdot EI}{l^2} & \frac{2 \cdot EI}{l} & -\frac{6 \cdot EI}{l^2} & \frac{4 \cdot EI}{l} \end{pmatrix}$$

Dyskretyzaja układu



Macierz topologii

$$top := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$EI := 250\ kN \cdot m^2$$

Długości elementów

$$l1 := 2\ m$$

$$l2 := 4\ m$$

$$l3 := 2\ m$$

Budowa macierzy Boole'a

$$i := 1..2$$

$$B1_{(4,8)} := 0 \qquad B2_{(4,8)} := 0 \qquad B3_{(4,8)} := 0$$

$$B1_{i,2 \cdot (top_{1,1}-1)+i} := 1 \qquad B2_{i,2 \cdot (top_{2,1}-1)+i} := 1 \qquad B3_{i,2 \cdot (top_{3,1}-1)+i} := 1$$

$$B1_{i+2,2 \cdot (top_{1,2}-1)+i} := 1 \qquad B2_{i+2,2 \cdot (top_{2,2}-1)+i} := 1 \qquad B3_{i+2,2 \cdot (top_{3,2}-1)+i} := 1$$

$$B1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obliczenie macierzy sztywności

$$K1 := k(EI, l1) \qquad K1 = \begin{pmatrix} 375 & 375 & -375 & 375 \\ 375 & 500 & -375 & 250 \\ -375 & -375 & 375 & -375 \\ 375 & 250 & -375 & 500 \end{pmatrix}$$

$$K2 := k(EI, l2) \qquad K2 = \begin{pmatrix} 46.875 & 93.75 & -46.875 & 93.75 \\ 93.75 & 250 & -93.75 & 125 \\ -46.875 & -93.75 & 46.875 & -93.75 \\ 93.75 & 125 & -93.75 & 250 \end{pmatrix}$$

$$K3 := k(EI, l3) \qquad K3 = \begin{pmatrix} 375 & 375 & -375 & 375 \\ 375 & 500 & -375 & 250 \\ -375 & -375 & 375 & -375 \\ 375 & 250 & -375 & 500 \end{pmatrix}$$

Agregacja macierzy sztywności

$$K := B1^T \cdot K1 \cdot B1 + B2^T \cdot K2 \cdot B2 + B3^T \cdot K3 \cdot B3$$

$$K = \begin{pmatrix} 375 & 375 & -375 & 375 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 375 & 500 & -375 & 250 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -375 & -375 & 421.875 & -281.25 & -46.875 & 93.75 & 0 & 0 \\ 375 & 250 & -281.25 & 750 & -93.75 & 125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -46.875 & -93.75 & 421.875 & 281.25 & -375 & 375 \\ 0 & 0 & 93.75 & 125 & 281.25 & 750 & -375 & 250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -375 & -375 & 375 & -375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 375 & 250 & -375 & 500 \end{pmatrix}$$

Obliczenie wektorów zastępników

$$Z1 := Z_s(20, l1) \qquad Z1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad Z2 := Z_c(10, l2) \qquad Z2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 13.3333 \\ 20 \\ -13.3333 \end{pmatrix}$$

Agregacja wektorów zastępników

$$Z := B1^T \cdot Z1 + B2^T \cdot Z2 \qquad Z = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 30 \\ 8.3333 \\ 20 \\ -13.3333 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wektor sił węzłowych P i suma z wektorem zastępników - S

$$P_8 := 0 \qquad P_6 := -5 \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S := Z + P \qquad S = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 30 \\ 8.3333 \\ 20 \\ -18.3333 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Warunki brzegowe (1 - zablokowany stopień swobody)

$$war := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$$i := 1..8 \quad I := \mathrm{identity}(8) \quad Id_{i,i} := war_i \quad Ip := I - Id \quad KK := Ip \cdot K \cdot Ip + Id \quad SS := Ip \cdot S$$

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Ip = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$KK = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 750 & 0 & 125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 125 & 0 & 750 & -375 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -375 & 375 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad SS = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8.3333 \\ 0 \\ -18.3333 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań i obliczenie wektora przemieszczeń Q oraz wektora reakcji R

$$Q := KK^{-1} \cdot SS \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0204 \\ 0 \\ -0.0557 \\ -0.0557 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R := K \cdot Q - S \qquad R = \begin{pmatrix} -2.3529 \\ 0.098 \\ -40.9559 \\ -1.7764 \times 10^{-15} \\ -16.6912 \\ -3.5527 \times 10^{-15} \\ 0 \\ 6.9608 \end{pmatrix}$$

Powrót do elementów - obliczenie sił przywęzłowych w elementach

$$f1 := K1 \cdot B1 \cdot Q - Z1 \qquad f2 := K2 \cdot B2 \cdot Q - Z2 \qquad f3 := K3 \cdot B3 \cdot Q$$

$$f1 = \begin{pmatrix} -2.3529 \\ 0.098 \\ -17.6471 \\ 15.1961 \end{pmatrix} \qquad f2 = \begin{pmatrix} -23.3088 \\ -15.1961 \\ -16.6912 \\ 1.9608 \end{pmatrix} \qquad f3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6.9608 \\ 0 \\ 6.9608 \end{pmatrix}$$