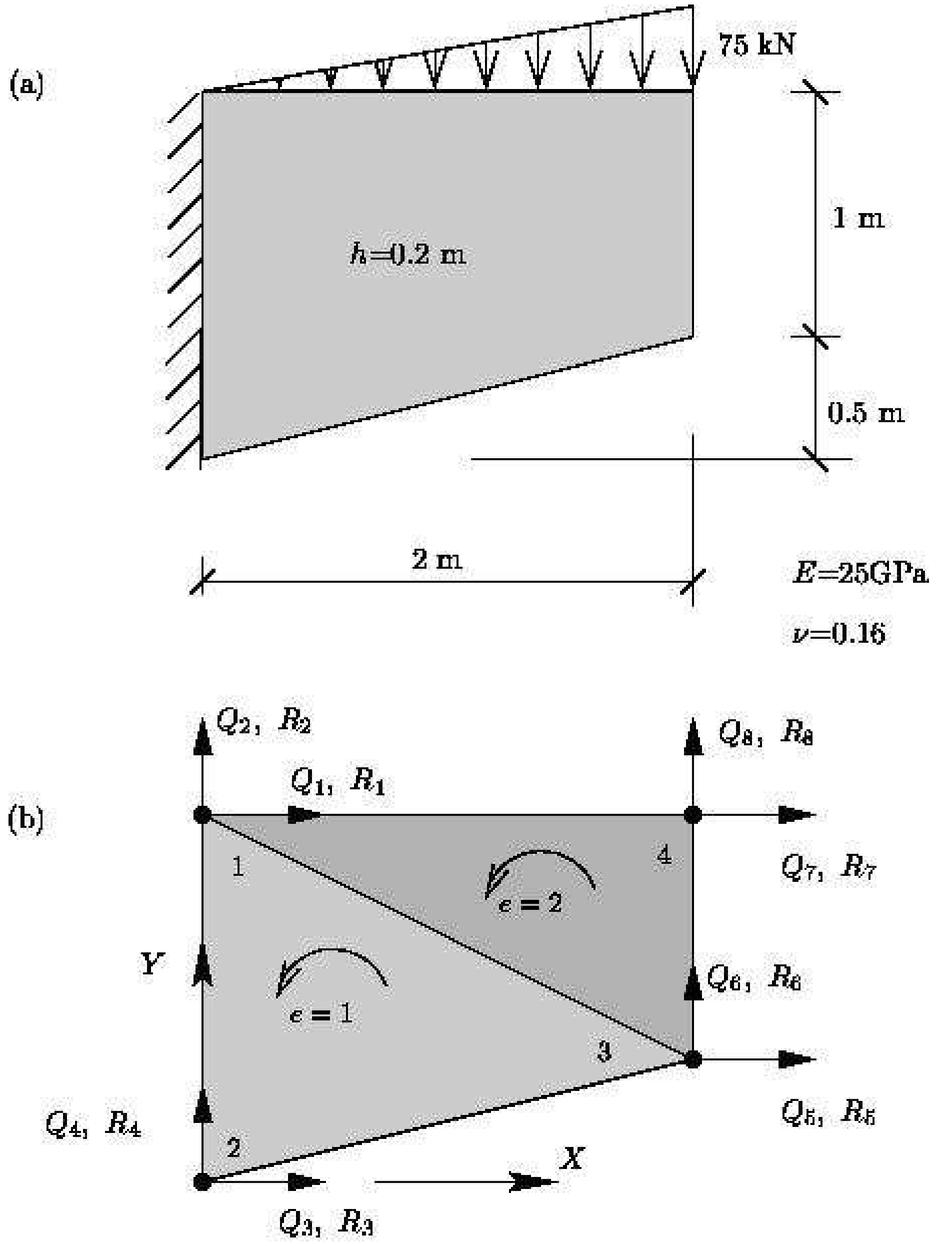

Rys.1. Tarcza (a) oraz jej model skończenie elementowy (b)

ORIGIN := 1

Stałe materiałowe

$E := 25e6 \qquad v := 0.16 \qquad h := 0.2$

$$wsp := \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0.5 \\ 2 & 1.5 \end{bmatrix} \qquad top := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Wzór na obliczenie pola elementów

$$A(e) := \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{bmatrix} wsp_{\left(top_{e,1}\right),1} & wsp_{\left(top_{e,2}\right),1} & wsp_{\left(top_{e,3}\right),1} \\ wsp_{\left(top_{e,1}\right),2} & wsp_{\left(top_{e,2}\right),2} & wsp_{\left(top_{e,3}\right),2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

Obliczenie modułu sprężystości

$$D := \frac{E}{\left(1 - v^2\right)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - v}{2} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2.566 \cdot 10^7 & 4.105 \cdot 10^6 & 0 \\ 4.105 \cdot 10^6 & 2.566 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 1.078 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

Funkcje kształtu

$$Nd1(e,x,y) := \left[wsp_{\left(top_{e,2}\right),2} - wsp_{\left(top_{e,3}\right),2}\right]\cdot\frac{x}{2\cdot A(e)} + \left[wsp_{\left(top_{e,3}\right),1} - wsp_{\left(top_{e,2}\right),1}\right]\cdot\frac{y}{2\cdot A(e)}$$

$$N1(e,x,y) := Nd1(e,x,y) + \frac{\left[wsp_{\left(top_{e,2}\right),1}\cdot wsp_{\left(top_{e,3}\right),2} - wsp_{\left(top_{e,3}\right),1}\cdot wsp_{\left(top_{e,2}\right),2}\right]}{2\cdot A(e)}$$

$$Nd2(e,x,y) := \left[wsp_{\left(top_{e,3}\right),2} - wsp_{\left(top_{e,1}\right),2}\right]\cdot\frac{x}{2\cdot A(e)} + \left[wsp_{\left(top_{e,1}\right),1} - wsp_{\left(top_{e,3}\right),1}\right]\cdot\frac{y}{2\cdot A(e)}$$

$$N2(e,x,y) := Nd2(e,x,y) + \frac{\left[wsp_{\left(top_{e,3}\right),1}\cdot wsp_{\left(top_{e,1}\right),2} - wsp_{\left(top_{e,1}\right),1}\cdot wsp_{\left(top_{e,3}\right),2}\right]}{2\cdot A(e)}$$

$$Nd3(e,x,y) := \left[wsp_{\left(top_{e,1}\right),2} - wsp_{\left(top_{e,2}\right),2}\right]\cdot\frac{x}{2\cdot A(e)} + \left[wsp_{\left(top_{e,2}\right),1} - wsp_{\left(top_{e,1}\right),1}\right]\cdot\frac{y}{2\cdot A(e)}$$

$$N3(e,x,y) := Nd3(e,x,y) + \frac{\left[wsp_{\left(top_{e,1}\right),1}\cdot wsp_{\left(top_{e,2}\right),2} - wsp_{\left(top_{e,2}\right),1}\cdot wsp_{\left(top_{e,1}\right),2}\right]}{2\cdot A(e)}$$

element 1

$$N1(1,x,y) \rightarrow -.16666666666666666667\cdot x + .66666666666666666666\cdot y$$

$$N2(1,x,y) \rightarrow -.33333333333333333333\cdot x - .66666666666666666666\cdot y + 1.0000000000000000000$$

$$N3(1,x,y) \rightarrow .50000000000000000000\cdot x$$

element 2

$$N1(2,x,y) \rightarrow -.50000000000000000000\cdot x + 1.0000000000000000000$$

$$N2(2,x,y) \rightarrow -1.0000000000000000000\cdot y + 1.5000000000000000000$$

$$N3(2,x,y) \rightarrow .50000000000000000000\cdot x + 1.0000000000000000000\cdot y - 1.5000000000000000000$$

Macierz funkcji kształtu

$$N(e,x,y) := \begin{bmatrix} N1(e,x,y) & 0 & N2(e,x,y) & 0 & N3(e,x,y) & 0 \\ 0 & N1(e,x,y) & 0 & N2(e,x,y) & 0 & N3(e,x,y) \end{bmatrix}$$

Macierz pochodnych funkcji kształtu

$$B(e,x,y) := \begin{bmatrix} \frac{d}{dx}N1(e,x,y) & 0 & \frac{d}{dx}N2(e,x,y) & 0 & \frac{d}{dx}N3(e,x,y) & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy}N1(e,x,y) & 0 & \frac{d}{dy}N2(e,x,y) & 0 & \frac{d}{dy}N3(e,x,y) \\ \frac{d}{dy}N1(e,x,y) & \frac{d}{dx}N1(e,x,y) & \frac{d}{dy}N2(e,x,y) & \frac{d}{dx}N2(e,x,y) & \frac{d}{dy}N3(e,x,y) & \frac{d}{dx}N3(e,x,y) \end{bmatrix}$$

$$A(1) = 1.5 \qquad A(2) = 1$$

$$B(1,0,0) = \begin{bmatrix} -0.167 & 0 & -0.333 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.667 & 0 & -0.667 & 0 & 0 \\ 0.667 & -0.167 & -0.667 & -0.333 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad B(2,0,0) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & -1 & 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Macierze sztywności

$$K(e) := B(e,0,0)^T \cdot D \cdot B(e,0,0) \cdot h \cdot A(e)$$

$$K(1) = \begin{bmatrix} 1.651\cdot10^6 & -4.96\cdot10^5 & -1.009\cdot10^6 & -5.816\cdot10^5 & -6.414\cdot10^5 & 1.078\cdot10^6 \\ -4.96\cdot10^5 & 3.511\cdot10^6 & 8.552\cdot10^4 & -3.241\cdot10^6 & 4.105\cdot10^5 & -2.694\cdot10^5 \\ -1.009\cdot10^6 & 8.552\cdot10^4 & 2.292\cdot10^6 & 9.921\cdot10^5 & -1.283\cdot10^6 & -1.078\cdot10^6 \\ -5.816\cdot10^5 & -3.241\cdot10^6 & 9.921\cdot10^5 & 3.78\cdot10^6 & -4.105\cdot10^5 & -5.388\cdot10^5 \\ -6.414\cdot10^5 & 4.105\cdot10^5 & -1.283\cdot10^6 & -4.105\cdot10^5 & 1.924\cdot10^6 & 0 \\ 1.078\cdot10^6 & -2.694\cdot10^5 & -1.078\cdot10^6 & -5.388\cdot10^5 & 0 & 8.082\cdot10^5 \end{bmatrix}$$

$$K(2) = \begin{bmatrix} 1.283\cdot10^6 & 0 & 0 & 4.105\cdot10^5 & -1.283\cdot10^6 & -4.105\cdot10^5 \\ 0 & 5.388\cdot10^5 & 1.078\cdot10^6 & 0 & -1.078\cdot10^6 & -5.388\cdot10^5 \\ 0 & 1.078\cdot10^6 & 2.155\cdot10^6 & 0 & -2.155\cdot10^6 & -1.078\cdot10^6 \\ 4.105\cdot10^5 & 0 & 0 & 5.131\cdot10^6 & -4.105\cdot10^5 & -5.131\cdot10^6 \\ -1.283\cdot10^6 & -1.078\cdot10^6 & -2.155\cdot10^6 & -4.105\cdot10^5 & 3.438\cdot10^6 & 1.488\cdot10^6 \\ -4.105\cdot10^5 & -5.388\cdot10^5 & -1.078\cdot10^6 & -5.131\cdot10^6 & 1.488\cdot10^6 & 5.67\cdot10^6 \end{bmatrix}$$

Macierze Boole'a

$$i := 1..2$$

$$B1_{6,8} := 0 \qquad B2_{6,8} := 0$$

$$B1_{i,2\cdot(top_{1,1}-1)+i} := 1 \qquad B2_{i,2\cdot(top_{2,1}-1)+i} := 1$$

$$B1_{i+2,2\cdot(top_{1,2}-1)+i} := 1 \qquad B2_{i+2,2\cdot(top_{2,2}-1)+i} := 1$$

$$B1_{i+4,2\cdot(top_{1,3}-1)+i} := 1 \qquad B2_{i+4,2\cdot(top_{2,3}-1)+i} := 1$$

$$B1 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \qquad B2 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Agregacja macierzy sztywności

$K := B1^T \cdot K(1) \cdot B1 + B2^T \cdot K(2) \cdot B2$

$$K = \begin{bmatrix} 2.933\cdot10^6 & -4.96\cdot10^5 & -1.009\cdot10^6 & -5.816\cdot10^5 & -6.414\cdot10^5 & 1.488\cdot10^6 & -1.283\cdot10^6 & -4.105\cdot10^5 \\ -4.96\cdot10^5 & 4.05\cdot10^6 & 8.552\cdot10^4 & -3.241\cdot10^6 & 1.488\cdot10^6 & -2.694\cdot10^5 & -1.078\cdot10^6 & -5.388\cdot10^5 \\ -1.009\cdot10^6 & 8.552\cdot10^4 & 2.292\cdot10^6 & 9.921\cdot10^5 & -1.283\cdot10^6 & -1.078\cdot10^6 & 0 & 0 \\ -5.816\cdot10^5 & -3.241\cdot10^6 & 9.921\cdot10^5 & 3.78\cdot10^6 & -4.105\cdot10^5 & -5.388\cdot10^5 & 0 & 0 \\ -6.414\cdot10^5 & 1.488\cdot10^6 & -1.283\cdot10^6 & -4.105\cdot10^5 & 4.079\cdot10^6 & 0 & -2.155\cdot10^6 & -1.078\cdot10^6 \\ 1.488\cdot10^6 & -2.694\cdot10^5 & -1.078\cdot10^6 & -5.388\cdot10^5 & 0 & 5.94\cdot10^6 & -4.105\cdot10^5 & -5.131\cdot10^6 \\ -1.283\cdot10^6 & -1.078\cdot10^6 & 0 & 0 & -2.155\cdot10^6 & -4.105\cdot10^5 & 3.438\cdot10^6 & 1.488\cdot10^6 \\ -4.105\cdot10^5 & -5.388\cdot10^5 & 0 & 0 & -1.078\cdot10^6 & -5.131\cdot10^6 & 1.488\cdot10^6 & 5.67\cdot10^6 \end{bmatrix}$$

Wektor prawej strony - zastępniki

funkcja obciążenia

$$f(p1_x, p2_x, p1_y, p2_y, L, s) := \begin{bmatrix} p1_x \cdot \left(1 - \frac{s}{L}\right) + p2_x \cdot \frac{s}{L} \\ p1_y \cdot \left(1 - \frac{s}{L}\right) + p2_y \cdot \frac{s}{L} \end{bmatrix} \qquad F(s) := f(0,0,0,-75,2,s) \qquad F(s) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-75}{2} \cdot s \end{bmatrix}$$

Zastępnik dla elementu 2 - obciążenie wzdłuż osi x=s i dla y=1.5

$Zt2(s) := N(2, s, 1.5)^T \cdot F(s)$

$i := 1 .. 6$

$$Z2_i := \int_0^2 Zt2(s)_i \, ds \qquad Z2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix} \qquad P := B2^T \cdot Z2 \qquad P = \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe - zablokowane nr stopni swobody

$$war := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$i := 1 .. 4 \quad I := identity(8) \quad Id_{8,8} := 0 \quad Id_{war_i, war_i} := 1 \quad Ip := I - Id \quad KK := Ip \cdot K \cdot Ip + Id \quad PP := Ip \cdot P$

Rozwiązanie równania MES

$Q := KK^{-1} \cdot PP$

$R := K \cdot Q - P$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8.182\cdot10^{-6} \\ -5.213\cdot10^{-5} \\ 1.529\cdot10^{-5} \\ -6.156\cdot10^{-5} \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} -66.667 \\ 43.556 \\ 66.667 \\ 31.444 \\ 7.085\cdot10^{-15} \\ -6.939\cdot10^{-15} \\ -1.322\cdot10^{-14} \\ -2.842\cdot10^{-14} \end{bmatrix}$$

Powrót do elementów

$Q1 := B1 \cdot Q$

$$Q1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8.182 \cdot 10^{-6} \\ -5.213 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_1 := B(1,0,0) \cdot Q1$

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} -4.091 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ -2.606 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$\sigma_1 := D \cdot \varepsilon_1$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} -104.964 \\ -16.794 \\ -280.851 \end{bmatrix}$$

$Q2 := B2 \cdot Q$

$$Q2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.182 \cdot 10^{-6} \\ -5.213 \cdot 10^{-5} \\ 1.529 \cdot 10^{-5} \\ -6.156 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_2 := B(2,0,0) \cdot Q2$

$$\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 7.646 \cdot 10^{-6} \\ -9.433 \cdot 10^{-6} \\ -7.306 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$\sigma_2 := D \cdot \varepsilon_2$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 157.446 \\ -210.638 \\ -78.723 \end{bmatrix}$$