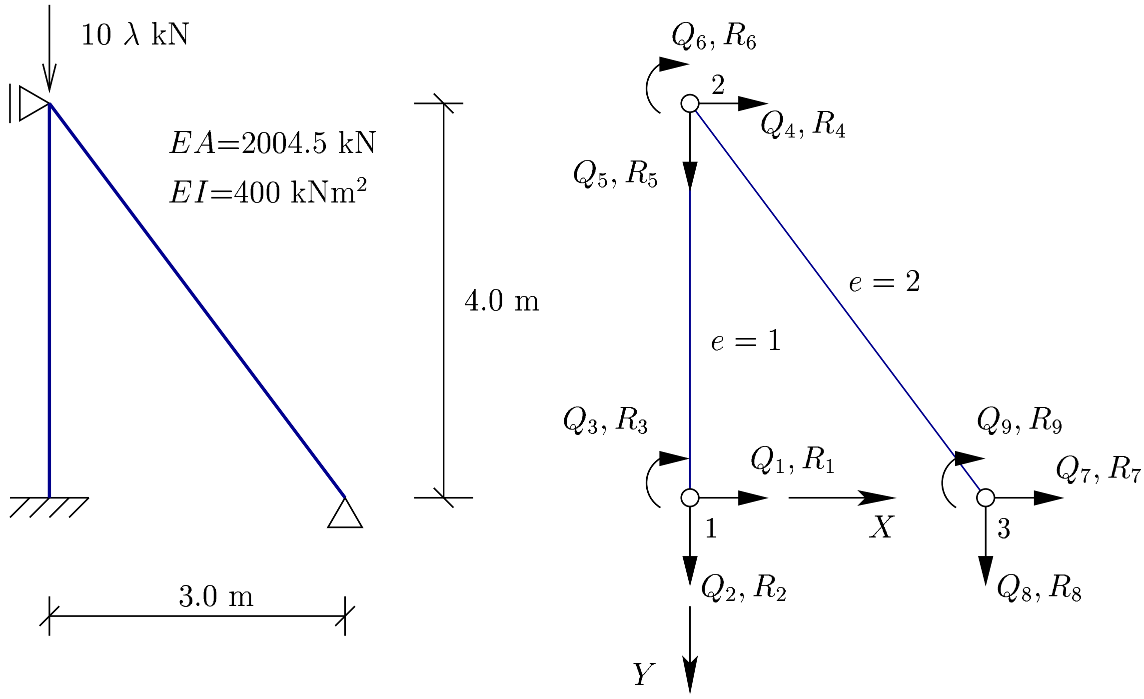
Rozwiązanie stateczności ramy MES

Rozwiążemy stateczność ramy pokazanej na Rys.1.



Rysunek 1: Rama i jej model skończenie elementowy

ETAP I – STATYKA

1. Obliczenie macierzy sztywności i wektorów obciążenia dla elementów. Korzystając ze wzoru na macierz sztywności elementu ramowego:

$$
\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{bmatrix}^e \tag{1}
$$

oraz ze wzoru na macierz transformacji:

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} \cos(\alpha^e) & \sin(\alpha^e) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha^e) & \cos(\alpha^e) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha^e) & \sin(\alpha^e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha^e) & \cos(\alpha^e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

i wykorzystując prawo transformacji

$$\mathbf{K}^e = (\mathbf{T}^e)^{\mathrm{T}}\mathbf{k}^e\mathbf{T}^e \tag{3}$$

obliczamy macierze dla elementów.

Element 1 α^1=270°, l^1=4 m

Macierz sztywności

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 75.000 & 0.000 & 150.000 & -75.000 & 0.000 & 150.000 \\ 0.000 & 501.125 & 0.000 & 0.000 & -501.125 & 0.000 \\ 150.000 & 0.000 & 400.000 & -150.000 & 0.000 & 200.000 \\ -75.000 & 0.000 & -150.000 & 75.000 & 0.000 & -150.000 \\ 0.000 & -501.125 & 0.000 & 0.000 & 501.125 & 0.000 \\ 150.000 & 0.000 & 200.000 & -150.000 & 0.000 & 400.000 \end{bmatrix}$$

Wektory sił węzłowych

$$\mathbf{P}^{1b} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{R}^{1b} = \{R^1_1 \;\; R^1_2 \;\; R^1_3 \;\; R^1_4 \;\; R^1_5 \;\; R^1_6\}$$

Element 2 α^2=53.13°, l^2=5 m

Macierz sztywności

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 168.900 & 174.000 & -76.800 & -168.900 & -174.000 & -76.800 \\ 174.000 & 270.400 & 57.600 & -174.000 & -270.400 & 57.600 \\ -76.800 & 57.600 & 320.000 & 76.800 & -57.600 & 160.000 \\ -168.900 & -174.000 & 76.800 & 168.900 & 174.000 & 76.800 \\ -174.000 & -270.400 & -57.600 & 174.000 & 270.400 & -57.600 \\ -76.800 & 57.600 & 160.000 & 76.800 & -57.600 & 320.000 \end{bmatrix}$$

Wektory sił węzłowych

$$\mathbf{P}^{2b} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{R}^{2b} = \{R^2_1 \;\; R^2_2 \;\; R^2_3 \;\; R^2_4 \;\; R^2_5 \;\; R^2_6\}$$

2. Agregacja i budowa równań MES. Globalny układ równań MES budujemy wykorzystując tablicę topologii oraz warunki ciągłości przemieszczeń uogólnionych w węzłach.

$$\begin{aligned} U^1_1 &= Q_1 & U^1_2 = U^2_1 &= Q_4 & U^2_2 &= Q_7 \\ W^1_1 &= Q_2 & W^1_2 = W^2_1 &= Q_5 & W^2_2 &= Q_8 \\ \varphi^1_1 &= Q_3 & \varphi^1_2 = \varphi^2_1 &= Q_6 & \varphi^2_2 &= Q_9 \end{aligned}$$

gdzie U_i^e, W_i^e, $e, i = 1, 2$ są przemieszczeniami elementów w globalnym układzie współrzędnych, a φ_i^e kątami ugięcia. W rezultacie otrzymamy układ równań w postaci

$$\begin{bmatrix} 75.000 & 0.000 & 150.000 & -75.000 & 0.000 & 150.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 501.125 & 0.000 & 0.000 & -501.125 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 150.000 & 0.000 & 400.000 & -150.000 & 0.000 & 200.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -75.000 & 0.000 & -150.000 & 243.900 & 174.000 & -226.800 & -168.900 & -174.000 & -76.800 \\ 0.000 & -501.125 & 0.000 & 174.000 & 771.525 & 57.600 & -174.000 & -270.400 & 57.600 \\ 150.000 & 0.000 & 200.000 & -226.800 & 57.600 & 720.000 & 76.800 & -57.600 & 160.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -168.900 & -174.000 & 76.800 & 168.900 & 174.000 & 76.800 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -174.000 & -270.400 & -57.600 & 174.000 & 270.400 & -57.600 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -76.800 & 57.600 & 160.000 & 76.800 & -57.600 & 320.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^1 \\ R_2^1 \\ R_3^1 \\ R_4^1 + R_1^2 \\ R_5^1 + R_2^2 \\ R_6^1 + R_3^2 \\ R_4^2 \\ R_5^2 \\ R_6^2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

3. Uwzględnienie podstawowych warunków brzegowych i warunków równowagi sił w węzłach. Kinematyczne warunki brzegowe są niejednorodne i mają postać

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_7 = Q_8 = 0 \tag{5}$$

Statyczne warunki brzegowe są równaniami równowagi sił w węzłach ramy o postaci

$$\begin{array}{lll} R_1^1 = R_1 & R_4^1 + R_1^2 = R_4 & R_4^2 = R_7 \\ R_2^1 = R_2 & R_5^1 + R_2^2 = R_5 = 10 & R_5^2 = R_8 \\ R_3^1 = R_3 & R_6^1 + R_3^2 = R_6 = 0 & R_6^2 = R_9 = 0 \end{array} \tag{6}$$

gdzie R_1, R_2, R_3, R_4, R_7 i R_8 są reakcjami podpór.

Podstawiając (5) i (6) do (4) otrzymamy końcowy układ równań w formie

$$\begin{bmatrix} 75.000 & 0.000 & 150.000 & -75.000 & 0.000 & 150.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 501.125 & 0.000 & 0.000 & -501.125 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 150.000 & 0.000 & 400.000 & -150.000 & 0.000 & 200.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -75.000 & 0.000 & -150.000 & 243.900 & 174.000 & -226.800 & -168.900 & -174.000 & -76.800 \\ 0.000 & -501.125 & 0.000 & 174.000 & 771.525 & 57.600 & -174.000 & -270.400 & 57.600 \\ 150.000 & 0.000 & 200.000 & -226.800 & 57.600 & 720.000 & 76.800 & -57.600 & 160.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -168.900 & -174.000 & 76.800 & 168.900 & 174.000 & 76.800 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -174.000 & -270.400 & -57.600 & 174.000 & 270.400 & -57.600 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -76.800 & 57.600 & 160.000 & 76.800 & -57.600 & 320.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ 0 \\ 0 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ 10 \\ 0 \\ R_7 \\ R_8 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Jest to układ dziewięciu równań z trzema niewiadomymi pierwotnymi Q_5, Q_6 i Q_9 oraz sześcioma niewiadomymi wtórnymi (reakcjami).

Niewiadome pierwotne obliczymy rozwiązując 5te, 6te i 9te równanie (7)

$$\begin{bmatrix} 771.525 & 57.600 & 57.600 \\ 57.600 & 720.000 & 160.000 \\ 57.600 & 160.000 & 320.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_5 \\ Q_6 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

skąd po uwzględnieniu zerowych przemieszczeń otrzymamy

$$\mathbf{Q} = \{0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1.3160 \;\; -0.0592 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -0.2073\} \cdot 10^{-2} \tag{8}$$

Pozostałe równania (7) wykorzystujemy do obliczenia reakcji

$$\mathbf{R} = \{-0.0888 \;\; -6.5949 \;\; -0.1184 \;\; 2.5834 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -2.4946 \;\; -3.4050 \;\; 0\} \tag{9}$$

4. Obliczenie wektorów sił przywęzłowych w elementach.

Element 1

Wektor stopni swobody elementu w układzie współrzędnych globalnych

$$\mathbf{Q}^1 = \{0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1.3160 \;\; -0.0592\} \cdot 10^{-2}$$

Wektor sił przywęzłowych w układzie współrzędnych lokalnych

$$\mathbf{r}^{1b} = \mathbf{T}^1\mathbf{K}^1\mathbf{Q}^1 = \{6.5949 \;\; -0.0888 \;\; -0.1184 \;\; -6.5949 \;\; 0.0888 \;\; -0.2369\}$$

Element 2

Wektor stopni swobody elementu

$$\mathbf{Q^2} = \{0 \;\; 1.3160 \;\; -0.0592 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -0.2073\} \cdot 10^{-2}$$

Wektor sił przywęzłowych w układzie współrzędnych lokalnych

$$\mathbf{r}^{2b} = \mathbf{T}^2\mathbf{K}^2\mathbf{Q}^2 = \{4.2208 \;\; 0.0474 \;\; 0.2369 \;\; -4.2208 \;\; -0.0474 \;\; 0\}$$

ETAP II – STATECZNOŚĆ

5. Obliczenie macierzy sztywności geometrycznej dla elementów.

Wzór na macierz sztywności geometrycznej dla elementu ramowego jest w postaci

$$\mathbf{k}_\sigma^e = N^e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix}^e \tag{10}$$

gdzie N^e jest wartością siły ściskającej dla danego elementu.

Znając macierze transformacji wyliczamy macierze dla elementów.

Element 1 ($N^1 = -6.5949$)

$$\mathbf{K}_\sigma^1 = (\mathbf{T}^1)^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_\sigma^1\mathbf{T}^1 = -\begin{bmatrix} 1.9785 & 0.0000 & 0.6595 & -1.9785 & 0.0000 & 0.6595 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.6595 & 0.0000 & 3.5173 & -0.6595 & 0.0000 & -0.8793 \\ -1.9785 & 0.0000 & -0.6595 & 1.9785 & 0.0000 & -0.6595 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.6595 & 0.0000 & -0.8793 & -0.6595 & 0.0000 & 3.5173 \end{bmatrix}$$

Element 2 ($N^2 = -4.2208$)

$$\mathbf{K}_\sigma^2 = (\mathbf{T}^2)^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_\sigma^2\mathbf{T}^2 = -\begin{bmatrix} 0.6483 & -0.4862 & -0.3377 & -0.6483 & 0.4862 & -0.3377 \\ -0.4862 & 0.3647 & 0.2532 & 0.4862 & -0.3647 & 0.2532 \\ -0.3377 & 0.2532 & 2.8138 & 0.3377 & -0.2532 & -0.7034 \\ -0.6483 & 0.4862 & 0.3377 & 0.6483 & -0.4862 & 0.3377 \\ 0.4862 & -0.3646 & -0.2532 & -0.4862 & 0.3647 & -0.2532 \\ -0.3377 & 0.2532 & -0.7035 & 0.3377 & -0.2532 & 2.8138 \end{bmatrix}$$

6. Agregacja geometrycznej macierzy sztywności.

$$\mathbf{K}_\sigma = -\begin{bmatrix} 1.9785 & 0.0000 & 0.6595 & -1.9785 & 0.0000 & 0.6595 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.6595 & 0.0000 & 3.5173 & -0.6595 & 0.0000 & -0.8793 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -1.9785 & 0.0000 & -0.6595 & 2.6268 & -0.4862 & -0.9972 & -0.6483 & 0.4862 & -0.3377 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.4862 & 0.3647 & 0.2532 & 0.4862 & -0.3647 & 0.2532 \\ 0.6595 & 0.0000 & -0.8793 & -0.9972 & 0.2532 & 6.3312 & 0.3377 & -0.2532 & -0.7035 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.6483 & 0.4862 & 0.3377 & 0.6483 & -0.4862 & 0.3377 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.4862 & -0.3647 & -0.2532 & -0.4862 & 0.3647 & -0.2532 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.3377 & 0.2532 & -0.7035 & 0.3377 & -0.2532 & 2.8138 \end{bmatrix}$$

7. Rozwiązanie problemu własnego. Uwzględniając warunki brzegowe otrzymamy następujący problem własny $((\mathbf{K}+\lambda\mathbf{K}_\sigma)\Delta\mathbf{Q}=\mathbf{0})$

$$\left(\begin{bmatrix} 771.525 & 57.600 & 57.600 \\ 57.600 & 720.000 & 160.000 \\ 57.600 & 160.000 & 320.000 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0.3647 & 0.2532 & 0.2532 \\ 0.2532 & 6.3312 & -0.7035 \\ 0.2532 & -0.7035 & 2.8138 \end{bmatrix}\right)\Delta\mathbf{Q}=\mathbf{0} \tag{11}$$

Wartość własną obliczymy z wyznacznika (przedstawiam jeden ze sposobów rozwiązywania problemu własnego)

$$\left|\left(\begin{bmatrix} 771.525 & 57.600 & 57.600 \\ 57.600 & 720.000 & 160.000 \\ 57.600 & 160.000 & 320.000 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0.3647 & 0.2532 & 0.2532 \\ 0.2532 & 6.3312 & -0.7035 \\ 0.2532 & -0.7035 & 2.8138 \end{bmatrix}\right)\right| = 0$$

co prowadzi do równania charakterystycznego problemu w postaci

$$\begin{vmatrix} 771.525 & 57.600 & 57.600 \\ 57.600 & 720.000 & 160.000 \\ 57.600 & 160.000 & 320.000 \end{vmatrix} -$$

$$-\left(\begin{vmatrix} 771.525 & 57.600 & 0.2532 \\ 57.600 & 720.000 & -0.7035 \\ 57.600 & 160.000 & 2.8138 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 771.525 & 0.2532 & 57.600 \\ 57.600 & 6.3312 & 160.000 \\ 57.600 & -0.7035 & 320.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.3647 & 57.600 & 57.600 \\ 0.2532 & 720.000 & 160.000 \\ 0.2532 & 160.000 & 320.000 \end{vmatrix}\right)\lambda +$$

$$+\left(\begin{vmatrix} 771.525 & 0.2532 & 0.2532 \\ 57.600 & 6.3312 & -0.7035 \\ 57.600 & -0.7035 & 2.8138 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.3647 & 57.600 & 0.2532 \\ 0.2532 & 720.000 & -0.7035 \\ 0.2532 & 160.000 & 2.8138 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.3647 & 0.2532 & 57.600 \\ 0.2532 & 6.3312 & 160.000 \\ 0.2532 & -0.7035 & 320.000 \end{vmatrix}\right)\lambda^2 -$$

$$-\begin{vmatrix} 0.3647 & 0.2532 & 0.2532 \\ 0.2532 & 6.3312 & -0.7035 \\ 0.2532 & -0.7035 & 2.8138 \end{vmatrix}\lambda^3 = 0$$

co daje

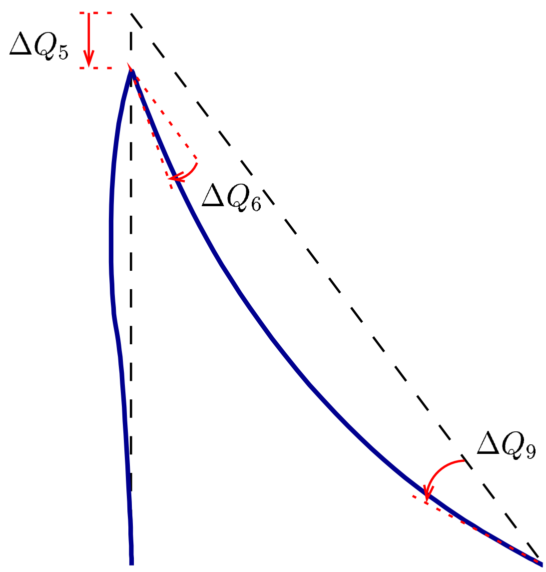
$$1.5562\cdot 10^8 - 3.3185\cdot 10^6\lambda + 1.4469\cdot 10^4\lambda^2 - 5.6395\lambda^3 = 0$$

Najmniejszy pierwiastek równania charakterystycznego wynosi $\lambda_{min} = 64.946$. Po podstawieniu tej wartości do układu równań (11) oraz przy założeniu $\Delta Q_9 = -1$ układ ten przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} 747.8409 & 41.1527 & 41.1527 \\ 41.1527 & 308.8169 & 205.6870 \\ 41.1527 & 205.6870 & 137.2519 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta Q_5 \\ \Delta Q_6 \\ \Delta Q_9 = -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

co daje rozwiązanie $\Delta Q_5 = 0.0185,\ \Delta Q_6 = 0.6636$ a wektor własny dla wszystkich stopni swobody wynosi

$$\Delta\mathbf{Q} = \{0\ 0\ 0\ 0\ 0.0185\ 0.6636\ 0\ 0\ -1\}$$



Rysunek 2: Postać wyboczenia dla $\lambda_{min} = 64.946$